This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

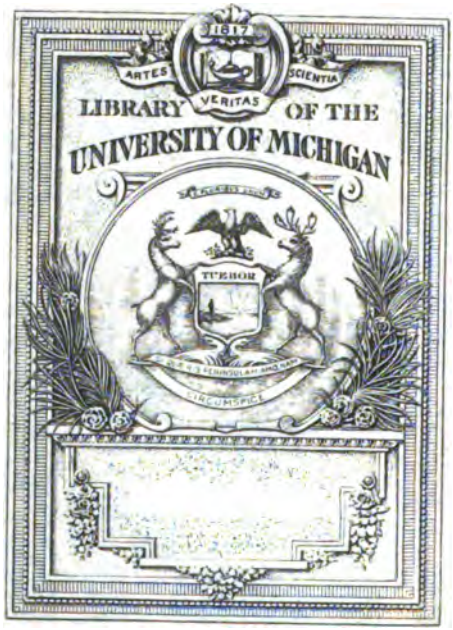
We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 444447


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR

QA
31
E88
S72
C2

EUCLIDIS

ELEMENTA

GRAECE ET LATINE.

COMMENTARIIS INSTRUCTA

EDIDERUNT

IOANNES GUILELMUS CAMERER

ET

CAROLUS FRIDERICUS HAUBER.

BEROLINI

SUMTIBUS G. REIMERI

MDCCCXXIV.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBRI SEX PRIORES

GRAECE ET LATINE

COMMENTARIO E SCRIPTIS VETERUM AC RECENTIORUM MATHEMATICORUM ET PFLEIDERERI MAXIME ILLUSTRATI.

EDIDIT

IOANNES GUILELMUS CAMERER

GYMNASII STUTTGARDIANI RECTOR.

TOM. I. COMPLECTENS LIBR. I—III.

CUM X. TABULIS.

BEROLINI

SUMTIBUS G. REIMERI

MDCCCXXIV.

QA
31
.E88
S72
C2

Mat. ri sec
Pierpont
3-8-27
18699
2v.

Quum unanimi fere omnium, qui res mathematicas callent, iudicio Euclidis scripta solidissimum cognitionis geometricae fundamentum posuisse credantur, atque in his elementa potissimum rigorosis, quas exhibent, demonstrationibus maxime insignia sint et tironibus accuratioris in his rebus doctrinae cupidis nunquam satis commendari possint, factum tamen est, nescio quo fato, ut Euclidis operum atque in his etiam Elementorum textus graecus paucissimis adhuc editionibus publici iuris factus magno discipulorum numero vix parabilis esset. Itaque, quum amici nonnulli me hortarentur, ut librorum certe sex priorum, qui ad geometriam planam pertinent et maxime necessarii esse videbantur, novam editionem pararem, et quae ad eos illustrandos pertinent, ex praecipuis, qui in Euclidem commentati sunt, scriptoribus colligerem, timide quidem, at ob rei utilitatem haud invitus id negotium suscepi, et quomodo in eo versatus sim, paucis exponam.

Ante omnia, ut textus graecus, quantum fieri posset, emendatissime prodiret, curandum putavi. Hoc consilio tres, quae, si recte novi, solae exstant, integrorum Euclidis elementorum editiones graecae, Basileensem nempe apud Ioannem Hervagium 1533. opera Simonis Gry-

naei publici iuris factam, deinde Oxoniens
opera Davidis Gregorii 1703. cum versione
tina in vulgus emissam, denique Parisiense
quam cum versione latina ac gallica curavit
Peyrardus 1814—1818., diligenter contuli,
ctiones variantes, quarum magnam copiam P
rardus potissimum editioni suae subiecit,
pendi, atque eam, quae maxime apta videret
selegi, nonnunquam etiam, at haud ita sae
ubi nulla occurreret, quae rei conveniret, co
iectando veriorem lectionem restituere conat
sum. Nulli tamen coniecturae in textu loc
dedi, quam non ad marginem adnotarem, q
liberum maneret lectori de ea re iudiciu
Caeterum, quamvis Peyrardus potissimum
codice nota 190. vel *a* ab ipso designato, que
e Vaticana bibliotheca Parisios delatum ip
etiam postquam redire ille ad dominum suu
iussus erat, terere permissum fuit, et cui su
mum ille pretium tribuit, magnam lectionu
variantium copiam collegerit, et subinde ali
quoque codices manuscriptos excusserit, qui
bibliotheca gallica tum Imperiali tres et vigin
numero ipsi commissi fuerant, quos autem pl
rumque fere omnes inter se consentire depr
hendit, et longe minoris pretii esse iudica
quam praecipuum illum codicem *a*, haud tame
operae pretium esse putavi, omnem istam fa
raginem in hanc editionem transferre. Quan
quam enim habet ille codex *a* lectiones no
contemnendas, tamen longe maxima pars ist
rum variantium nihil fere, quod ullius momen
sit ad doctrinam Euclideam, continet, se
meras vocum traiectiones v. c. ἴση ἐστὶν pr
ἔστιν ἴση, ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν pr

ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν; εὐθεῖα γραμμὴ ἥκει pro γραμμὴ ἥκει εὐθεῖα; ἤτοι pro ἢ, τοίνυν pro ἄρα, et alia huius generis leviora, quibus librum onerare et lectoris patientiam fatigare nolui. Quae enim huius generis lectionum discrimina in alia materia v. c. oratoria aut poëtica notari forte poterant, ea in mathematica curiosius expiscari otiosum fere videbatur. Quae autem levissimi etiam momenti ad rem melius intelligendam pertinere visa fuere, ea religiose semper ad marginem notavi. In seligendis autem lectionibus, quae textui inserentur, circa illa, quae diximus, levioris generis, Peyrardi plerumque lectionem retinuimus, nonnunquam tamen antiquiorem Oxoniensis et Basileensis lectionem revocavimus; in iis, quae paullo graviora videbantur, nostrum quidem judicium secuti sumus, ita tamen, ut eiusmodi in locis variam lectionem ad marginem semper indicaremus. Et habet sane in mathematicis ars critica propias, nec in aliud scribendi genus transferendas regulas, aut potius liberius hic quam in reliquis fere materiis versari potest ac debet, quod nempe apud mathematicos res ipsa nonnunquam imperiose hanc illamve lectionem postulat aut repudiat, nec codicum misere saepe depravatorum auctoritatem magnopere desiderat.

Quod ad versionem latinam attinet, Peyrardus sibi eam legem scripserat, ut cum textu Graeco exactissime, et quantum fieri posset, etiam circa singularum vocum ordinem consentiret. Hanc autem regulam ita presse sequendam putavit, ut vel ubi diversa utriusque linguae natura id non permittere videretur, ipsum quoque linguae genium isti legi postponendum

putaret. Ita v. c. pro articulo Graecorum, quei Latini non habent, plerumque v. *ipse*, *ipsa* et usus est. Et negari quidem nequit, usum istiu pronominis permittere nonnunquam breviorei paululum enunciationem, quam si quadratum rectangulum, angulum, rectam etc. ad quae i lud refertur, expresse nominare velimus; atta men etiam illud certum est, non solum minu latine ista dici, verum etiam saepius minus di stincte, quum ad plures sensu diversas voce idem pronomen referri aut pro iis poni queat Quamvis igitur brevitati etiam nos id dederi mus, ut nonnunquam, ubi nihil interesse vi debatur, eadem ratione pronomine *ipse* etc uteremur, plerumque tamen, quo distinctius in telligeretur, de quo sermo sit, rem ipsam suc nomine appellare, vel etiam in commentaric articulum graecum retinere maluimus. Ex ea dem ratione textum quidem graecum fideliter semper exprimere, at non ita anxie ordinem singularum vocum retinere voluimus, ut a latino sermone prorsus alienum esset, quod *efferretur*. Ita v. c. in prop. I. 41., cuius initium Peyrardus ita habet: si parallelogrammum quam triangulum basim habeat eandem etc. nos mutato ordine dicere maluimus: si parallelogrammum eandem basin habeat, quam triangulum. Atque ita saepius a Peyrardo discessimus, et rem aliis verbis, saepe iisdem, quae sunt in versione Gregorii, expressimus. Notavimus etiam, quanam propositione praecedente nitatur quodvis enunciatum, secuti in eo Gregorii, Rob. Simsoni et plerorumque geometrarum usum, quo tironum rebus maxime consulitur.

In commentario propositum nobis fuit, ut nihil, quod illustratione egere videretur, prorsus intactum relinqueremus, et potissimas observationes doctissimorum hominum colligeremus, ita tamen, ut ea tantum, quae proxime ad rem pertinerent, aut ex quavis propositione sequerentur, et maximum usum promitterent, exhiberemus, seiunctis, ne in nimiam molem liber excresceret, iis omnibus, quae minus necessaria viderentur v. c. diversis eiusdem propositionis demonstrationibus, nisi concinnitate aut alia virtute admodum se commendarent, aliisque quae longius a scopo abducerent. Qua in re fatemur difficile esse certum aliquem limitem ponere, nec dubitamus fore, quibus nimii, alios contra, quibus non satis copiosi fui se videamur. Fontes autem, e quibus observationes adiectas hausimus, fuere praeter Procli in libr. I. Elementorum Commentarium Graece satis vitiose editum simul cum Euclide Basil. 1533., correctius autem Latine Patavii 1560. a Francisco Barocio; Isaaci Monachi Scholia in Euclid. Elem. Geom. sex priores libros Argentor. 1579.; Pappi Collect. Mathem. Bonon. 1660.; ex antiquioribus potissimum Savilii Praelectiones tresdecim in Principium Elementorum Euclidis Oxon. 1621.; Isaaci Barrov. Lectiones mathematicae habitae Contrabrigiae 1664. 1665. 1666. Lond. 1684. 1685.; Wallisii Opp. Mathem. maxime Vol. II. Oxon. 1693.; Saccherii Euclides ab omni naevo vindicatus Mediolani 1723. Usi sumus praeterea editonibus Euclidis probatissimis, et ex egregiis, quas nonnullae earum continent, observationibus eas selegimus, quae ad rem nostram facere vide-

EUCLIDIS

ELEMENTA

GRAECE ET LATINE.

COMMENTARIIS INSTRUCTA

EDIDERUNT

IOANNES GUILELMUS CAMERER

ET

CAROLUS FRIDERICUS HAUBER.

BERÔLINI
SUMTIBUS G. REIMERI
MDCCCXXIV.

1655. 8.; Euclides restitutus, sive prisca Geometriae Elementa brevius et facilius contexta ab Io. Alphonso Borellio Pisis 1658. 4.; Les quinze Livres des Elem. Geometr. d'Euclide traduits et comment. par D. Henrion. Paris. 1677. 8.; Euclidis Elementor. sex libri priores demonstrati ab Henr. Coëtsio. Lugd. Batavor. 1692. 12.; The English Euclide being the first six Elements of Geometry translated out of the Greek with Annotations and usefull Supplements by Edmund Scarburgh. Oxford. 1705. fol.; Andreae Tacquet. Elementa Euclidea Geometriae etc. plurimis Corollariis, Notis etc. illustrata a Guilielmo Whiston. Romae 1745. 8.; Euclidis Elementor. Libri priores sex item undecimus et duodecimus ex Versione Latina Federici Commandini, sublatis iis, quibus olim Libri hi a Theone aliisve vitiati sunt, et quibusdam Euclidis Demonstrationibus restitutis a Robert. Simson. Glasguae 1756. 4.; Elementi piani e solidi d'Euclide da Iacopo Maria Carlieri in Firenze 1769. 8.; Elementor. Euclidis Libri XV. ad Graeci contextus fidem recensiti etc. (a Georg. Frid. Boermann.) Lips. 1769. 8.; An Examination of the first six Books of Euclids Elements by William Austin Oxford. 1781. 8.; Elements of Geometry containing the first six Books of Euclid by Ioh. Playfair Edinburgh 1795. 8.; The Elements of Euclid. etc. by Robert Simson London 1804. 8. Praetereo alias nonnullas editiones ab Ambrosio Rhodio, Georg. Fournier. aliisque factas, pariter ac vernaculas, quae in omnium manibus versantur, a Lorenzio, Hauffioque curatas. Addi debet Matthias Auszug aus Rob. Simsons Latein. und Engl. Ueber-

setzung der ersten 6 Bücher und des 11. und 12. der Elemente des Euklides, Magdeb. 1799. 8 et, qui saepe Euclidem respiciunt, Thom Simpson, in Elements of Geometry Lond. 1800 8.; van Swinden Anfangsgründe der Meſskunde übers. von Gaab, Iena 1797. 8.; Gilbert die Geometrie nach le Gendre, Simpson, van Swinden Gregorius a St. Vincentio und den Alten I. Th 1798. 8.

Alios praeterea infra nominabimus, maxime, qui circa singularem aliquam ad Elementa pertinentem doctrinam laborarunt; vid. v. gr. Excursum de Theoremate Pythagoraeo, de Parallelarum Theoria etc.

Maximam autem commendationem editionem hanc habituram esse confido ab iis, quae opera et benevolentia viri de Mathesi dudum meritissimi atque mei olim praeceptoris maxime colendi Christoph. Frider. de Pfleiderer., Professoris Tubingensis, ei accessere ornamenta. Is nempe non solum consilio suo me adiuvare, supellectilem litterariam, quam potissimum in hoc studiorum genere possidet amplissimam et exquisitissimam, liberalissime mihi impertire eiusque usum concedere, verum etiam doctissimas dissertationes, quas in varios Euclidis libros conscripsit, nominatim Scholia in Libr. II. Elementor. Euclid. P. I. II. III. Tubing. 1797. 1798. 1799.; Expositio et Dilucidatio Libri V. Element. Euclid. P. I. Tubing. 1782., cui accedit Dissertatio inserta Promtuario Mathematico Hindenburgi Fascicul. 7. et 8. p. 257. sqq. et 440. sqq.; Scholia in Libr. VI. Element. Euclidis P. I. II. III. IV. Tub. 1800. 1801. 1802. 1805.; Dissertatio I. II. de Dimensione

Circuli Tubing. 1787. 1790., excerpendas et hic denuo cum hominibus doctis communicandas permisit; quin etiam continuationem Scholiorum in libr. VI. Elementorum, quam penitus elaboratam nondum typis exprimere potuit, mecum communicare, et eius quoque liberum usum concedere dignatus est, praeterea observationes etiam et varia passim in reliquos Euclidis libros notamina inspicienda nostrisque usibus adhibenda dedit, et omnem hunc laborem tanto studio adiuvit, ut, quidquid ex ea ad solidioris geometriae studiosos redundaturum esse speramus utilitatis, illi nobiscum huic potissimum viro acceptum referre debeant *). Gratus etiam fateor, multum me debere amicitiae viri in rebus mathematicis versatissimi, Carol. Frider. Hauber, Professoris Schönthaliensis, qui collectam a se historiam tentaminum circa theoriam parallelarum mecum communicare, eiusque usum concedere, et permittere etiam voluit, ut, quae ipse docuerat in Dissertatione publica Tubingae 1793. habita, „*Propositionum de rationibus inter se diversis demonstrationes*" hic denuo lectori offerrentur. His opibus instructo pauca erant, ubi meas qualescunque observationes addere possem, et id potius curandum videbatur, ne nimia copia lectori taedium crearetur. Ut vero omni, qua par est, diligentia opus typis exprimeretur, humanissime ac benevolentissime curandum suscepit vir doctissimus mihique amicissimus, G. A. Diesterweg, de

*) Ex quo haec scripseram, placide obiit v. Kal. Octobr. 1821. vir morum probitate pariter atque eximia eruditione insignis, cuius memoriam, qui eum norunt, omnes religiose colere nunquam desistent.

Mathesi, quam Bonnae publice profitetur, dudum meritissimus. Illud praeterea rogamus lectores, ut si qua forte utilis adhuc visa observatio nos effugerit, aut aliud quid minus perfectum esse videatur, atque huic operi et Euclidis manibus conveniat, id homini scholastico plurimis laboribus distento, qui non nisi subsecivas horas in hunc librum impendere poterat, aequi iudices ignoscere velint. In animo quidem fuit, reliquos etiam Elementorum libros, aut certe XI. ac XII. subiungere, at per mutatas muneris mei rationes, novis subinde accedentibus negotiis, facere id non licuit. Scripsi Stuttgardiae d. 5. Aug. 1820.

I. G. Camerer Gymnasii Professor.

Quum iam conscriptae essent hae qualescunque in sex primos elementorum libros observationes, in lucem prodiit Chrestomathia Geometrica edita a viro doctissimo, quem modo nominavimus, Haubero. In qua quum praeter alia propositiones 1—26. libri I. e Proclo, Savilio, Pfleidereri schedis mscptis iisdem, quibus et nos usi sumus, et ipsius Hauberi observationibus copiosissime et longe uberius, quam nostrae rationes patiebantur, illustratae sint, multa tamen etiam ex hoc libro doctissimo excerpere, et in nostrum usum convertere adhuc licuit.

De Euclide Geometra notitia historica

collecta potissimum e Proclo, Savilio, Fabricio, Scheibelio.

Euclidem Geometram haud raro, quod etiam primae operum eius editiones, quas supra iam notavimus, probant, eundem esse crediderunt, atque Euclidem illum Socraticum, Megaris natum, cuius vitam descripsit Laertius libro secundo, et iisdem fere verbis Suidas v. *Εὐκλείδης*. De Megarensi isto Euclide ita habet Diogenes Laertius L. II. Segm. 106. *Εὐκλείδης ἀπὸ Μεγάρων τῶν πρὸς Ἰσθμῷ, ἢ Γελῶος κατ' ἐνίους. — Πρὸς τοῦτον φησὶν ὁ Ἑρμόδωρος ἀφίκεσθαι Πλάτωνα καὶ τοὺς λοιποὺς φιλοσόφους μετὰ τὴν τοῦ Σωκράτους τελευτὴν κ.τ.λ.* Ad eundem etiam pertinent illa Tauri philosophi apud Gellium Noct. Att. L. VI. c. 10. „Decreto, inquit, suo Athenienses caverant, ut, qui Megaris civis esset, si intulisse Athenas pedem prehensus esset, ut ea res ei homini capitalis esset. Tanto Athenienses, inquit, odio flagrabant finitimorum hominum Megarensium. Tum Euclides, qui indidem Megaris erat, cum advesperasceret, Athenas ad Socratem commeabat" etc. Atque huius ipsius decreti meminisse videtur Thucydides Histor. L. I. c. 139. sqq. ubi inter potissimas causas belli Peloponnesiaci hanc quoque fuisse refert. Itaque praeter reliqua v. c. morum diversitatem ipsa temporum ratio vetat Euclidem Geometram pro eodem sumere cum Socratico illo aut Megarensi Euclide. Proclus enim libr. II. Commentar. in libr. I. Elementor. refert:

Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν νεώτερος μέν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, e quibus nominat maxime Eudoxum et Theaetetum, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους, quin, ut rem exactius definiret, addit: γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου; et notam illam historiam affert de Ptolomaeo compendiosiorem ad geometriam viam desiderante, quam haud dari regiam (μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν — ut Savilius habet — nam in editione Procli graeca p. 20. verba truncata habent tantum Πτολεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτόν, εἴ τίς ἐστι περὶ γεωμετρίαν, in editione latina plenius p. 39. verba conservata sunt) Euclides responderit. Unde, quum ab initio belli Peloponnesiaci ad initium regni Ptolemaeorum in Aegypto plus quam centum anni effluxerint, nequit profecto noster Euclides idem esse cum Megarensi illo, qui noctu ad Socratem ventitare solebat. Hinc etiam patet, errorem aliquem inesse illi Valerii Maximi loco libr. VIII. c. 12. 1., ubi narrat, Platonem conductores sacrae arae (quam nempe quum cubicae figurae esset, Philopono referente, Delii duplicare iussi erant) de modo et forma eius secum sermonem conferre conatos ad Euclidem Geometram ire iussisse. Quae relatio eo etiam nomine erroris convincitur, quod ipsum quidem Platonem de cubo duplicando laborasse constat, de Euclide autem nihil tale narratur. Atque ita quidem novimus, quis Euclides *non fuerit*, quis autem ille *fuerit*, qua patria ortus, haud liquet. Savilius ait, ex media certe Graecia natum existimo, qui tam presse, tam accurato verborum delectu scripserit, ut ab eius formulis phrasibusque

nemo posterorum et in mathematicis excellentium virorum unquam vel latum unguem discessisse videatur. De aliorum opinionibus, qui vel Alexandrinum, vel Tyrium, vel Siculum e civitate Gela oriundum eum esse, at nullis probabilibus argumentis volunt, videatur Fabric. Biblioth. Graeca curante Harless. Vol. II. p. 44. et in Not. a. p. 46. Id autem ex Proclo L. II. p. 19. Edit. Graec. et p. 38. Edit. Latin. scimus, floruisse eum tempore Ptolemaei Lagi, quo regnante Alexandriae primus omnium celebrem illam scholam mathematicam aperuisse dicitur, e qua postea tot tantique nominis geometrae prodierunt. Moribus eum, Pappus in prooemio in libr. VII. Collect. Mathem. p. 251. ait, fuisse mitissimis, benignum erga omnes, praesertim eos, qui mathematicas disciplinas aliqua ex parte augere et amplificare possent, ut par est, non contentiosum (προςκρουστικὸν), sed accuratum, non arrogantem. Inter scripta, quae Euclidi tribuuntur, maximam famam obtinuerunt libri tredecim Elementorum, quibus plerumque subiuncti sunt duo, qui Hypsicli Alexandrino vulgo tribuuntur de quinque corporibus regularibus libri. Antequam de iis disserat, Proclus p. 19. Edit. Graec. aut apud Barocium l. II. c. 4. nominat eos, qui ante Euclidem vel generatim de Geometria bene meriti sunt, vel etiam scriptis elementis inclaruerunt, quos hic quoque referre liceat, nempe Thalem, Ameristum Stesichori poëtae fratrem, Pythagoram, Anaxagoram Clazomenium, Oenopiden Chium, Hippocratem Chium, qui lunulae quadraturam invenerit, et primus elementa con-

scripserit, Theodorum Cyrenaeum, Platonem et qui eodem fere tempore vixerit, Leodamantem Thasium, Architam Tarentinum, et Theaetetum Atheniensem. Leodamante porro iuniorem fuisse ait Neoclidem, huiusque discipulum Leonem, qui etiam elementa composuerit, et diligentior sit copia et usu eorum, quae docuerit, atque ad problemata determinationem quoque adiecerit. Leone paullo iuniorem fuisse Eudoxum Cnidium, Amiclam Heracleensem, Platonis amicum, qui theorematum generaliorum numerum auxerit, et praeter alia sectionum quoque (conicarum, ut videtur) doctrinam a Platone inchoatam, adhibita in ea quoque analysi, uberiorem reddiderit, Menaechmum, Eudoxi discipulum, pariter cum Platone versatum, eiusque fratrem Dinostratum, qui omnem geometriam ad maiorem perfectionis gradum evexerint. Theudium porro Magnesium elementa conscripsisse, et multas propositiones particulares magis universales reddidisse, Cyzicinum etiam Atheniensem eodem tempore viguisse, et hos quidem familiaritate coniunctos in Academia vixisse, et varia alterum alteri problemata proposuisse. Hermotimum deinde Colophonium, quae ab Eudoxo et Theaeteto prius edita fuerint, auxisse, et multa eorum, quae in elementis sint, (*τῶν στοιχείων πολλὰ*) invenisse, Philippum denique Metaeum (aut, ut est in Ed. Latin. Mendaeum) Platonis discipulum ab eo ad Mathesin adductum fuisse. Addit deinde, his non multo iuniorem esse Euclidem, qui elementa collegerit, et multa eorum in ordinem redegerit, quae ab Eudoxo, multa perfecerit,

quae a Theaeteto reperta fuerint. Hinc vulgo Euclides Proclo aliisque ὁ στοιχειωτὴς audit. Haud pauca etiam eorum, quae ab antiquioribus geometris leviori calamo perstricta vel pinguius demonstrata fuerint, ab eo firmissimis et omni obiectione maioribus demonstrationibus fulcita fuisse. Atque hunc ipsum summum in demonstrando rigorem, lucidumque per omnia ordinem, ac prudentem eorum, quae ad rem facere videbantur, selectum semper in Euclide admirati sunt viri rerum mathematicarum peritissimi. Notum est, Newtonum, virum divinum, doluisse, quod Cartesii aliorumque, qui calculo tantum algebraico uti sueverunt, scriptis se totum dederit, antequam Euclidis doctrina satis innutritus fuisset. Et La Grangius, Peyrardo referente, dictitare solebat, geometriae studiosum, qui non ex Euclidis Elementis geometriam hauriat, perinde facere, ac qui graeca et latina ex recentiorum scriptis addiscere velit.

Disputatum autem est, an omnia, quae hodie *Elementorum* nomine habemus, sint ad *Euclidem* auctorem referenda. Nec vero illud quaeritur, an omnia, quae in Elementis reperiuntur, ab *Euclide primum* inventa sint. Hoc enim *aliter se* habere, et multa a geometris *Euclidis aevo* superioribus, a Thalete, Pythagora, *Eudoxo*, Theaeteto, aliisque, quos ex *Proclo nominavimus*, profecta esse, non est dubium. Ea, quae ab antiquioribus illis inventa *erant*, in perfectum ordinem redegisse, lacunas *expleviss*e, solidas ubique demonstrationes *adiecisse putandus* est Euclides, atque ita satis *magna ipsi* restat gloria. Verum enim

vero fuere, qui nec hanc laudem ei integram relinquere vellent; alii contra, Euclidis famam timentes, si qua in Elementis manca videantur, quidquid minus forte perfectum deprehendunt ab alio, nescio quo, adiecta aut mutilata esse pronuntiant. Atque eos quidem iure ridet Savilius, qui propositiones Elementorum tribuunt Euclidi, demonstrationes Theoni, qui duobus fere seculis post Proclum vixit. Quasi vero ait, ullus unquam artifex suas edi voluerit conclusiones, nullis adiectis probationibus, quod nec philosophorum quisquam, nec medicorum, nedum mathematicorum fecit unquam. Nequ autem, eodem iudice, verior est Petri Rami sententia, qui (Scholia Mathematicorum Libri I. p. 37.) tam propositiones quam demonstrationes Euclidi abiudicat, universa, quae Euclidi vulgo tribuuntur, elementa geometrica Theoni attribuens, contra commune omnis antiquitatis testimonium. Agnoscit tamen Ramus aliqua sive Hippocratibae, sive Euclideae geometriae vestigia in Theone. Deceptí fuisse, qui ita iudicant, videntur titulo, quem nonnullae Elementorum editiones v. c. Basileensis praeferunt: ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν, ex Theonis Colloquiis, sive Congressibus. Observat autem Savilius, huius tituli in neutro eorum codicum qui penes ipsum erant, ullum reperiri vestigium, nec a Gregorii aut Peyrardo quidquam de eo memoratur. Antiquissima autem Zamberti versio in fronte semper habet: ex Theone graeco commentatore, interprete Bartholomaeo Zamberto. Et ipse etiam Savilius refert, in uno suorum codicum ad oram marginis adscripta

esse ad decimum tertium librum haec verba: *Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναθροίσας, ἦν ἐπὶ χρόνοις Ἀλεξάνδρου τοῦ Μακεδόνος. Θέων δὲ ὁ συντάξας αὐτὰ ἐπὶ Θεοδοσίου τοῦ βασιλέως.* ut itaque collectio elementorum Euclidi, ordinatio et dispositio Theoni tribui videatur. Addit autem: „magna certe Theonis laus, si inordinata et incomposita in ordinem redegit! Sed, ne huic incerto scholiastae fidem adiungamus, obstat, ut dixi, Procli et antiquiorum omnium auctoritas, obstat mirabilis et concinna propositionum series, ex quibus unam loco suo si eximas, tota corruat compages et structura necesse est." Rectius itaque Ioann. Buteo (de quadratura circuli libri duo, quibus adiectus est annotationum liber in errores Campani, Zamberti etc. Lugd. 1559. p. 209.) eas, quae in exemplaribus graecis sunt, demonstrationes Euclidis esse censet, non Theonis, ita tamen, ut nec ipse neget, aliquid subinde in demonstrationibus de suo additum fuisse a Theone. Nec multum ab eo discedunt Commandinus et Savilius. Commandinus quidem in prolegomenis in Elementa Euclidis verba illa: *ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν* ita intelligi posse putat, ut, dicamus, Theonem conscripsisse quidem commentarios in Elementa, sed illos temporum iniuria periisse, quemadmodum et quae in eadem Pappus Alexandrinus scripserat, conservato tamen titulo, qui postea ipsi Euclidi negligenter adiectus sit. Postea autem in eam sententiam concedit, Euclidem quidem demonstrationibus suas propositiones stabilivisse, quod vel ex Procli testimonio ad I. 10. pateat, at Theonem excellentis

ingenii virum Euclidis demonstrationes fus pleniusque explicatas in lucem protulisse, qu apud Proclum observari possit. Esse igitur monstrationes quidem Euclidis, at eo modo co scriptas, quo olim Theon, Euclidem secut eas suis discipulis explicaverit. Savilius aute non se moveri ait illo συνουσιῶν titulo in vu gatis, neque scholio illo manuscripto ince auctoris in suo codice, magis vero auctorita ipsius Theonis in Commentar. in Almagest. 50. (vide infra ad VI. 33.) Ex eo nempe lo apparere, novam Elementorum editionem (ἔκδοσιν) adornasse Theonem, in qua nonnulla a ipso adiecta sint. Quae itaque ibi de sectoribu dicantur, una cum demonstratione a verbis inde λέγω ὅτι καὶ usque ad finem, Theonis ess videri. Idemque iudicium ferendum se existi mare de multis in decimo libro lemmatiis e fortasse propositionibus nonnullis. Alexandrum certe Aphrodiseum aliquot ante Theonem seculis eam, quae quinta est decimi in nostris libris, citare pro quarta p. 87. commentariorum in priora Aristotelis, ut necesse sit aliquam ex praecedentibus, quartam sine dubio, qua sine magno incommodo sane carere potuissemus, eius tempore ab Elementorum libro abfuisse, vel saltim cum tertia coaluisse. Et quidem ultimam decimi non dubitare se assumentum esse vel Theonis, vel alterius potius antiquioris alicuius (apud Alexandrum enim exstare iisdem prope verbis), sed non ita perspicaci ingenio, utpote alieno loco positam, nullam cum praecedentibus continuationem habentem, ut sit a doctissimo Petro Montaureo rectissime animad-

versum. Ex his omnibus se concludere, sibi videri, Theonis fuisse partes in Euclide paucissimis quidem in locis interpolando, explicando, augendo, ultra has nullas. Atque in eandem sententiam plurimi deinde, non quidem illi Euclidis obtrectatores, sed amici potius ac patroni iudentes abierunt, e quibus potissimum nominandus est Rob. Simson. ita tamen, ut ad Theonem non tam gloria inde, quam potius vituperium redundet, quod nempe, ut Rob. Simson. in praefatione suae Elementorum editionis ait, ille, aut quicumque editor fuerit graeci textus, quem nunc habemus, multo plura, ac Savilius aliique viri docti existiment, et quidem in pejus mutaverit, addendo scilicet, demendo, aut sua miscendo, praesertim in libro quinto et undecimo, quos iste editor non leviter vitiaverit, e. g. substituendo breviorem at paralogisticam vice legitimae demonstrationis prop. V. 18., et ex hoc libro auferendo inter alia bonam Euclidis aut Eudoxi rationis compositae definitionem, cuius loco posuerit quintam sc. libri VI., qua neque Euclides, neque Archimedes, Apollonius aut ullus ante Theonem geometra usus fuerit, cuiusque apud illos nullum vestigium inveniatur. Plura praeterea alia in L. XI. depravata esse monet. Ab his igitur naevis praecipuos Elementorum libros vindicare se tentasse, tollendo falsa minimeque accurata, quae pro veris et genuinis accuratissimi geometrae scriptis supposuerint imperiti editores, et Euclidi restituendo, a Theone aliisve ab eo surrepta, quae per multa secula hactenus sepulta iacuerint. Quidquid sit, ne forte iniusti

simus erga Theonem, ad quem forte non solum ista culpa pertinet, sufficiet dicere, textum graecum variis locis non ita ad nos pervenisse, ut ex manu accuratissimi geometrae eum profectum esse credendum sit, plurima quidem in eo perfectissimae demonstrationis exempla esse, at haud pauca tamen temporis iniuria, aut editorum male sedulorum vitio mutilata aut luxata videri, quibus quamvis caute et circumspecte medelam afferre oporteat. Quod ultimum scopum Elementorum attinet, Proclus L. II. c. 4. sub finem asserit, Euclidem utpote Platonicae scholae amicum figurarum, quas vocant, Platonicarum, vel quinque corporum regularium constitutionem potissimum in animo habuisse.

Caeterum Euclidi alia adhuc scripta tribuuntur, e quibus geometrici argumenti sunt ea, quorum Pappus meminit Collect. Mathem. l. VII. *Data* (*Δεδομένα*) nempe ac *Porismata* (*Πορίσματα*). Et *Data* quidem ad nostram aetatem pervenerunt. *Porismata* autem, quae temporis iniuria periere, post varia aliorum minus prospera conamina Rob. Simson. denique felicissime restituere inchoavit, atque edita illa sunt in Robert. Simson. Oper. reliqu. Glasguae 1776. 4. p. 315—594. Proclus ei tribuit l. II. c. 9. adhuc librum *de Divisionibus* (*Περὶ Διαιρέσεων*), quem eundem esse nonnulli putant, quem Mahometi Bagdedino adscriptum I. Dee ex arabico latinum fecit, et Feder. Commandinus Pisauris 1570. edidit, posteaque Gregorii quoque operibus Euclidis adiunxit. Savilius tamen an is liber Euclidis sit, dubitat. Praeterea illi adhuc a quibusdam *Introductio har-*

monica (Εἰσαγωγὴ Ἁρμονικὴ) et Sectio Canonis (Κατατομὴ Κανόνος), et Phaenomena (Φαινόμενα) vid. Papp. in Prooem. ad Libr. 6. Collect. Mathem. et Philopon. ad secundum Physicorum, porro Optica et Catroptica (Ὀπτικὰ καὶ Κατοπτρικὰ) vid. Procl. Lib. II. c. 5. et a nonnullis adhuc fragmentum De Levi et Ponderoso tribuuntur, quae omnia adhuc habentur, at haud ita magni pretii sunt. Denique Pappus adhuc memorat L. VII. Locorum ad superficiem (Τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν) libros duos, qui periere pariter ac Fallaciarum liber (Τὸ Σύγγραμμα Ψευδαρίων), quem, Proclo referente, scripsisse, et in quo falsarum argumentationum fontes ac genera descripsisse videtur.

Sed redeamus ad Elementa. Horum plures exstant codices mscpti. Simon Grynaeus duobus se in iis edendis usum esse codicibus dicit, quorum alterum Lazarus Bayfius Venetiis, alterum Ioannes Ruellius amicis suis suppeditarit. Savilius pariter de duobus, qui penes ipsum sint, codicibus loquitur p. 11. At neuter suos codices accuratius descripsit. Gregorii nihil prorsus de codicibus mscptis, quorum lectionem tamen passim in margine citat, in praefatione habet. Peyrardum supra iam diximus, usum fuisse codicibus mscptis quam plurimis, e quibus summam laudem tribuit codici 190 vel a designato, qui tum e bibliotheca Vaticana Parisios delatus, postea rerum commutatione in Gallia facta, redire quidem Romam iussus est, ea tamen conditione, ut Peyrardo eum, dum suam editionem ad finem perduxisset, retinere liberum relinqueretur. Ad

huius libri manuscripti, (quem exeunte seculo nono exaratum putat) fidem plerumque textum Peyrardus conformavit, aut certe in quo discrepet ille liber a sua editione sub finem cuiusque tomi indicavit, ita, ut quidem ipse ait, ut harum lectionum variantium ope possit quis, si velit, habere mscpti 190. exemplar huic plane congruum. Reliquos codices mscptos, quos viginti tres e bibliotheca tum Imperiali conferre ipsi licuit, e quibus autem 10. *Data* tantum continent, quum ad secula multo rerecentiora referri debere, et quam plurimum inter se convenire videret, initio quidem operis saepius, postea autem haud ita multum comparasse videtur, duos, codices nempe 2373. 2762. non inter eos refert, quos comparaverit. Praeter hos libros mscptos commemorantur plures alii in variis bibliothecis obvii apud Fabricium Biblioth. Graec. curante Harless. Vol. IV. p. 48. sqq.

Renatis litteris prima operum Euclidis notitia ab Arabibus ad nos transivit. Illi enim, rerum mathematicarum inprimis studiosi eius Elementa in arabicum sermonem plus semel, ut videtur, transtulerunt, et ex una harum arabicarum interpretationum denuo latine ea vertisse Campanus vulgo dicitur. Fuisse autem plures a se diversas arabicas editiones, quae saepius ab exemplaribus graecis magis minus discederent, inde maxime patet, quod hodieque plures una a se invicem diversae passim citentur. Ita v. gr. in Bibliotheca Bodleiana Euclidis Elementorum exstant libri XIII. prio-

res arabicae per Isaac. Ibn Honein ex recensione Thebit Ibn Korae v. Fabric. Biblioth. Graec. Tom. IV. p. 51. Ibidem p. 51. in Bibl. Bodleiana citantur Euclidis Data arabice per Zin Eddin Abhari, et Elementor. libri XV. ex versione Adelardi de arabico, una cum commento magistri Campani, Novariensis. Et p. 52. in bibliotheca Collegii Universitat. Oxon.: Euclides de arte geometrica ex arabica lingua in latinam translatus per Adelardum Bathoniensem. Eadem pagina occurrit Euclides arabice per Shemseddin Mahommed Almuzi, ibidemque alii in Bibliotheca Leidensi et Escurialensi cf. ibid. p. 76. Notissima apud nos est ea, quae Arabi Nassireddino tribuitur, et Romae impressa fuit 1594. De hac editione videatur Kaestners Gesch. der Mathem. I. B. p. 367. sqq. et de Schnurrer. Biblioth. Arab. p. 458. sqq. Savilius p. 143. a Baptista Raimondo hanc editionem factam esse refert. Ex praefatione illius, quam habet de Schnurrer., patere videtur, non *Versionem* arabicam, sed *commentarium* versioni intextum esse Nassireddini opus. Caeterum plenius nomen huius Arabis aiunt esse *Khevageh* Nassireddin, Mohammed Ben Hasan, aut Ben Mohammed Al Tusi, i. e. ortum ex urbe Tus provinciae Chorasan, et floruisse seculo nostrae aerae decimo tertio. Cf. adhuc Clement. Biblioth. curieuse Tom. VIII. p. 158. Herbelot Biblioth. Orient. p. 46. et p. 665. Abulfed. Annal. Tom. V. p. 36. 37. Casiri. Bibl. Hisp. Arab. Escur. T. I. p. 187. et Kaestner. l. c. p. 373. Haec ipsa au-

tem arabica versio cum ea, quam Campanum ex arabico fecisse vulgo dicunt, non consentit, saltim in pluribus locis, ut observat Peyrardus in Praefat. Tom. II. ubi versionem Campani prop. I. 7. et eiusdem propositionis versionem gallicam ex arabico Nassireddini factam exhibet. Pariter in prop. I. 2. Nassireddinus varios, qui obtinere possunt, casus separatim habet, Campanus cum graeco consentit. Eodem modo circa parallelas Nassireddinus, ut infra videbimus, in commentario propositioni adiuncto propriam sibi demonstrationem habet, Campanus eam tantum, quae in graecis exemplaribus habetur. In theorematis etiam Pythagoraei demonstratione additae sunt in Nassireddini editione aliae a situ quadratorum ex cathetis variato petitae, ut vel e figuris adiectis patet. Pariter etiam differunt inter se in doctrina de rationibus compositis Campanus, qui definitionem, quae vulgo est VI. 5. non habet, et Nassireddinus, qui habet aliquam a vulgari illa haud multum discedentem (vid. Pfleiderer. Schol. in VI. Elem. Euclid. P. IV. p. 15.) Caeterum, quae primum typis expressa fuit Elementorum Euclidis editio latina, opera Eberhardi Radtolti Venet. 1482. fol. cuius descriptionem dedit Kaestner. Lips. 1750. 4. continet eam, quam vulgo a Campano ex arabico factam esse dicunt, versionem latinam. Scheibelius tamen (Zwey mathem. Abhandl. Breslau 1807. p. 19.) refert, in suo exemplari editionis huius rarissimae, manu editioni, ut pateat, cooeva, in margine notatum esse „liber Ele-

mentorum translatus ab Adhelardo Rothhatemensi ex ydiomate arabico in latinum sub Commento Campani Novarensis, ut itaque Campanus *commentarium* tantum in *versionem* Adhelardi scripsisse videatur. Consentire cum hac opinione videntur ea, quae supra e Fabricii Bibliothec. Graec. de versionibus arabicis, vel ex arabico factis attulimus, ubi pariter de Abelardo illo sermo est. E graeco textu autem primum latine versa prodiere Euclidis opera, edita a Barth. Zamberto Venet. 1505. fol. (Libri XIV. Elementorum latinam interpretationem a Georg. Valla factam ad 1498. habet Scheibel. Einleit. zur mathem. Bücherkenntn. 1. St. p. 2.) Ab hoc inde tempore saepius, ut et supra diximus, et quidem junctim primum 1516., nonnunquam etiam separatim, prodiit utraque Elementorum versio, Campani (ita eam vocare licet) et Zamberti, quae saepius haud leviter inter se differunt. Quam plurimas operum Euclidis et Elementorum potissimum editiones memorat Scheibel. l. c. I. St. p. 1. sqq. 5. St. p. 475. sqq. et p. 521. sqq. 9. St. p. 264. Insignem inter antiquiores locum habent editiones Feder. Commandini et Christoph. Clavii, quarum utraque etiam scholiis et commentariis illustrata ac saepius prelo repetita fuit, inter recentiores potissimum Rob. Simsonis editiones latina et anglica memorandae sunt. Reliquas omnes, quae nobis innotuerunt, aut apud alios memorantur, hic percensere longum et ab hoc loco alienum videtur. Praecipuas earum iam supra nominavimus. De reliquis praeter Schei-

belium l. c. vide in Bossii Dissertat., qua co
tenta Elementorum enunciat et simul de var
editionibus post Fabricium nonnulla disse
Lips. 1757. 4. et potissimum ipsum Fabrici
Biblioth. Graec. ed. Harles. Vol. IV. p. 53. se
In bibliothecis, ut ibidem memoratur, ex
hebraica adeo Elementorum versio.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBRI SEX PRIORES.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Ὅροι.

ά. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

DEFIN. I.

Omnis, quae a ratione suscipitur de aliqua re institutio debet a definitione proficisci, ut intelligatur, quid sit id, d quo disputetur. *Cic. de Offic.* I. 2.

Primam L. I. definitionem dudum fuere, qui reprehederem quod quid punctum non sit, dicat potius, quam quid sit. Vid Rami Schol. Mathem. L. VI. Francof. 1599. p. 141. et Savili Praelectiones in Principium Elem. Euclidis Oxon. 1620. p. 51 Nec negaverim, esse in hac observatione aliquid veri. Atqu ipse etiam Proclus fatetur Euclidem *διὰ ἀποφάσεως* i. e. *negati* explicare punctum, addens: *καὶ γὰρ οἱ ἀποφατικοὶ λόγοι πρὸς ἡκουσι ταῖς ἀρχαῖς.* Vid. Procli Commentar. in Libr. I. Euclidi Basil. 1533. p. 26., in qua excusatione Savilius quoque acqui escit. Cf. etiam Edm. Scarburgh. the English Euclide Oxfor 1705., qui p. 1. ita habet: The definition of a Point is plainl negative, and no otherwise informs us, what a Point is, tha by telling us, what 'tis not. Yet in many things, that are i nature most simple, these kinds of negative Definitions ar sufficiently instructive; though not to the Essence of the Thin defined, yet very well to the Use, that is to be made thereo So here a Point is defined by a Negation of parts. Whic Definition in respect of Magnitude, that was next to be con

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

1. Punctum est, cuius pars nulla.

nidered as divisible into parts, is instructive or preparatory to the right understanting of the Doctrine of Magnitudes, and lays down, what conception of a Point is hereafter used, or usefull in Geometry, namely *to have no parts.* Which is sufficient for the present to an Geometrician. In multis, ait, rebus simplicissimis eiusmodi definitiones negativas sufficere non quidem ad rem ipsam declarandam, attamen quo facilius usui, in quem adhibeantur, inservire possint. Ita hanc definitionem negativam puncti referri ad comparationem quantitatum, quae ex partibus compositae sint, praeparare itaque animum ad melius intelligendam doctrinam de quantitatibus, et docere, quo sensu, vel quem in usum Geometrae voce *punctum* utantur, nempe pro eo, quod non habeat partes. Quod quidem in praesentia sufficiat Geometrae.—Praeterea id quoque in Euclidis definitione vituperarunt nonnulli, quod non sit convertibilis, vel, ut aliis verbis rem enunciem, quod eadem definitio in alia plura, praeter punctum, quadret; unitatem nempe in numeris vel tempore consideratam pariter nullas partes habere. Quod etiam Proclus concedit, ac non solum punctum ait esse ἀμερές, sed tamen solum εἰς πρὸς τὴν γεωμετρικὴν ὕλην, unde Geometrae haec definitio sufficere possit. Vid. Procl. l. c. p. 26. et Savil. l. c. p. 55. Atque haec, quae inter unitatem ac punctum intercedit

β'. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.

analogia, caussa fuisse videtur, cur Proclo teste l. c. Pythagoraei punctum dicerent μονάδα προσλαβοῦσαν θέσιν, unitatem situm adsumentem. Cf. Savil. p. 60. sq. Playfair. Elements of Geometry containing the first six Books of Euclid. Edinburgh 1795. p. 347. pariter monet, haud convertibilem esse hanc definitionem, quod tamen ad naturam definitionis rite formatae pertineat; non enim ea omnia, in quibus nullae sint partes, vel quae non habeant magnitudinem, illico puncta esse. Ipse igitur definitionem hanc affert, punctum esse, quidquid positionem habeat, at non magnitudinem. Optime hac de re iudicare videtur Robertus Simsonus, qui in Anglica Elementorum versione London. 1804. p. 289. sqq. observat, definitiones 1. 2. 3. 5. 6. magis perspicuas fore, si a consideratione vel definitione corporis initio facto, ad superficiem, in qua nulla sit crassities, adeoque longitudo saltem ac latitudo considerandae veniant; a superficie ad lineam, omnis etiam latitudinis expertem, et a linea denique ad punctum descendas, quod quum nec longitudinem habeat, saltem ut terminus sive extremum lineae cogitari possit. Cf. etiam Clavii Elementa Euclidis Libr. XV. Colon. 1591. p. 1. et Borellii Euclides restitutus, Pisis 1658. p. 3. sq. Atque hac ratione evitari poterunt, quas ex Ramo, aliisque notavimus, obiectiones. Punctum nempe erit, ut in defin. 3. dicitur, πέρας τῆς γραμμῆς. Itaque definitio tertia supplet defectum primae. At hanc ipsam tertiam definitionem Savilius l. c. p 60. reprehendit, quod sit a posteriori; pariterque p. 64. similem lineae definitionem ex eadem ratione absurdam esse dicit. Recte ille quidem, si quis, haud ante explicata linea, punctum, aut, superficie haud explicata, lineam ita explicare velit. At, si Roberti Simsoni more a definitione corporis fiat initium, atquo inde ad superficiem, a superficie ad lineam, a linea denique ad punctum descendas, i. e. ab eo, quod magis compositum est, ad simplicius, pariter id licebit, atque a simplicioribus ad magis composita ascendere. Hinc etiam plures Geometrae acutissimi, v. c. e nostratibus Kaestnerus, Karstenius, Lorenzius,

2. *Linea autem longitudo non lata.*

Matthias, aliique eundem, quem Rob. Simsonus, in his explicationibus ordinem secuti sunt. Caeterum notat Savilius, quod apud Platonem, Aristotelem, aliosque veteres στιγμὴ vocetur, id apud Euclidem ac Mathematicos esse σημεῖον. Denique patet, atramento aut alio quocunque modo perfectam puncti imaginem exhiberi nunquam posse.

DEFIN. II.

Hanc quoque definitionem reprehendit Aristoteles Topic. VI., quod per negationem dividat genus. Recte tamen Savilius l. c. p. 64. monet, id saepius fieri, nec reprehendi posse, qui v. c. brutum definire velit ζῶον ἄλογον. Neque etiam, monente pariter Savilio, sola negatione constat haec definitio, ut superior puncti, quum genus habeat positivum, *longitudo*. Vel, ut Proclus ait p. 29. Τὸ μὲν σημεῖον, ὡς πάντων ἀρχὴν τῶν μεγεθῶν διὰ μόνης τῆς ἀποφάσεως ἐδίδαξε· τὴν δὲ γραμμὴν τῇ μὲν καταφατικῶς, τῇ δὲ ἀποφατικῶς· ἐστὶ μὲν γὰρ μῆκος, καὶ τούτῳ τῆς τοῦ σημείου πλεονάζει ἀμερείας· ἁπλατὴς δὲ ὡς τῶν ἄλλων καθαρεύουσα διαστάσεων. πᾶν γὰρ δὴ τὸ ἁπλατὲς καὶ ἀβαθές ἐστιν. Et vulgo etiam, ut Apollonius apud Proclum monet, lineae notionem habemus, quum itinerum longitudines metiri volumus. Tum enim neque de latitudine neque de altitudine vel profunditate viae quaeritur, sed de locorum tantum distantia. Notiones nempe *puncti, lineae*, superficiei non nisi abstractione, ut aiunt, formantur. *Caeterum* alii, eodem Proclo referente, lineam dixere esse ῥύσιν σημείου, fluxum puncti, alii μέγεθος ὑφ' ἓν διάστατον, quantitatem unicam habentem dimensionem, Savilio iudice, vere utique, sed ad naturam lineae explicandam non tam accommodate et Euclidea *definitione* minus perspicue. In definitione sexta, quae pariter pro complemento secundae haberi potest, ut defin. tertia pro complemento primae, γραμμαὶ πέρατα τῆς ἐπιφανείας esse dicuntur, et Rob. Simson. addit, dici etiam posse, lineam esse terminum communem duarum superficierum continue positarum, vel lineam dividere unam eandemque superficiem in duas partes continuas. Caeterum, ut Scarburgh. monet (the

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.

δ'. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Engl. Euclide p. 3. sqq.) linea, quamvis fluxus puncti dicatur, haud tamen consistit e punctis iuxta se positis. Quum enim singula puncta omni careant magnitudine, decem etiam millia punctorum iuxta se positorum nullam efficere possunt longitudinem; puncta itaque punctis addita nunquam lineam efficiunt, nec ulla pars lineae est punctum, sed punctorum fluxus imaginem saltem lineae continuae exhibet. Cf. Peletar. in Euclid. Elem. Geom. Demonstr. Libr. VI. 1610. p. 3.

DEFIN. III.

De hac definitione supra ad defin. 1. dictum est, esse eam quasi complementum primae. Caeterum Proclus p. 28. et ex eo Savilius p. 66. monent, esse lineas, quarum terminos exhibere non possis, v. c. lineam ex una parte finitam, ex altera infinitam, i. e. cui ex hac parte nulli fines assignentur, vel etiam lineas in se ipsas redeuntes. „Sic nimirum solet Euclides, (verba sunt Savilii) quam recte docti viderint, posita semel definitione alicuius generis, sine ulla divisione transire ad definitionem alicuius ex praecipuis speciebus, quod reliquae fortasse proposito suo minus inservirent, aut elementari institutioni non essent accommodatae. Sic hoc loco, cum posita definitione lineae consequens esset, ut lineam divideret in finitam et infinitam, omissa infinita, finitam solummodo in hac tertia definitione attingit.“ Mihi quidem videtur Euclides, omissis, quae ad rem proxime non pertinerent, dicere voluisse: si qua linea finita est, termini eius puncta appellantur. Cf. Clavius ad h. l.

DEFIN. IV.

Primum de sensu verborum: ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ὑφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται, disputatur. Proclus putat, Euclidem his verbis innuere, μόνην τὴν εὐθεῖαν ἴσον κατέχειν διάστημα τὸ

3. Lineae vero extrema, sunt puncta.

4. Recta linea est, quae ex aequo punctis in ea sitis ponitur.

(legendum τῷ) μεταξὺ τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων i. e. rectam tum ex aequo punctis in ipsa sumtis iacere, quando spatium, seu distantia inter duo eius puncta extrema aequale sit ipsi lineae. At recte monet Borellius, Euclid. restitut. p. 4., ignorari, quidnam ipsa distantia sit, neque id ab Euclide expositum esse. Clavius p. 2. lineam aequaliter inter sua puncta extendi dicit, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum aut deorsum, vel huc atque illuc deflectendo subsultet, in qua denique nihil fluxuosum reperiatur. Verum etiam haec expositio obscura videtur Borellio l. c. quod omnia illa vocabula supponant, lineam rectam iam esse cognitam, illud enim esse flexuosum, quod non sit rectum. Klügelius (Mathem. Wörterbuch Th. III. p. 447.) Euclidis verba id sibi velle putat, rectam lineam eam esse, cuius singulae partes similem formam, eundem erga se situm, habeant, in qua explicatione notio *eiusdem situs* nonnullis fortasse obscura videbitur. Alii aliter Euclidis verba explicavere. Atque haec ipsa interpretationum diversus satis indicat, non sine causa Savilium p. 77. dicere „hanc definitionem mihi liceat bona cum venia omnium interpretum tam veterum quam recentiorum non intelligere." Atque in *eundem* sensum Pfleidererus Thes. inaugur. Tub. 1782. ait: „*Definitio lineae* rectae Elem. Eucl. L. I. Def. 4. nullius est usus, ac re explicanda obscurior." Adeo, ut Savilius ait, rem maxime perspicuam perspicuè definire aliquando difficile est. *Quum nempe definitionis* negotium in eo versetur, ut rem *minus aut imperfecte* cognitam per characteres eius distinctivos *explicemus*, notasque, quibus illa ab omnibus reliquis discerni *possit, afferamus*, patet res omnium simplicissimas, quamvis omnium oculis obversantes satisque notas, vix per characteres adhuc simpliciores exprimi atque explicari posse. Omnes novimus, quid sit aerum, quid album; at quis alteri id se explicare posse, sibi persuadebit? An linea recta huc referenda

ε'. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ϛ'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

sit, equidem non dixerim. Illud tamen certum est, id ipsum quod rectum sit, adeo simplex esse, ut difficile certe sit, notionibus simplicioribus id efferre. Unde etiam tam variae linea rectae definitiones ortae esse videntur. Alii enim (atque it fere etiam definitio nostra quarta est apud Campanum) dixere lineam rectam eam esse, quae minima sit inter eosdem terminos quod ipsum etiam Archimedes non quidem ut definitionem linea rectae, at ut λαμβανόμενον ponit in Praefat. ad Libros de Sphaera et Cylindro; alii v. c., Proclo referente, Plato: cuius puncta extrema obumbrent media; alii: cuius omnes partes omnibus congruant; alii: quae una ratione inter duo puncta duci possit; alii aliter eius naturam explicare studuerunt. Maxime nobis arridet ea, quam Kraftius Geom. Sublim. p. 2. a F. C. Maiero sibi traditam exhibet, lineae rectae definitio, qua ea esse dicitur, quae circa utrumque extremum (vel etiam circa duo puncta quaecunque in ipsa sumta) tanquam polos circumvoluta situm suum non mutet, quo sensu etiam interpretari possis eam, quam Proclo referente veterum nonnulli dedere, definitionem: ἥτις τῶν περάτων μενόντων καὶ αὐτὴ μένει. Atque eodem fere sensu Austinus (An Examination of the first Books of Euclids Elements Oxford 1781. p. 2.) Euclidis definitionem intelligi debere contendit. Cf. etiam Playfair. Elem. of Geometry p. 1., 351., sq. cuius definitio eodem fere redit. Et Saccherius (Euclides ab omni naevo vindicatus Mediol. 1733. p. 71.) rectam lineam, quae ex aequo sua interiaceat puncta, ait necessario talem esse, ut circa duo illa immota extrema sua puncta non possit ipsa in alteram partem converti, v. c. a laeva parte in dextram. Ex hac definitione consequitur, per duo puncta non nisi unam rectam transire, adeoque duas rectas spatium non

5. Superficies autem est, quod longitudinem et latitudinem tantum habet.

6. Superficiei vero extrema, sunt lineae.

7. Plana superficies est, quae ex aequo rectis in ea iacet ponitur.

comprehendere, nec segmentum commune habere. Ex hac ipsa definitione etiam facile normae aut regulae, ad quam duci valent lineae rectae, examen institui poterit. Norma nempe circa se ipsam circumvoluta eidem lineae congruere debebit.

DEFIN. V.

Superficies, ut Proclus monet, dici etiam potest, terminus corporis, vel, ut Rob. Simson. addit, terminus communis duorum corporum continue positorum. Neque igitur pars corporis erit superficies, vel, ut aliter dicamus, superficies superficiei imposita nunquam corpus efficiet. Cf. dicta ad def. 2.

DEFIN. VI.

Hanc quoque definitionem ita efferre possumus: si qua superficies finita est, fines eius sunt lineae. Itaque lineae nunquam partem superficiei constituent, nec plures iuxta se positae lineae superficiem efficient.

DEFIN. VII.

In hac definitione verba ἐξ ἴσου parem atque in definitione *quarta obscuritatem* habent. Proclus quidem simili ratione haec verba *explicat* atque in definitione lineae rectae; superficiem nempe *planam* aequalem esse dicit intervallo suarum rectarum, quod *Savilio* iudice est non quidem obscurum per obscurius, sed *planum* et perspicuum per meras tenebras explicare. Clarius *aliquanto* clarius; ita ut mediae partes ab extremis sursum deorsumve *subsultando* non recedant, vel ita, ut superficies nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil *lacunosum*. Eadem tamen, quae Borellius circa similem lineae *rectae* **explicationem** monuit, hic quoque valent. Neque aequorum **explicationes** difficultatibus carent. Unde etiam alias **superficiei planae** definitiones dederunt, similes fere

ἡ. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν εἰρημένην [1]) γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

1) εἰρημένην habet Ed. Paris. ex Cod. 190. Reliquae editiones et Mss. omittunt hanc vocem, quam certe nemo desideraverit.

iis, quibus ad def. 4. rectam quoque lineam explicatam esse diximus. E quibus reliquis praeferenda videtur ea, quam Procle teste iam e veteribus quidam exhibuerunt, superficiem planam eam esse, cuius omnibus partibus recta applicari possit (ἧς πᾶσι τοῖς μέρεσιν εὐθεῖα ἐφαρμόζει), vel, ut paullo distinctius habet Rob. Simson., in qua, sumtis utcunque duobus punctis, recta linea inter illa tota sita est in ista superficie. Id ipsum etiam Euclidis definitionem dicere, contendit Austinus l. c. p. 3. et Hero Nomin. Geometr. edit. a Conr. Dasypodio, in Editione Euclidis ab ipso curata, qui ἐξ ἴσου κεῖται interpretatur: παντοίως ἐφαρμόζει. Atque hanc determinationem in Elementis Euclidis, ac nominatim L. XI. Prop. 1. 2. 3. supponi, monent Simson. et Pfleidererus l. c. p. 2. Campanus habet: Superficies plana est ab una linea ad aliam brevissima extensio, in extremitates suas eas recipiens. Caeterum notandum adhuc est, quod etiam Proclus monet, apud Platonem et Aristotelem ἐπίπεδον saepius pro ἐπιφάνεια in genere sumi, Euclidi contra superficiem *planam saltem* voce ἐπίπεδον notari. Addimus denique, omnia, quae in Element. libr. I—IV. et deinde L. VI. dicuntur, ad delineationes saltem in *superficie plana* factas referri debere, etiam ubi haec restrictio non expresse adiiciatur.

DEFIN. VIII.

Rob. Simson. monet, auctori huius definitionis id consilium fuisse videri, ut angulum sensu generaliore sumtum explicaret non eum saltem, qui a duabus rectis, verum etiam eum, qui ut nonnulli volunt, a recta et curva, vel a duabus curvis effi-

8. Planus autem angulus est in plano duarum linearum sese tangentium, et non in directum positarum, alterius ad alteram inclinatio.

9. Quando vero lineae dictum angulum continentes rectae sunt, rectilineus appellatur angulus.

cium. (Hinc etiam in defin. 9. separatim de angulo rectilineo sermo est). At verba ἐπ' εὐθείας, quae satis perspicua sint, si de duabus rectis sermo sit, vix habere sensum, quum de recta et curva aut de duabus curvis adhibeantur. Videri igitur hanc definitionem pariter ac definitionem anguli segmenti, ut et ea, quae de angulo semicirculi et segmentorum angulis habentur lib. III. Prop. 16. et 31. additamenta esse editoris minus periti. Et iam Viviamus vocem ἐκτίνεδος expungendam, et omnia ad angulos rectilineos restringenda esse putaverat. Vid. infra Excurs. ad L. III. 16. Proclus autem ad h. l. multa de variis angulorum generibus disserit, qui vel a variis curvis, vel maxime a diversis circulis, vel etiam a recta et circulo continentur. Sed ad elementa certe angulos non rectilineos haud pertinere iure pronunciat Playfair.

Ceterum ad hanc definitionem monendi fuerint tirones, magnitudinem anguli, quod et ipsa definitio innuit, non a magnitudine rectarum angulum comprehendentium (*crura* vocant), sed a mutua earum positione pendere. Punctum, in quo *crura* anguli concurrunt, *verticem* vocant.

DEFIN. IX.

De hac definitione ac praecedente iure sentit Pfleidererus (Thes. inaugur. Tub. 1784. p. 1. 2.) „Definitiones hae proprie mutam, *ad quid notio anguli spectet*, innuere, non notionem ipsam *declarare* censendae sunt: alias idem per idem, obscurum per aeque obscurum explicare iure reprehenderentur. Hinc etiam nullus earum deprehenditur usus ad propositiones de aequalitate, inaequalitate, et generatim ratione mutua ac magnitudine angulorum stabiliendas.“ Atque hoc sufficere videtur ad defendendum in hac re Euclidem contra accusationes recentiorum

ι. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ια. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ. Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

ιδ. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια· πρὸς ἣν, ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [2]) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

2) Ed. Paris. Cod. 190. vel *a*, et alii plures Codd. addunt: πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, quae verba tamen, consentientibus etiam *de Lambre* et *Prony* in relatione ad Institut. Franc. facta, pro mero eoque inutili glossemate habenda videntur, et recte in reliquis Edd. variisque Codicibus desunt.

quorundam v. c. Ohmii (Kritische Beleuchtung der Mathem. überhaupt, und der Euklid. Geom. insbesondere).

DEFIN. X. XI. XII.

Angulos deinceps positos τὰς ἐφεξῆς γωνίας Euclides appellat illos duos angulos, qui ab una linea in alteram incidente fiunt ex utraque parte lineae incidentis. Caeterum vox κλίσις in Defin. 8. monente Savilio ad angulum rectum et obtusum applicata sensu generaliore sumenda est.

DEFIN. XIII.

Distinguendum esse docet Savilius inter ὅρον terminum, et perimetrum sive ambitum figurae. In triangulo v. g. quodlibet latus per se sumtum ὅρος est, sed omnia latera simul sumta perimeter. Caeterum Savilius verba haec: ὅρος ἐστὶν etc. nullam ait habere definitionis faciem, sed vocabuli potius per

10. Quando autem recta super rectam insistens angulos deinceps aequales inter se facit, rectus est uterque aequalium angulorum: et insistens recta, perpendicularis vocatur ad eam, super quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui maior recto.

12. Acutus autem, qui minor recto.

13. Terminus est, quod alicuius est extremum.

14. Figura est, quod ab aliquo vel aliquibus terminis continetur.

15. Circulus est figura plana ab una linea contenta, quae vocatur circumferentia; ad quam ab uno puncto eorum, quae intra figuram posita sunt, cadentes omnes rectae aequales inter se sunt.

summa synonymum explicationem esse, consentiente Scarburghio, qui haec verba glossema esse putat margini primum adscriptum. Et sane, si desint, nemo ea desideraverit. Rob. Simson. hanc definitionem asterisco notavit.

DEFIN. XIV.

Notandum vocem σχῆμα *figura* ab Euclide non de figuris tantum planis, aut in superficie aliqua positis, sed, ut definitio haec innuit, de corporibus quoque adhiberi. Patet id e *definitionibus* quoque prismatum, pyramidum, conorum, aliorumque *corporum*, quae ad initium libri XI. habentur.

DEFIN. XV.

Facile *patet*, e mera rei alicuius definitione, quae tantum asserit, si quid in rerum natura sit ita comparatum, ut in definitione *dictum* erat, id hoc illove nomine designandum esse, (quas *definitiones* veteres logici *nominales* vocarunt) haud consequi, dari aut possibilem certe esse eiusmodi rem. Fieri enim *potest*, ut, re haud satis pensitata, *ἀδύνατα* quoque in definitione coniungantur, v. c. si quis circuli, quadrati, aut trianguli circulo non inscriptibilis definitionem dare velit. Reapse qui *esse tales figuras* etc., quales in aliqua eius generis definitione *describuntur*, nisi res per se pateat, tum demum scire

ι. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ια. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ. Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

ιδ. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια· πρὸς ἣν, ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [2]) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

2) Ed. Paris. Cod. 190. vel *a*, et alii plures Codd. addunt: πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, quae verba tamen, consentientibus etiam *de Lambre* et *Prony* in relatione ad Institut. Franc. facta, pro mero eoque inutili glossemate habenda videntur, et recte in reliquis Edd. variisque Codicibus desunt.

quorundam v. c. Ohmii (Kritische Beleuchtung der Mathem. überhaupt, und der Euklid. Geom. insbesondere).

DEFIN. X. XI. XII.

Angulos deinceps positos τὰς ἐφεξῆς γωνίας Euclides appellat illos duos angulos, qui ab una linea in alteram incidente fiunt ex utraque parte lineae incidentis. Caeterum vox κλίσις in Defin. 8. monente Savilio ad angulum rectum et obtusum applicata sensu generaliore sumenda est.

DEFIN. XIII.

Distinguendum esse docet Savilius inter ὅρον terminum, et perimetrum sive ambitum figurae. In triangulo v. g. quodlibet latus per se sumtum ὅρος est, sed omnia latera simul sumta perimeter. Caeterum Savilius verba haec: ὅρος ἐστὶν etc. nullam ait habere definitionis faciem, sed vocabuli potius per

10. Quando autem recta super rectam insistens angulos deinceps aequales inter se facit, rectus est uterque aequalium angulorum: et insistens recta, perpendicularis vocatur ad eam, super quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui maior recto.

12. Acutus autem, qui minor recto.

13. Terminus est, quod alicuius est extremum.

14. Figura est, quod ab aliquo vel aliquibus terminis continetur.

15. Circulus est figura plana ab una linea contenta, quae vocatur circumferentia; ad quam ab uno puncto eorum, quae intra figuram posita sunt, cadentes omnes rectae aequales inter se sunt.

rum synonymum explicationem esse, consentiente Scarburghio, qui haec verba glossema esse putat margini primum adscriptum. Et sane, si desint, nemo ea desideraverit. Rob. Simson. hanc definitionem asterisco notavit.

DEFIN. XIV.

Notandam vocem σχῆμα *figura* ab Euclide non de figuris tantum planis, aut in superficie aliqua positis, sed, ut definitio haec innuit, de corporibus quoque adhiberi. Patet id e *definitionibus* quoque prismatum, pyramidum, conorum, aliorumque corporum, quae ad initium libri XI. habentur.

DEFIN. XV.

Facile patet, e mera rei alicuius definitione, quae tantum esset, si quid in rerum natura sit ita comparatum, ut in definitione dictum erat, id hoc illove nomine designandum esse, (quas *definitiones* veteres logici *nominales* vocarunt) haud consequi, dari aut possibilem certe esse eiusmodi rem. Fieri enim potest, ut, re haud satis pensitata, δύνατα quoque in definitione coniungantur, v. c. si quis circuli, quadrati, aut triangulí circulo non inscriptibilis definitionem dare velit. Reapse igitur esse tales figuras etc., quales in aliqua eius generis definitione describuntur, nisi res per se pateat, tum demum scire

ιε΄. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη΄. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

poterimus, quum ostensum fuerit, qua ratione eius generis figurae fieri possint. Quod etiam ab Euclide plerumque factum esse videmus. Quodsi possibilitas rei per se pateat, tum etiam definitio ita strui poterit, ut rationem, qua res fieri possit indicet. Eius generis definitiones logici *geneticas*, veteres etiam *reales*, recentiores *syntheticas* vocant. Euclidis circuli definitio quum nominalis tantum sit, possibilitas rei non inde derivari poterat, verum in postulatis sumebatur. Neque vero eapropter Euclides reprehendendus est, ut pluribus ostendit Scarburgh. ad h. l. Poterat vero etiam definitio exhiberi genetica vel synthetica ita fere: Quodsi recta quaecunque circa alterum punctum extremum in eodem plano gyretur, dum in pristinum situm redeat, spatium, quod illa recta percurrit, circulus et linea ab altero extremo rectae revolutae descripta circumferentia vocabitur, ubi facile patet, nihil in definitione sumi, quod non facile effici queat. Unde etiam consequitur, quodvis circumferentiae punctum a puncto illo, circa quod recta circumferebatur, aeque distare, atque illud punctum, quod centrum vocant, intra circulum situm esse. Ac fateor, me non videre, quo iure Scarburghius tam acerbe perstringat Borellium aliosque, qui genetica hac definitione uti maluerint. Caeterum rectae, quae ex centro ad punctum aliquod circumferentiae ducuntur, hodie plerumque apud geometras radii, apud Euclidem simpliciter rectae ex centro, αἱ ἐκ τοῦ κέντρου, libr. III. Def. 1. et Prop. 26. vocantur. Ubi de circulis describendis agitur, vox διάστημα adhibetur, quae minus

16. Hoc autem punctum centrum circuli vocatur.

17. Diameter vero circuli est recta quaedam per centrum ducta, et terminata ex utraque parte a circuli circumferentia; quae et bifariam secat circulum.

18. Semicirculus vero est figura contenta a diametro, et ea circuli circumferentia, quae a diametro intercipitur.

accurata videri potest, quum rectam lineam brevissimam esse inter duo puncta supponat, cuius rei in Elementis nulla occurrit mentio, et casus tantum singularis L. I. 20. demonstratur. Nonnunquam circuli nomine circumferentiam quoque vel peripheriam denotant. Rectius tamen illae nomine etiam distinguuntur. Pariter partes circumferentiae, quas vulgo, verosimiliter secundum Arabes (cf. Campani III. Def. 7.) arcus vocamus, Euclides semper peripherias vocat. Vid. Pfleiderer. in Hauberi Chrestom. Geometr. p. 284.

DEFIN. XVII. XVIII.

Verba: ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον, quae praevie tantum definitionis 18. gratia adiuncta esse censeri debent, haud esse partem definitionis, sed ex definitione consequi monet Rob. Simson. Et Scarburghius quidem glossema Elementis assutum esse putat. Quidquid sit, hanc definitionis consequentiam, tum quoad circumferentiam, quam quoad superficiem circuli demonstrari oportebat, quod Thaletem fecisse Proclus refert, superiore circuli parte inferiori superposita. Cf. infra Obs. ad III. Def. 1. Idem etiam probari posse e libri tertii propositionibus 31. 23. 24. monent Simson. et Pfleiderer. (Theo. mangur. Tab. 1784. p. 4.), qui addit, ita demum a subreptionis vitio liberari sequentem definitionem 18. Pariter ostendi potest, valere etiam conversam, nempe rectam, quae circulum etiam dividat, per centrum transire, adeoque reliquas, quae circulum secent, nec per centrum transeant, rectas eum in inaequalia segmenta dividere, et vice versa. In Procli commen-

ιθ'. Τμῆμα κύκλου [1]) ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας [ἢ μείζονος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου].

κ'. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

κά. Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

κβ'. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

κγ'. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κδ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

κέ. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

1) Definitionem hanc segmenti circuli habent quidem libri mss. et editiones Graecae omnes, unde nec nos eam delere voluimus. At, quum eadem ut L. III. Def. 6. recurrat ex Buteonis, Savilii et Scarburghii sententia eam pro spuria habendam putamus. Semicirculi mentio in definitione antecedente facta huic additamento ortum dedisse videtur. Procl. Commentarius eam non habet, nisi quod in Commentario ad definitionem praecedentem eiusmodi aliquid ab initio adiicit. Verba sub finem addita, quae uncis inclusimus, eo magis suspecta sunt, quod non tantum in editionibus Basil. et Oxon. et Codice Peyrardi f, sed etiam L. III. Def. 6. desunt. Et L. III. Prop. 23. 24. 25. 33. 34. τμῆμα semicirculum quoque comprehendit. Baermannus hanc definitionem omisit: hinc eae, quae sequuntur, apud eum numero minore designantur. Rob. Simson. quoque asterisco eam notavit.

tario definitioni 18. additur; κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν, semicirculi centrum idem est, quod et circuli. Ad quae verba iure monet Scarburghius, magis proprie dici posse, semicircumferentiae idem centrum esse, quod circuli. Semicirculo enim centrum proprie tribui nequit. Caeterum haec verba, quum in libris mss. Elementorum, ut et Savilius observat, haud legantur, spuria sine dubio esse, aut forte observationem saltem a Proclo factam continere Scarburghius putat.

19. Segmentum circuli est figura contenta recta circuli circumferentia [vel maiore vel minore semicirculo].

20. Figurae rectilineae sunt, quae a rectis continentur.

21. Trilaterae quidem, quae a tribus.

22. Quadrilaterae autem, quae a quatuor.

23. Multilaterae vero, quae a pluribus quam quatuor rectis continentur.

24. Trilaterarum autem figurarum aequilaterum quidem triangulum est, quod tria aequalia habet latera.

25. Isosceles (aequicrurum) vero, quod duo solum aequalia habet latera.

DEFIN. XX. XXI. XXII. XXIII.

Addi potest, rectas, quae figuras istas continent, latera figurae vocari, et omnes simul ambitum vel perimetrum figurae constituere, spatium autem ab iis comprehensum aream appellari. Quae in figuris plurium quam trium laterum vertices duorum angulorum eidem lateri non adiacentium coniungunt, *Diagonales* vel Diametri figurae audiunt. Figurae, quae omnia latera aequalia, et omnes etiam angulos aequales habent, regulares, reliquae irregulares vocantur. Sin autem latera tantum sint aut considerentur ut aequalia, figura aequilatera; si anguli tantum, figura aequiangula audiet. Vid. Pfleiderer. in Haberi Chrest. Geometr. p. 284. sq.

DEFIN. XXV.

Addi potest, in triangulo isosceli aequalia latera crura, *aequum basin* vocari. In aliis etiam triangulis tertium latus, quando a reliquis distinguitur, basis vocatur. Generatim trianguli ac cuiusvis figurae rectilineae basis vocatur illud latus, ex quo figura constituta concipitur. Vide Pfleiderer. in Haberi Chrest. Geometr. p. 285.

κς'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κζ'. Ἔτι τε, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

κη'. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

κθ'. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον.

λά. Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

λβ'. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

λγ'. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

DEFIN. XXVI.

Σκαληνὸν, quod Hesychius interpretatur: σκολιὸν, *tortuosum*, melius a σκάζω, *claudico*, derivatur, quod, ut Proclus ait p. 47. triangulum scalenum πανταχόθεν χωλεύει. Caeterum addi potest, in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, Hypotenusam, reliqua autem latera, quae angulum rectum comprehendunt, Cathetos appellari.

DEFIN. XXX. XXXI. XXXII. XXXIII.

Has definitiones Pfleidererus observat l. c. Th. 2. quamvis superabundantes, vitiosas non esse. Superabundantes nempe sunt. Continent quippe plures notas, quam quae ad rem discernendam sufficiant. Ita v. c. satis erat dicere, quadratum esse figuram quadrilateram aequilateram, in qua unum saltem angulum rectum esse constet. Omnes enim rectos esse, facile inde probari poterat. Pariter de rhomboïde monet Simson., satis fuisse dicere, esse figuram quadrilateram, quae habeat

26. Scalenum autem, quod tria inaequalia habet latera.

27. Insuper trilaterarum figurarum rectangulum quidem triangulum est, quod habet angulum rectum.

28. Obtusangulum autem, quod habet angulum obtusum.

29. Acutangulum vero, quod habet tres angulos acutos.

30. Quadrilaterarum autem figurarum quadratum quidem est, quod et aequilaterum est et rectangulum.

31. Oblongum autem, quod rectangulum quidem, non vero aequilaterum.

32. Rhombus vero, quod aequilaterum quidem, non vero rectangulum.

33. Rhomboïdes autem, quod et opposita latera et angulos aequalia inter se habet, quod neque aequilaterum est, nec rectangulum.

latera opposita aequalia, quod nempe angulorum oppositorum aequalitas inde sponte fluat, et vice versa. Nihil tamen falsi continent hae propositiones, quamvis plus ac necessarium erat, efferam. Denique liceat observare, in his et nonnullis praecedentibus definitionibus idem valere, quod de definitione circuli monuimus, possibilitatem rei ex sola definitione nequaquam inferri posse. Omnes etiam has figuras in eodem plano positas intelligi, diximus ad defin. 7. Proclus monet, τετράπλευρον, quod proprie omnes figuras quadrilateras comprehendat, tamen de sola figura quadrilatera aequilatera et rectangula dici. Vocem ῥόμβος Proclus a verbo ῥομβέω, in circulum urgeo, derivat, quod sit quadratum quasi distortum, nisi fine verius ῥομβέω a ῥόμβος derivandum est. Est nempe ῥόμβος (rhombus solidus) proprie conus rectus duplex, ex utraque parte eiusdem basis, eadem utrimque altitudine constans, quem tanquam turbinem vel trochum in circulum

λδ'. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια ε
λείσθω.

λέ. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵ τινες ἐν τῷ αὐ
ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον
ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλο

agere possis. Tale deinde corpus si a plano per coni v
tices transeunte secetur, existet in plano a turbine secto figu
quem rhombum (rhombum planum) vocant mathemat
Savilius contra a rhombo plano rhombum solidum denoi
nationem accepisse putat. Oblongum, sive rectangulum, cu
unum latus est recta A, alterum ei contiguum recta B, l
nota: A×B designare solent, cuius rei ratio infra patebit.

DEFIN. XXXIV.

Figurarum, quas Euclides trapezia vocat, tres spec
facit Proclus. Vel enim duo saltem latera habent paralle
et rectas haec latera iungentes aequales — atque haec quide
Proclus trapezia aequicrura vocat — vel duo quidem lat
parallela habent, at rectas ea iungentes inaequales, quae tr
pezia scalena vocat Proclus; vel nullum latus alteri parallelu
habent, et tum Proclo trapezoïdea audiunt.

DEFIN. XXXV.

Circa hanc definitionem nonnulli recentiores Mathemati
(v. c. Hauff., Hoffmann., Lüdicke., aliique) id potissimu
desiderarunt, quod negative tantum expressa sit, vel conci
sum rectarum parallelarum neget. At recte contra mon
Müller. (ausführl. und evidente Theorie der Parallellinie
Nürnb. 1819. p. 22.) facile idem prorsus ita exprimi poss
rectae parallelae dicuntur, quae in eodem plano ita sitae sun
ut quousque continuentur semper omnia unius puncta sint
eadem parte alterius. Proclus ad hanc definitionem refer
Posidonium rectas parallelas dixisse eas esse, quae, quum i
eodem sint plano, neque convergant, neque divergant, se
ita positae sint, ut omnes ex una earum in alteram demiss
perpendiculares sint inter se aequales. Quae ipsa definitio ali
quoque placuit. Involvere tamen ea videtur, rectarum ea

34. Reliqua autem quadrilatera trapezia vocentur.

35. Parallelae rectae sunt, quae in eodem plano sitae, et productae in infinitum ad utramque partem, in utram sibi coincidunt.

...nam esse, ut situm habere possint, in quo perpendiculares ex una in alteram demissae aequales sint, quod ipsum ante demonstrari debere videtur, vel, ut aliter dicamus, involvit, ...eam, e qua omnes in rectam aliquam demissae perpendiculares aequales sint, etiam ipsam rectam esse. Alii ita: si in duas in eodem plano sitas rectas alia recta incidat, quae angulum externum aequalem faciat interno ad easdem partes posito, duae istae rectae parallelae erunt, ubi probandum erit, rectas, quae ab una recta hac ratione secantur, etiam ab aliis, quibus secantur, rectis eodem modo secari. Conf. Klügel. Mathem. Wörterbuch ad vocem: *Parallelen.*

Praeter 35., quas Euclides habet, definitiones, duas addendas putat Clavius (quas etiam Henrion. et Barrov. in sua Elementorum editione subiunxerunt) unam nempe 36. (quam iam Candalla habet) qua figuras quadrilateras, quarum bina opposita latera sunt inter se parallela, parallelogramma vocari docetur, alteram 37. qua indicetur, quid sint parallelogrammorum complementa circa diametrum, de quibus prop. 43. 44. sermo est. Et definitionem parallelogrammorum quidem haud cum Scarburghio ad I. 33. et 34. pro superflua habere possumus. Quamvis enim parallelogrammum non sit nova figurae species, sed, ut infra videbimus, tantum figuras I. 30—33. explicatas comprehendat, iuvat tamen exponere, quid generali hoc nomine intelligi velimus, nec definitio inutilis semper, novum aliquid, de quo ante plane non sermo fuerit, indicari. Parallelogrammorum complementa autem quid sint, melius intelligetur, postquam de rectis parallelis actum fuerit. Confer itaque dicta ad I. 43. Quin aliquot etiam Euclidis definitionum, ut Savilius monet, exiguum usum habendum est, ut in magna domo multa supellex, quae ...litur, ut loquitur ille cascus (Naevius), *emitur tamen.*

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

ά. Ἠτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖ εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας κα τὸ συνεχὲς ἐκβάλλειν.

γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γρ φεσθαι.

POSTULATA.

Postulata et Axiomata illud, ut Proclus l. III. p. 50. a commune habent, ut nulla egeant demonstratione, per fidem faciant, et consequentium fiant principia. In eo ve ex Gemini sententia, quem postea fere omnes secuti sun differunt, quòd postulata quidem aliquid efficere iubear quod habeat facilem et cuivis obviam constructionem, axi mata contra aliquid verum esse asserant, de quo nemo, q verborum sensum probe intellexit, dubitare potest. Math matici autem postulata pariter atque axiomata volunt es quam paucissima, ne quid forte ut effectu facile immisceati quod quomodo fieri possit, non omnibus pateat, aut pro cer aliquid sumatur, quod dubium adhuc esse possit. Aut, Barrov. ait (*Lect. Mathem.* 1664. Lect. IV. p. 66.) „Axi mata praemittunt Mathematici paucissima; parcissime quidv petunt, adsumunt aut praesupponunt. Est enim tenerrim frontis et stomachi robustissimi, pudentissimum genus h minum et taedii patientissimum. Quemvis concoquere malu laborem in dictis suis demonstrandis, quam assensum gratuitu emendicare, vel nimiam auditorum liberalitatem experiri. Pr prii ratiocinii virtuti, non alienae facilitati, deberi volunt co clusionum suarum evidentiam et firmitatem. Per longas an bages morosius ac prolixius aliquas propositiones, alioqu facillimas, deducere satagunt, eo quod a multiplicando post latorum et axiomatum numero vehementer abhorreant.“ A dit deinde Barrov. sine ratione Ramum (cum quo etia recentiores nonnulli faciunt) Euclidem acriter reprehendiss

POSTULATA.

1. Postuletur, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere.

2. Et finitam rectam in directum continuo producere.

3. Et omni centro et intervallo circulum describere.

quod is plurimas propositiones susceperit demonstrandas, quas ex Rami sententia satius fuisset, ceu sua luce claras arripere, indemonstratas anticipare, in axiomatum censum referre: in quo omnes harum rerum intelligentes consentientes habebit Barrow.

Ad postulatum primum monet Scarburgh., mente tantum ductum concipi rectam ab uno puncto ad alterum, et generatim ea omnia, quae sive in postulatis, sive in problematibus fieri iubeant mathematici, imaginatione saltem ita effecta concipienda esse, neque manualem litterarum ductum, qui semper imperfectus sit, ad veritatem mathematicam intelligendam requiri, figuras tamen manu factas imaginationi succurrere, unde semper regulae et circini usum hactenus permissum sibi putarint geometrae.

Quodsi postulata eo sensu sumantur, quo, Proclo teste, Geminus ea sumenda putavit, manifestum est, quod et Proclus asserit, id, quod pro quarto postulato quidam habuere (Campano est postulatum tertium, quod nempe duo prima in unum contrahit), nempe omnes angulos rectos inter se aequales esse, pariter atque id, quod quintum esse voluerunt, nempe rectas, in quas incidens alia recta faciat angulos internos minores duobus rectis, si opus sit, productas concurrere, neutiquam ad postulata referri debere (cf. Müller ausführl. und evidente Theorie der Parallellinien Nürnb. 1819. p. 4. sqq.), nec magis illud, duas rectas spatium non comprehendere, huc pertinere. Quum tamen Proclus testetur, sua iam aetate plures has propositiones inter postulata retulisse, et codices etiam mss., quos Pey-

δ'. Καὶ πάσας [1]) τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖά τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς [καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας [2]) τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

ϛ'. Καὶ δύο εὐθείας [3]) χωρίον μὴ περιέχειν.

1. πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Ita in axiom. legunt edit. Basil. e Oxon.

2. ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπίπτε σοῦνται ἀλλήλαις. Ita in axiom. legunt ed. Basil. et Oxon.

3. δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι. Ita in axiom. haben codd. Peyrardi d. f. h. k. l. m. n. et editiones Basil. e Oxon. Caeterum, ut Peyrardus observat, in quibusdam codd. haec propositio tam in postulatis, quam in axiomatibus habetur.

rardus contulit, omnes postulatum quartum et quintum, nonnulli etiam sextum habeant (editiones tamen Basil. et Oxon. ea inter axiomata referunt); quum in primis ex Arabico aut Graeco factis versionibus Latinis Elementorum Campani (ut vulgo volunt), Zamberti, Commandini quinque postulata habeantur; quum in aliis etiam antiquis scriptoribus, qui Euclidis postulata retulere, v. g. Censorino, Martiano Capella, Boëthio pariter quinque illa postulata enumerentur (conf. *Zwey mathematische Abhandlungen von Scheibel, Breslau* 1807. p. 17. sqq.), necesse est, postulata ab illis alio sensu sumta fuisse. Ac reapse Proclus ait, hypotheses, postulata, axiomata alios alio sensu dixisse, et nominatim nonnullos omnia, quae ad Geometriam speciatim pertinerent, inter postulata, reliqua, quae omnibus disciplinis mathematicis communia essent (cf. Schwab. Commentat. in Euclid. Lib. I. §. 31.) inter axiomata retulisse, quo tamen axioma octavum non quadrat. Atque hi quidem decepti fuisse videntur titulo: κοιναὶ ἔννοιαι, quem ita interpretabantur, ut notiones pluribus

4. (Aliis: Axioma 10.) Et omnes angulos rectos aequales inter se esse.

5. (Aliis: Axioma 11.) Et si in duas rectas recta quaedam incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, productas illas duas rectas in infinitum sibi coincidere, ad quas partes sunt anguli duobus rectis minores.

6. (Aliis: Axioma 12.) Et duas rectas spatium non continere.

mathematicis disciplinis communes intelligerent, quem sensum etiam Scheibel. l. c. tuetur. Wallisius etiam (Oper. Mathem. T. II. p. 667. sq.) cum hac opinione facit. Nos locum quidem, quem in mssis habent, mutare noluimus, at, consentientibus viris doctissimis, Barrov., Rob. Simson., aliisque plurimis, rectius ea axiomatibus, et ne his quidem omnia accenseri putamus. Nempe postulatum quartum, aut, ut alii volunt, axioma decimum, omnes angulos rectos aequales esse, demonstratione egere, nec pro axiomate, multo minus pro postulato sumi posse, dudum monuere viri docti, nominatim Pfleiderer. Thes. inaugur. Tub. 1784. Thes. 4. Demonstrationem propositionis satis facilem, uno nempe angulo recto alteri superposito, exhibet Proclus p. 53. (Cf. Schwab. in Euclid. lib. I. §. 35.). Unde consequitur, constantis esse magnitudinis angulum rectum, adeoque pro mensura reliquorum sumi posse. Vid. Pfleiderer. in Hauberi Chrestom. Geom. p. 306.

De postulato quinto, aliis axiomate undecimo, ad El. I. 29. et in Excursu ad eam propositionem fusius dicetur. Unum monemus Pelotarium in Elem. Geom. satis perverse hoc axioma adeo inter definitiones referre voluisse; esse enim ait definitionem linearum non parallelarum. Postulatum 6. vel, ut aliis est, Axioma 12. quod nempe duae rectae spatium non comprehendant, ex notione lineae rectae a Maiero explicata consequi diximus ad definitionem quartam. Et recte

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

α΄. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β΄. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ΄. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

Playfair. observat, hoc axioma supplere apud Euclidem defectum definitionis rectae, quae certe haud perspicua sit, nec usquam adhibeatur, quum hoc potius axiomate demonstrationes, quae huc pertineant, nitantur.

ΑΧΙΟΜΑΤΑ.

Axiomata, quae et κοιναὶ ἔννοιαι, *communes notiones*, vocantur, quod, ut Savilius ait, omnium mentibus quasi insita et innata sit eorum notitia, nulla egere demonstratione diximus, vel ita perspicua esse debere, ut nemo, qui verborum sensum intellexerit, de veritate asserti dubitare possit. Neque tamen propterea, monente Barrowio Lect. Mathem. Lect. VII. p. 115. putandum est, ea simpliciter ἀναπόδεικτα esse, omninoque demonstrari non posse. „Sic enim, Barrov. addit, paucissima vel nulla cujuslibet particularis scientiae pronunciata possent haberi vel appellari principia. Eo enim propendeo, ut existimem, praeter unicum illud omnis ratiocinii fundamentum: *contradictoriae propositiones nequeunt esse simul verae vel simul falsae*, nullum aliud dari simpliciter indemonstrabile axioma. Saltem particularium scientiarum principia nedum possunt, at etiam debent, si poscat discipulus, a magistro demonstrari. Tenetur enim, sua munia si probe exequi velit, et nomen suum implere, scientiae praemonstrator omnem a studioso rationabilem (ita cum barbaris loqui liceat) scrupulum eximere; ergo sua, quae adsumit, principia, si obscura sint, exemplis illustrare, si dubia,

NOTIONES COMMUNES, SEU AXIOMATA.

1. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia.

2. Et si aequalibus aequalia addantur, tota sunt aequalia.

3. Et si ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt aequalia.

confirmare debet (ut res fere et subiecta materia patietur) ex aliis notionibus et magis indubitatis principiis ad ipsa usque omnium prima principia, si opus sit, idque petet studiosus, discursum promovendo. Sin nulla compareant talia, veritatem axiomatum geometricorum ostendet per definitiones terminorum; ut si quis ambigat de eo, an totum sua parte sit maius; si nullum reperiatur in metaphysicis theorema vel axioma certius, evidentius, simplicius illo, per quod ostendatur, recurrendum est ad definitiones totius et partis, maioris ac minoris, e quibus recte positis haud difficile fuerit illud axioma demonstrare. Pariterque se res habet in reliquis." Quamvis igitur Euclidis axiomata, quae omnia defectui definitionum accuratarum, notionum simplicium aequalitatis, inaequalitatis, lineae rectae etc. supplendo destinatae esse censendae sunt (conf. Wolf. de methodo mathem. brevis commentatio Elem. Mathem. Tom. 1. p. 7.) eam evidentiam habere videantur, ut in iis acquiescere possimus, nec ulteriorem demonstrationem requiramus, reprehendendi tamen non sunt, qui subtilius omnia rimati ad simpliciora adhuc principia progredi tentarunt, quin probandi, si reapse simpliciora atque evidentiora sint principia, quibus suas demonstrationes superstruunt. Ita Proclus refert, Apollonium primum Euclidis axioma: *Quae eidem aequalia sunt, aequalia sunt inter se*, demonstrare conatum esse, sumto 1) ea, quae eundem locum occupent, inter se aequalia esse; 2) quae eundem locum occupent, et aliquid tertium, inter se eundem locum occupare. Haec ipsa tamen supposita Euclideis haud certiora, forte etiam

δ. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

ε. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

obscuriora esse, nec in omnes omnis generis quantitates quadrare monuerunt Proclus et Savilius. Sano tamen sensu Apollonii enunciatum sumi, atque ita reliqua fere omnia Euclidis axiomata ex axiomate 8. derivari posse, iure existimat Austin. p. 8. et Hauber. Chrest. Geometr. p. 130. Generatim etiam certum est, axiomata, quae Euclides habet, alia ab aliis pendere, ita ut, sumto uno, legitima demonstratione inde deduci possit alterum, v. c. sextum e primo (cf. Schwab. Commentat. in prim. Elem. Euclidis librum §. 32. et alibi, et Pfleiderer. in Hauberi Chrestom. Geom. p. 289. sqq. Garz. allgemeine Grössenlehre Halle 1820. p. 13. sqq.) ac 7. prima axiomata aliquanto generalius ac brevius ita efferri posse: *Aequalia si aequales variationes subeant, aequalia erunt, quae inde nascentur. Aequalia autem si inaequales, aut inaequalia si aequales variationes subeant, inaequalia inde nascentur.* Distinctius autem et scopo Euclidis accommodatius erat, singulas, quae in censum veniunt, variationes nominatim ac a reliquis separatim recensere. Axiomati 5. addi poterat, ut Clavius monet, aliud ei simile axioma: *Si ab aequalibus auferantur inaequalia, reliqua sunt inaequalia.* Pari ratione axiomati 4. aliud simile addere nihil attinet. Facile enim patet, si quis dixerit: si aequalibus inaequalia addantur, tota esse inaequalia, idem illum dicere, quod in axiomate 4. enunciatur. Sextum etiam et septimum axioma generalius admittunt enunciatum in hunc fere modum: *Quorum aeque multipla aut aeque submultipla aequalia sunt, sunt inter se aequalia.* At Euclidis scopo sufficiebant dupla et dimidia. Ad axioma 8. monet Savilius, distinxisse Geometras inter ἐφαρμόζειν et ἐφαρμόζεσθαι. Illud nempe dici de superpositis, quae perfecte congruant, hoc de superpositis, quae quoque modo coaptentur, id quod ex demonstratione Lib. I. prop. 4. patere arbitratur. Ipse tamen fatetur,

4. Et si inaequalibus aequalia addantur, tota sunt inaequalia.

5. Et si ab inaequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt inaequalia.

in Lib. I. prop. 8. id discrimen haud ita accurate observari, nisi forte incuria librariorum ἐφαρμοζομένης positum sit pro ἐφαρμοσούσης. Caeterum huius axiomatis ad sequentia applicationes supponunt, tanquam ex communi notione superficiei planae notum, planum ita posse plano applicari, ut secundum omnem suam extensionem cum illo coincidat. (Pfleiderer. in Hauberi *Chrest.* Geom. p. 293.) Conversam quoque huius axiomatis verum esse, ait Clavius, in quo tamen Savilio monente errat. Vera nempe est conversa, si de lineis rectis et angulis rectilineis sermo sit, at non de aliis quibuscunque quantitatibus, nisi forte etiam hic distinguere velis inter ἐφαρμόζειν et ἐφαρμόζεσθαι. Tum dicere possis: Quae inter se aequalia sunt, sibi quoquo modo coaptari possunt (ἐφαρμόζονται) at non semper perfecte congruunt (ἐφαρμόζουσι). Verum etiam ita propositio erit non perfecte conversa axiomatis 8. Rectas autem omnes inter se aequales etiam sibi mutuo congruere, idemque de angulis rectilineis valere, in sequentibus, praesertim 4. et 8. libri I. supponitur, et demonstrari etiam potest, dummodo postulatum 6. in nostra editione, nempe duas rectas spatium non includere pro axiomate sumas, atque ita demonstravit Savilius p. 152.

In axiom. 9. addi potest monente Savilio: *Totum aequale est omnibus suis partibus simul sumtis.* Apud Barrovium et Clavium (qui etiam nonnullis praecedentibus axiomatibus aliqua *consectaria* per se perspicua addit) post axioma 9. inseruntur duo alia huius sententiae:

10. a. *Duae rectae segmentum commune non habent.* Hoc axioma certe in l. XI. prop. 1. supponi videtur. Rob. Simson. quidem monet, ex l. I. prop. 11. illud derivari posse. At, id quoque concedatur, de quo tamen ambigi posse videtur, non tamen axioma, quod caeterum ex Maieri definitione

ϛ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ζ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

η'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν.

lineae rectae consequi supra diximus, iam in accuratiore demonstratione l. I. prop. 1. supponitur (vid. Proclus p. 59. et Savil. ad prop. 1. p. 173.), pariterque in demonstratione I. 4. et I. 8. monente Pfleiderero Thes. inaugur. 1787. Thes. 4. unde rectius hoc assertum pro axiomate sumseris.

11. a. *Duae rectae in uno puncto concurrentes, si producantur ambae, necessario se mutuo in eo puncto secabunt.* Quo vix opus esse videtur. Nostra deinde postul. 4. 5. 6. vel axiom. 10. 11. 12. sunt apud Clavium 12. 13. 14. Alia quaedam axiomata Clavius, Henrion., Barrov., Baermann. aliique addidere, quibus tamen nos facile carituros putem. At forte non inepte addi possunt ea, quae sequuntur:

Ax. 13. *Recta, cuius pars intra spatium limitibus undequaque circumscriptum i. e. intra figuram aliquam sita est (vel quae in plano figurae per punctum aliquod intra figuram ducitur) ex utraque parte producta figuram istam in duobus minimum punctis secabit.*

Ax. 14. *Duae figurae, in eodem plano descriptae, quarum una punctum aliquod intra alteram, aliud autem punctum extra eam situm habet, necessario se invicem secabunt.*

Ax. 15. *Si a puncto ex una parte rectae alicuius infinitae sito ad punctum ex altera parte situm ducatur recta aliqua, duae hae rectae necessario se in puncto aliquo secabunt.*

(Pfleiderer. in Hauberi Chrestom. Geom. p. 295. sq. et Lorenz. erster Cursus der reinen Mathem. Geometr. §.

6. Et quae eiusdem duplicia, aequalia inter se sunt.
7. Et quae eiusdem dimidia, aequalia inter se sunt.
8. Et quae congruunt inter se, aequalia inter se sunt.
9. Et totum parte maius est.

14. sqq.) Caeterum ut supra iam monuimus, fuerunt a Euclide iuniore temporibus, qui plura alia, quae in sequentibus demonstrantur, adeo clara et facilia esse putarent, ut in axiomatum et postulatorum numerum referri possint. At methodus mathematica, ut Barrov. monet l. c. p. 66. strictissimam principiorum paucitatem affectat, vel potius efflictim deperit. Neque tamen negandum est, „multo plura esse, ut Savilius ait p. 156. (et iam ante eum Campanus monuit ad finem axiomatum) quibus passim et Euclides ipse et alii Geometrae inter demonstrandum utantur, quae tamen omnia a praemissis principiis, vel a logica naturali fere originem habent, qualia sunt: contradicentium perpetuo unum esse verum, aliud falsum, ex quo et illud oritur, duas magnitudines homogeneas, itemque angulos aut esse inter se aequales, aut inaequales, et, si inaequales, alteram esse maiorem, alteram minorem. Item principium illud logicum, illud esse falsum, ex quo per necessariam consequentiam falsum sequatur, quum ex veris nil nisi verum, ex quo pendet tota vis ἀναγωγῆς, hoc est, demonstrationis per impossibile. Et eiusmodi quidem axiomatum et aliorum generum plura sunt exempla, quorum numerum inire difficile, quae inter demonstrandum non animadvertentibus etiam occurrunt, quae seorsim adnotare studiosis inter legendum commodum foret.“ Leges tamen rigorosae methodi an id permittant, dubitari possit, monente Pfleiderero in Hauberi Chrestom. Geometr. p. 288.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ά.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνο ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔκθεσις. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα [1]) πεπερα σμένη ἡ ΑΒ.

Προςδιορισμός. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθεία πεπερασμένης [2]) τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

1. εὐθεῖα omitt. edd. Basil. et Oxon.
2. πεπερασμένης omitt. edd. Bas. et Oxon.

PROPOSITIO I.

Observ. Problema continet haec propositio. Differu autem problemata ac theoremata inter se eodem modo atqu ex Gemini sententia postulata et axiomata. Caeterum Euclid utrumque communi nomine πρότασις comprehendit, et pote sane, quod et Savilius ex parte monet, facile unum genus in alit converti. Sub finem tamen Euclides semper ea distinguit s lemnibus verbis: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, vel ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Pr blemata pariter ac theoremata plures partes habent. Et v teres quidem in illis, si omni numero absoluta sint, ines dixerunt πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμὸν, κατασκευὴν, ἀπόδειξι συμπέρασμα. Πρότασις est ipsa propositio, quae in probl mate datum et quaesitum, in theoremate pariter datum a suppositum, et id, quod demonstrari oportet, complectitu Ita nostrum problema postulat, super datam rectam terminata triangulum aequilaterum constituere. Ἔκθεσις id, quod ut versaliter *datum* esse dictum erat, ad singulares schematu lineas applicat, et nonnunquam explanat v. c. hic: Sit da linea *AB*. Διορισμὸς simili ratione *quaesitum* in certo aliqu exemplo ad oculos ponit. Κατασκευὴ ea, quae facienda pr ponebantur, efficere docet, cui subiungunt nonnulli alteru διορισμὸν, quo enunciatur, ea, quae fieri debeant, in pr posito exemplo facta esse. Ἀπόδειξις id demonstrat, ac συμ πέρασμα inde concludit, quae in problemate fieri iussa erat iam reapse facta esse. Et similiter fere res se habet in the

PROPOSITIO I. (Fig. 1.)

Super datam rectam terminatam triangulum aequilaterum constituere.

Expositio. Sit data recta terminata *AB*.

Determinatio. Oportet igitur super *AB* rectam terminatam triangulum aequilaterum constituere.

rematibus. Non tamen omnes hae partes expresse enunciantur. In pluribus Mss. etiam in hac propositione hae voces desunt. Quin VV. DD. de Lambre et Prony in Praefatione, Euclidi a Peyrardo edito praeposita, istas denominationes meras commentatoris nugas esse (une pédanterie de commentateur) pronuntiaverunt. Aliter tamen de ea re iudicat Savilius, qui has propositionis partes fusius explanat. Vide Hauberi Chronom. Geom. p. 168. sqq. Nobis sufficiat eas semel exempli causa protulisse. Propositio, Demonstratio ac Conclusio nunquam deesse possunt. Cf. Savilius. Ad propositionis enunciationem quod attinet, *Datum* quid sit, alii aliter exposuere, ut videre est in iis, quae Procli Scholiis subiuncta sunt in Editione Basileensi 1533. Hic sufficiet intelligere rectam, quae *reapse* exhibita et ob oculos nobis posita est. Caeterum Euclides, quum in Elementis id tantum propositum sibi haberet, *ut doceret* tirones, qua ratione obtineri possit problematum propositorum solutio, contentus fuit, more didactico solutionem proponere, eiusque demonstrationem exhibere, i. e. *Synthesi* tantum usus est; at, qui primus problemata illa sibi proponebat, sive Euclides ille fuerit, sive alius quis, *Analysin aliquam*, sive methodum heuristicam adhibere necesse habebat. Et sane longum fuerit et saepe perdifficile, tirones nulla ante *scientia* mathematica imbutos semper ope Analyseos ad prima artis principia reducere (sed ad haec usque in Analysi recedendum foret, quoad nihil adhuc cognitum aut aliunde demonstratum sumere liceret): sufficere videtur docere, quid, et qua quid ratione effici possit: itaque Synthesis Euclidis

Κατασκευή. Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ· καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Ἀπόδειξις. Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΓΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

scopo sufficere putanda est. Conf. Scarburgh. p. 49. Vid. tamen Analysin Pfleidereri in Hauberi Chrestom. Geom. p. 299.) At in ipsa tamen compositione nostri huius problematis atque eius demonstratione id forte quis desideraverit, quod Euclides non docuerit, circulos, quos describi iubet, se invicem secare, adeoque in potestate semper esse problematis solutionem. Van Swinden. (Anfangsgr. der Meſskunde. Jena 1797. p. 22.) id pro axiomate sumit. In usum vocatis iis axiomatibus, quae reliquis addi posse supra vidimus, hac ratione demonstrari id omnino poterit. Quum (Fig. 1.) circulus, quem *A* vocabimus, centro *A*, radio *AB* descriptus sit, patet, punctum *A* esse intra circulum *A*, punctum *B* autem in ipsa circumfererentia circuli *A* positum. Hinc, quae in recta *AB* ultra *B* producta sumuntur puncta, v. c. *E*, necessario extra circulum *A* sita erunt. Si enim neges, puncta ut *E* vel in circumferentia circuli *A*, vel intra circulum *A* sita sint, necesse est. Priore casu foret $AE = AB$, posteriore $AE < AB$. At, quum *E* in *AB* ultra *B* producta esse su-

Constructio. Centro quidem A, intervallo autem AB, circulus describatur $B\Gamma\Delta$ (Post. 3.); et rursus, centro quidem B, intervallo autem BA, circulus describatur $A\Gamma E$ (Post. 3.); et a puncto Γ, in quo sese secant circuli, ad puncta A, B adiungantur rectae ΓA, ΓB (Post. 1.).

Demonstratio. Et quoniam A punctum centrum est $B\Gamma\Delta$ circuli, aequalis est $A\Gamma$ rectae AB (Def. 15.); rursus, quoniam B punctum centrum est $A\Gamma E$ circuli, aequalis est $B\Gamma$ rectae BA (Def. 15.). Ostensa est autem et ΓA rectae AB aequalis; utraque igitur ipsarum ΓA, ΓB rectae AB aequalis est. Quae autem eidem aequalia, et inter se sunt aequalia (Ax. 1.); et ΓA igitur rectae ΓB est aequalis; tres igitur ΓA, AB, $B\Gamma$ aequales inter se sunt.

mur, erit etiam utroque casu $AE > AB$, quod est absurdum. Ergo puncta E in AB producta sumta erunt extra circulum A. Descriptus deinde alter circulus, quem B vocabimus, ex centro B, radio AB, ex una parte puncti B rectam AB secabit in puncto A, atque ex altera parte in puncto aliquo E sito in AB ultra B producta, i. e. extra circulum A. Quum igitur circuli B punctum aliquod A intra circulum A, aliud autem circuli B punctum E extra circulum A situm sit, hoc ita circuli necessario se invicem secabunt (Ax. 14.) in puncto aliquo Γ. Cf. Wolf. Elem. Geometr. §. 197. Caeterum quum non tantum figurae $A\Gamma B$, $A\Gamma E$, verum etiam $A\gamma B$, $A\gamma E$ sint limitibus undequaquè circumscriptae, patet, duos illos circulos tam supra quam infra AB in punctis Γ et γ se invicem secare, adeoque duplicem dari problematis solutionem, nam tam triangulum $A\gamma B$, quam $A\Gamma B$ quaesiti trianguli locum habere possit. An forte plures adhuc solutiones locum habere possit, hic nondum definiri poterit, dum ostensum fuerit, circulos in pluribus quam duobus punctis se non secare. Cf.

Συμπέρασμα. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνίσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ· καὶ πάλιν, κέντρῳ τῷ Δ, καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

infra Prop. VII. Cor. 2. Ramus monet, esse manifestam hysterologiam in Euclide, quod hoc speciale problema praemittat, nec statim generale illud, quod I. 22. habetur, tractet. Quasi vero eae, quae I. 22. praecedunt, propositiones, quae et ad stabiliendam I. 22. faciunt, hanc ipsam I. 1. non supponant, aut sine ea rite demonstrari possint! Caeterum, e Proclo p. 59. referente, Zeno Sidonius monuit, in demonstratione tacite sumitur, rectas ΑΓ, ΒΓ ad punctum Γ, in quo conveniunt, segmentum commune non habere, unde apparet necessitas id pro axiomate sumendi. Cf. notata ad Defin. 4. et ad Ax. 10. a.

PROPOSITIO II.

Obs. Facile patet, varios esse huius problematis casus prout punctum Α vel in recta ΒΓ ipsa aut producta, aut extra eam situm sit, quos plenius enumerat Proclus. Quum

Conclusio. Aequilaterum igitur est $AB\Gamma$ triangulum (Def. 24.), et constitutum est super datam rectam terminatam AB. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO II. (Fig. 2.)

Ad datum punctum, datae rectae aequalem rectam ponere.

Sit quidem datum punctum A, data autem recta $B\Gamma$; oportet igitur ad A punctum, datae rectae $B\Gamma$ aequalem rectam ponere.

Adiungatur ab A puncto ad B punctum recta AB (Post. 1.), et constituatur super eam triangulum aequilaterum ΔAB (Prop. 1.), et producantur in directum ipsis ΔA, ΔB rectae AE, BZ (Post. 2.), et centro quidem B, intervallo vero $B\Gamma$, circulus describatur $\Gamma H\Theta$ (Post. 3.); et rursus centro Δ, et intervallo ΔH circulus describatur $HK\Lambda$ (Post. 3.).

autem exposito casu, qui in nostra figura est, reliqui nihil habeam difficultatis, supersedere liceat eorum expositione. Forte autem miretur aliquis, et reapse mirati sunt tum veteres, quos Proclus ait simpliciorem problematis constructionem adfectasse, tum Ramus aliique, Euclidem his ambagibus uti, ut ad punctum datum A rectam aliquam AA ponat, datae rectae $B\Gamma$ aequalem. Poterat enim brevius dicere: Ducatur ex A recta quaecunque AE, ac descripto (Post. 3.) centro A, intervallo $B\Gamma$, circulo, abscindatur AA, quae proinde aequalis erit rectae $B\Gamma$. Poterat sine dubio Euclides ita rem omnem absolvere. At, ut Proclus ait, hoc nihil aliud foret, quam mera petitio principii. Nam qui petit, ut ad A describatur circulus intervallo $B\Gamma$, petit ut ad A ponatur linea rectae $B\Gamma$ aequalis, quod fuit demonstrandum nec petendum. Nec simulatum tertium ita intelligendum est, quasi liceret alibi centrum, alibi intervallum circuli accipere, ut ad Post. 3.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. Πάλιν, ἐπ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴ ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴσ Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄ τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ Β ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθε εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ. Ὅπερ ἔδ ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονι τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

monet Savilius. Praeterea, hac constructione sumta, demonstrandam rectarum *ΑΛ*, *ΒΓ* aequalitatem, utraq dicenda erat aequalis esse intervallo, quo puncta extren crurum circini, cuius ope circulus centro *Α* descriptus fui inter se distabant. Hoc circini crurum intervallum quum figura haud ob oculos positum sit, exactissimo geometr sine dubio minus aptum visum fuit ad rem per se simplici simam demonstrandam. Malebat ostendere, rectam *ΑΛ* p riter ac *ΒΓ* rectae *ΒΗ* ob oculos positae aequalem, adeoq duas *ΑΛ*, *ΒΓ* inter se esse aequales. Reapse etiam apertu circini, dum a puncto *Β* ad *Α* transfertur, variationibus ol noxia est haud detegendis, nisi descriptis, quos Euclides d scribere iubet, integris circulis. Nec instrumentorum fide n debet demonstratio. Monenda haec duxi, quo certius sub in tium statim operis tirones ἀκρίβειαν summi viri observe His addo, quae Savilius de hac re habet p. 179. „Observe

Quoniam igitur punctum B centrum est circuli $\Gamma H\Theta$, aequalis est $B\Gamma$ rectae BH (Def. 15.). Rursus, quoniam punctum Δ centrum est circuli $HK\Lambda$, aequalis est $\Delta\Lambda$ rectae ΔH (Def. 15.), quarum ΔA rectae ΔB aequalis est; reliqua igitur $A\Lambda$ reliquae BH est aequalis (Ax. 3.). Ostensa est autem et $B\Gamma$ rectae BH aequalis; utraque igitur ipsarum $A\Lambda$, $B\Gamma$ rectae BH est aequalis. Quae autem eidem aequalia, et inter se sunt aequalia (Ax. 1.); et $A\Lambda$ igitur rectae $B\Gamma$ est aequalis.

Ad datum igitur punctum A, datae rectae $B\Gamma$ aequalis recta ponitur $A\Lambda$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO III. (Fig. 3.)

Duobus datis rectis inaequalibus, a maiore rectam minori aequalem auferre.

tudinis, si placet, differentiam magnam in hac parte inter problema et theorema. In problemate, ubi quasi manualis operatio requiritur (quamvis etiam ipsa Euclidis et geometrarum problemata a mechanica structura et fabrica abesse longissime, et non tam manus quam mentis opera absolvi ex Platonis sententia dixisset idem Savilius p. 162.), traiectio linearum ad alium atque alium situm et positionem admitti non potest: potest in theoremate, ubi nullum opus exigitur, per imaginationem traiici linea aut figura a suo loco et superponi alteri lineae vel figurae, ut in quarta propositione fit. Nam, quia in theoremate nihil aliud quaeritur, quam verum et falsum neque quicquam est falsum in illa traiectione, quae per solam imaginationem ad ostendendam conclusionis veritatem fit, et non quasi per fabricam manualem, aut ministerium aliquod problematicum, recepta est iure merito in theoremate traiectio illa imaginaria, quae in problemate esset vitiosissima."

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω [1]) πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· Ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση. ὥςτε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

1) Peyrardus ex Cod. 190. vel a. addit γὰρ, quod edd. Basil. et Oxon. recte omittere videntur, nisi vocem γὰρ eo sensu sumere velis, quem etiam nonnunquam habet, ut significet *nempe*, *scilicet*. Cf. Prop. 9—12. huius libri cum I. 10., I. 11. Constructio problematis I. 2. tamen pariter ab initio habet γὰρ, pariterque II. 11. Haec talia utrum ponere an omittere velis, haud sane multum refert.

PROPOSITIO III.

Obs. Duo potissimum casus distingui possunt, prout duae rectae idem punctum extremum habeant, aut non. Reliquis

Sint datae duae rectae inaequales AB, Γ, quarum maior sit AB; oportet igitur a maiore AB rectam minori Γ aequalem auferre.

Ponatur ad punctum A rectae Γ aequalis $A\Delta$ (Prop. 2.); et centro quidem A, intervallo vero $A\Delta$, circulus describatur ΔEZ (Post. 3.).

Et quoniam A punctum centrum est circuli ΔEZ, aequalis est AE rectae $A\Delta$ (Def. 15.); sed et Γ eidem $A\Delta$ est aequalis; utraque igitur ipsarum AE, Γ rectae $A\Delta$ est aequalis; quare et AE est aequalis rectae Γ (Ax. 1.).

Duabus igitur datis rectis inaequalibus AB, Γ, a maiore AB minori Γ aequalis ablata est AE. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO IV. (Fig. 4.)

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo aequalem habeant, ab aequalibus rectis contentum; et basin basi aequalem habebunt, et triangulum triangulo aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quos aequalia latera subtendunt.

casibus similibus iis, quos ad Prop. 2. diximus, immorari nihil attinet.

PROPOSITIO IV.

Obs. Haec propositio prima est, in qua principium congruentiae sive Ax. 8., eiusque conversa, quatenus conversam habet, adhibetur. Non quidem defuere, qui hoc demonstrationis genus repudiarent, quod minus geometricum sit, et mechanici aliquid sapiat, triangulumque assumat cum motu et ad aliam

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύ πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖ λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείο ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε, διὰ τὸ ἴση

positionem translatum. Et iam Proclus ait p. 66. han ἐφαρμογὴν sensibili inniti notioni, τῆς αἰσθητῆς καὶ ἐναρ γοῦς ἔχεσθαι ὑπολήψεως. Pariter congruentiae illud prin cipium reiecere Flussas Candalla, Peletarius, Thomas Sim pson., qui superpositionem unius figurae super alterar mere mechanicam (a mechanical consideration) esse dici (Elem. of Geometry. London 1800. p. 255.), aliique. At iur his dudum regessere Clavius, Savilius, Scarburgh., Playfair. aliique, non manu sed mente tantum fieri illas figurarum su perpositiones, nec nisi a notione aequalitatis pendere. Cf. qua e Savilio ad Prop. 2. attulimus. Scite Wallisius ait (Oper Mathem. T. II. p. 668.: „Si ita sint comparati circulus arcticu et antarticus, ut si centrum centro accommodari intelligatur et planum plano, reliqua congruerent puncta: erunt illi (pe ἐφαρμογὴν) aequales, utut alter alteri non admoveatur, sed toto coelo distent." Playfair. tamen iniustis his cavillationibus eo usque concedit, ut novum axioma sumi posse dicat, huius sententiae: Si duae sint rectae lineae, atque super una earun constituta sit figura quaecunque, super alteram semper constitu

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ, duo latera AB, $A\Gamma$ duobus lateribus ΔE, ΔZ aequalia habentia, utrumque utrique, nempe latus AB lateri ΔE, latus $A\Gamma$ vero lateri ΔZ, et angulum $BA\Gamma$ angulo $E\Delta Z$ aequalem; dico et basin $B\Gamma$ basi EZ aequalem esse, et triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ aequale fore, et reliquos angulos reliquis angulis aequales fore, alterum alteri, quos aequalia latera subtendunt, angulum nempe $AB\Gamma$ angulo ΔEZ, angulum $A\Gamma B$ vero angulo ΔZE.

Congruente enim triangulo $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ, et posito quidem puncto A super punctum Δ, AB vero recta super ΔE; congruet et punctum B ipsi E, quia est aequalis AB ipsi ΔE; congruente autem AB

ponse figuram alteri aequalem, e quo deinde omnia derivari possint, quae vulgo per superpositionem demonstrentur. At dubito, an hac nimia erga obtrectatores liberalitate status controversiae multum mutatus sit. Alteram enim illam in axiomate suam priori aequalem figuram clamabunt illi, nihil aliud esse, quam pariter figurae in alium locum translationem. Rectius tamen ille ac Thom. Simpson., qui ne superpositione opus habeat, mavult propositionem hanc quartam inter Axiomata referre. In theorematibus itaque intacta maneat illa linearum et figurarum mente tantum concepta translatio, sine qua simplicissimarum propositionum vix tolerabilis dari posset demonstratio. Caeterum omnes huius propositionis partes diligentissime explicavit Savilius, cuius observationes legere possis etiam in Hauberi Chrest. geometr. p. 181. Huic propositioni sequens addi potest corollarium: Si duo triangula unum quidem angulum utrimque aequalem habeant, et e rectis etiam hunc angulum comprehendentibus una prioris trianguli aequalis sit uni posterioris, altera autem prioris trianguli maior sit altera posterioris, erunt etiam triangula ista inaequalia, et prius qui-

εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥςτε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. Ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει, ὥςτε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει· εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος, τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥςτε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν πε-

dem maius erit. Cf. Pfleiderer. in Haub. Chrest. p. 301. Et multo magis, si utrumque crus angulum illum comprehendens in uno triangulo maius sit, quam in altero, illud etiam triangulum maius erit, quam hoc. — Hac occasione de *Corollariis* universim notari potest, Euclidem ipsum paucissima, aut, ut Austin. putat p. 16., forte ne ullum quidem addidisse, quod nempe brevitati consuleret, nec nisi iis, quae maxime ad scopum suum facerent, immorari vellet. Commentatores autem, ut qui alium scopum haberent, plura subinde addiderunt, e quibus si potissima seligeremus, lectoribus haud ingratum fore putavimus. Graeci ea *πορίσματα* vocabant, quam vocem tamen diversa nonnunquam significatione adhibere solebant. Erat nempe Porisma, quod et Proclus innuit (*τὸ πόρισμα λέγεται*

ipsi ΔE, congruet et $A\Gamma$ recta ipsi ΔZ, quia aequalis est angulus $BA\Gamma$ ipsi $E\Delta Z$; quare et punctum Γ puncto Z congruet, quia aequalis rursus est $A\Gamma$ ipsi ΔZ. At etiam punctum B puncto E congruebat; quare basis $B\Gamma$ basi EZ congruet; si enim, puncto quidem B ipsi E congruente, puncto autem Γ ipsi Z, basis $B\Gamma$ ipsi EZ non congruat, duae rectae spatium continebunt, quod fieri nequit (Post. 6. vel Ax. 12.). Congruet igitur basis $B\Gamma$ basi EZ, et aequalis ei erit; quare et totum triangulum $AB\Gamma$ toti ΔEZ triangulo congruet, et aequale ei erit, et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et aequales eis erunt, angulus nempe $AB\Gamma$ angulo ΔEZ, angulus autem $A\Gamma B$ angulo ΔZE.

Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo aequalem habeant, ab aequalibus lateribus contentum; et basin basi aequalem habebunt, et triangu-

καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινῶν οἷον τὰ Εὐκλείδει γεγραμμένα πορίσματα) singulare aliquod problematum genus, vel, ut Pappus in Collect. Mathem. Libr. VII. Praef. ait, mediae quasi naturae inter theoremata ac problemata, quod idem etiam Proclus asserit ad I. 15., atque porismata hoc sensu sumta tribus libris exposuerat Euclides, quos temporum iniuria deperditos restituere conatus est Rob. Simson. Alio autem sensu porisma in elementis sumitur, ubi plerumque significat propositiones, quae cum in ipso demonstrationis cursu se ultro offerrent, (ὅταν τι τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλό τι συναφανῇ θεώρημα, μὴ προδεικνυν ἡμῶν, Proclus ait p. 59.) absoluta demonstratione separatim enunciantur, unde etiam Proclo auctore l. c. porisma nomen accepit, ὥσπερ τι πέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς δείξεως πάρεργον.

ριεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ, προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μειζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τρι-

Cf. p. 80. Nos sensu paulo generaliore omnia, quae e demonstratione sponte sine longis demonstrationum ambagibus fluunt, Corollaria aut Consectaria dicere solemus, nonnunquam etiam generalius haec atque alia similia Observationes vocabimus.

PROPOSITIO V.

Obs. 1. Savilius observat, ἰσοσκελῶν τριγώνων non de pluribus triangulis aequicruris intelligendum esse, sed idem

in triangulo aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, uterque utrique, quos aequalia latera subtendunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO V. (Fig. 5.)

Isosceliorum triangulorum anguli ad basin aequales inter se sunt; et productis aequalibus rectis, anguli sub basi aequales inter se erunt.

Sit triangulum isosceles $AB\Gamma$, habens latus AB aequale lateri $A\Gamma$, et producantur rectae $B\Delta$, ΓE in directum rectis AB, $A\Gamma$ (Post. 2.); dico angulum $AB\Gamma$ angulo $A\Gamma B$ aequalem esse, $\Gamma B\Delta$ vero ipsi $B\Gamma E$.

Sumatur enim in $B\Delta$ quodlibet punctum Z, et auferatur a maiore AE minori AZ aequalis recta AH (Prop. 3.), et iungantur $Z\Gamma$, HB rectae.

Quoniam igitur AZ aequalis est rectae AH, AB vero rectae $A\Gamma$, duae igitur ZA, $A\Gamma$ duabus HA, AB aequales sunt, utraque utrique, et angulum communem continent ZAH; basis igitur $Z\Gamma$ basi HB aequalis est, et triangulum $AZ\Gamma$ triangulo AHB

esse ac ἑκάστου τριγώνων ἰσοσκελῶν. Aliam huius propositionis demonstrationem Proclo referente Pappus dedit in hunc fere modum: Quodsi hoc unum triangulum aequicrurum $AB\Gamma$ (Fig. 5.) bis positum, adeoque in $\alpha\beta\gamma$ repetitum animo concipiamus, non tantum $AB=\alpha\beta$, $A\Gamma=\alpha\gamma$; verum etiam, ob $\alpha\beta=\alpha\gamma$, habebimus quoque (Ax. 1.) $AB=\alpha\gamma$, $A\Gamma=\alpha\beta$. Poterit itaque triangulum $\alpha\beta\gamma$ triangulo $AB\Gamma$ superponi, ita, ut puncta A et

γώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν· τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

α, anguli $B A \Gamma$, $\gamma \alpha \beta$; rectae AB, $\alpha\gamma$; $A\Gamma$, $\alpha\beta$, adeoque punct. B, γ; et Γ, β coincidant; aequalis igitur erit angulus B angulo γ. At quum angulus γ idem prorsus sit, ac angulus Γ ex hypothesi, erunt (Ax. 1.) anguli B, Γ aequales. Alii alias dederunt demonstrationes, quae tamen omnes, quamvis simplices, Euclideae cedere videntur.

Coroll. Triangula aequilatera sunt etiam aequiangula.

Schol. A Thalete Milesio hoc theorema inventum esse Proclus refert.

Obs. 2. Scarburgh. p. 61. posteriorem huius propositionis partem, qua anguli sub basi aequales esse dicuntur, no

aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quos aequalia latera subtendunt, $A\Gamma Z$ quidem angulo ABH, $AZ\Gamma$ vero angulo AHB (Prop. 4.). Et quoniam tota AZ toti AH est aequalis, quarum AB rectae $A\Gamma$ est aequalis, reliqua igitur BZ reliquae ΓH est aequalis (Ax. 3.). Ostensa est autem et $Z\Gamma$ rectae HB aequalis: duae igitur BZ, $Z\Gamma$ duabus ΓH, HB aequales sunt, utraque utrique, et angulus $BZ\Gamma$ angulo ΓHB aequalis, et basis eorum communis $B\Gamma$; et $BZ\Gamma$ igitur triangulum ΓHB triangulo aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis igitur est angulus $ZB\Gamma$ angulo $H\Gamma B$, angulus autem $B\Gamma Z$ angulo ΓBH. Quoniam igitur totus angulus ABH toti angulo $A\Gamma Z$ ostensus est aequalis, quorum ΓBH angulo $B\Gamma Z$ aequalis; reliquus igitur $AB\Gamma$ reliquo $A\Gamma B$ est aequalis (Ax. 3.), et est ad basin trianguli $AB\Gamma$; ostensus est autem et angulus $ZB\Gamma$ angulo $H\Gamma B$ aequalis, et sunt sub basi; isoscelium igitur triangulorum etc.

esse ab *Euclide* profectam putat, sed assutam ab aliquo, qui animadverterit, demonstrare Euclidem triangulorum istorum sub basi constitutorum aequalitatem. Neque enim unquam hac angulorum sub basi aequalitate uti Euclidem in sequentibus propositionibus. Cui quidem argumento opponere liceat, ad denam certe Prop. 7. demonstrationem opus esse hac posteriore parte *Propositionis* 5., ut Rob. Simson. et Peyrard. in Praefatione p. XVIII. monent. Coëtsius (Euclid. Elem. Lugd. Bat. 1802. p. 46.) hanc propositionem ex I. 9. et I. 4. demonstrat. 4. quum I. 9. pendeat etiam apud Coëtsium ab I. 8. haec a I. 7. et haec denique a I. 5., in circulum incidere videtur;

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευρὰ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ [1]) ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

1) Hic et in linea sequente edit. Oxon. primo loco pon rectam ΑΓ, secundo rectam ΑΒ: et quamvis nihil prorsus i tersit, quo ordine hae rectae aequales nominentur, veri tam simile fuerit, Euclidem, qui primo nominasset angulum ΑΒ primo etiam loco posuisse rectam hunc angulum subtende tem i. e. rectam ΑΓ. Cum Peyrardo tamen consent. Cod. a. ed. Basil.

quamvis in Praefat. contrarium asserat, et excusare ista licentiam aliqui tentarint. Cf. Hauber. Chrest. Geom. p. 20 Eadem demonstratione utitur Van Swinden. Anfangsgr. d Meſskunde, p. 37. et Angel. de Marchettis p. 15.

PROPOSITIO VI.

Obs. Propositio sexta conversa est quintae. Propositiones nempe primariae, earumque conversae ita ad se invicem se habent, ut suppositio prioris fiat conclusio posterioris, vice versa, vel, si plures illa habeat suppositiones, una suppositionum illius fiat huius conclusio. Ita v. g. hic in Prop. 5. sumebatur, triangulum esse aequicrurum, et inde concludebatur aequalitas angulorum ad basin, in Prop. 6. contra sumitur haec ipsa angulorum aequalitas, et inde concluditur aequalitas laterum his angulis oppositorum. Quamvis enim Prop. 5. pariter 6. categorice expressae sint, facile tamen utraque etiam hypothetice exprimi potest. Vide Haub. Chrest. Geom. p. 196. s

PROPOSITIO VI. (Fig. 6.)

Si trianguli duo anguli aequales inter se sunt, et aequales angulos subtendentia latera aequalia inter se erunt.

Si triangulum $AB\Gamma$ aequalem habens angulum $AB\Gamma$ angulo $A\Gamma B$; dico et latus AB lateri $A\Gamma$ esse aequale.

Si enim inaequale est latus AB lateri $A\Gamma$, unum eorum maius est. Sit maius AB, et auferatur a maiore AB minori $A\Gamma$ aequalis ΔB (Prop. 3.), et iungatur $\Delta\Gamma$.

Plura adhuc conversionum (ἀντιστροφῆς) genera recensent Proclus et Savilius. Quum vero non, ut Peletarius vult p. 30., conversae propositionum in universum sint verae, nova illas semper demonstratione egere patet. Ea plerumque, atque in hac etiam Prop. 6., ita instituitur, ut doceatur, contrarium si quis asserere velit, absurdas consequentias elabi non posse. Hoc demonstrationis genus *indirectum* vel *apagogicum* vocare solent (ἀπαγωγὴ εἰς ἀδύνατον), quod, quamvis nonnulli subdubitare videantur, non minus certum est ac demonstratio directa; ex veris enim falsa iusta ratiocinatione consequi nunquam possunt. Nec sine causa dixere aliqui, esse apagogicam demonstrationem quoddam analyseos theoreticae genus. Cf. Klügel. (Wörterb. ad vocem *Analysis* P. I. p. 90.). Et Scarburgh. hanc deductionem ad absurdum *Analysin destructivam* vocat p. 62., quod nempe illa per certa ratiocinia falsam suppositionem, quae initio sumta erat, destruat. Cf. Borellius p. 1. et Hauber. Chrest. Geom. p. 210. sq. Conversas, etiam ubi locum habent, non omnes affert Euclides, sed eas saltem, quas in propositionibus sequentibus usui fore viderat; nos tamen, quantum in nobis potest, reliquas etiam, quae alicuius momenti sunt, notamus, quod iam a Clavio factum videmus. Neque tamen mos est, conversam semper, nulla alia interposita, ordine

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ, κοινὴ δὲ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσ εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γων τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει ἡ ΑΒ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι, ὅπι ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴσ ἄρα. Ἐὰν ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθεῖαι ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθή

excipere eam, cuius sit conversa. Sic v. g. lib. I. 8. et 2 conversae sunt Prop. 4. Saepe quippe ad demonstrandar conversam alias adhuc propositiones ante demonstrari necess est. Caeterum, quum duae partes sint in conclusione Pro 5., nempe 1.) in triangulo aequicruro angulos ad basin 2.) in eodem triangulo etiam angulos sub basi aequales esse de utriusque conversione cogitari potest. Ac prioris quiden conversam exhibet Prop. 6. Euclidis. Posterior convers ita habebit: Si trianguli *ΑΒΓ* (Fig. 7.), anguli *ΓΒΔ*, *ΒΓΕ* sub basi aequales fuerint, erunt etiam latera *ΑΒ*, *ΑΓ* aequalia Sumantur enim *ΒΖ=ΓΗ*, ducanturque rectae *ΒΗ*, *ΖΓ*, erunt que in triangulis *ΖΒΓ*, *ΗΓΒ* rectae *ΖΒ*, *ΓΗ* aequales ex constructione, et quum recta *ΒΓ* communis sit utrique triangulo, et angulus *ΓΒΔ* (vel *ΓΒΖ*) ex hypothesi aequalis sit angulo *ΒΓΕ* (vel *ΒΓΗ*) erit ex Prop. 4. *ΖΓ=ΒΗ*, et angulus *ΒΖΓ=ΒΗΓ*, et triangulum *ΒΖΓ=ΒΗΓ*. Iam dico, rectas *ΑΖ*, *ΑΗ* esse aequales. Quodsi enim inaequales sint, erit alterutra v. c. *ΖΑ* maior. Sumatur *ΖΘ=ΑΗ*, ductaque *ΘΓ*, erunt in triangulis *ΘΖΓ*, *ΒΗΑ*, ex demonstratis *ΖΓ=ΒΗ*; *ΖΘ=ΑΗ* ex hypoth. et angulus *ΘΖΓ=ΒΗΑ* ex demonstrat. Hinc ex Prop. 4. erit triangulum *ΖΘΓ=ΗΑΒ*. Unde, ablatis

Quoniam igitur aequalis est AB ipsi $A\Gamma$, communis autem $B\Gamma$, duae igitur AB, $B\Gamma$ duabus $A\Gamma$, ΓB aequales sunt, utraque utrique, et angulus $AB\Gamma$ angulo $A\Gamma B$ est aequalis; basis igitur $A\Gamma$ basi AB aequalis est, et $AB\Gamma$ triangulum $A\Gamma B$ triangulo aequale erit (Prop. 4.), minus minori, quod est absurdum (Ax. 9.); non igitur inaequalis est recta AB rectae $A\Gamma$; ergo aequalis. Si igitur trianguli etc.

PROPOSITIO VII. (Fig. 8.)

Super eadem recta, duabus iisdem rectis aliae duae rectae aequales utraque utrique non constituentur, ad

aequalibus triangulis $BZ\Gamma$, $BH\Gamma$ erunt (Ax. 3.) reliqua, triangulum nempe $BI\Theta = AB\Gamma$ i. e. pars aequalis erit toti, quod fieri nequit (Ax. 9.). Aequales igitur sint AZ, AH necesse est. A quibus si auferantur BZ, ΓH, quae ex hypothesi aequales sunt, reliqua aequalia erunt (Ax. 3.), nempe recta $AB = A\Gamma$. Aliam directam demonstrationem habet Proclus, dum, ducta ZH, ostendit, angulos AZH, AHZ esse aequales, unde res ex *I. 6.* patet. Non ut conversam, sed ut primariam propositionem 6. demonstrat Coëtsius l. c. p. 50. et Van Swinden. l. c. p. 36. ex *I. 9.* et *I. 26.*, ubi, quum hae propositiones non pendeant a I. 6., non idem monendum est, quod in propositione praecedente. Caeterum, quod monet Hauber. Chrest. Geom. p. 219. et Pfleiderer. ibid. p. 303. etiam Prop. 6. simili ratione, ac in Prop. 5. a nonnullis factum est, ex ipso principio congruentiae, si nempe idem triangulum bis positum sumatur, demonstrari potest.

Cor. Triangula aequiangula sunt etiam aequilatera.

PROPOSITIO VII.

Obs. Recte Savilius monet, propositionem hanc aliquanto obscurius expressam esse, unde paulo aliter Rob. Simson fere modo efferri poterit ita: Super eadem basi, atque ad eadem eius partes nequeunt duo triangula constitui, ita ut

σονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτ
μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαι
Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΔ
δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δυ
εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστα
τωσαν, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε
καὶ Δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Γ, Δ, τὰ αὐτὰ πε
ρατα ἔχουσαι τὰ Α, Β· ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν Γ
τῇ ΔΑ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν
ΓΒ τῇ ΔΒ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β· κ
ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ [1]).

1) Peyrard. addit: καὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἐκβεβλήσθωσαν ἐ
εὐθείας ἐπὶ τὰ Ε, Ζ. Duas etiam figuras describit, quas
Commentarium dedimus, et in ipsa etiam demonstratione p
nonnullis litteris substituit alias. Nos autem sine codd. a
ctoritate nihil hic mutare voluimus. Caeterum vide Com
mentarium.

latera ad eosdem baseos terminos vergentia aequalia sint. Ca
terum conferatur Hauber. in Chrest. Geom. p. 222. sqq.
enim fieri potest, sint (Fig. 8. 9.) triangula ΑΒΓ, ΑΒΔ ita com
parata, ut ΑΓ=ΑΔ, et ΒΓ=ΒΔ, eritque vel vertex neutri
trianguli intra reliquum triangulum, vel vertex alterius int
alterum triangulum, vel vertex unius in latere alterius ipso a
producto in loco ab altero vertice diverso. Praeter eum casum
quo vertex neutrius trianguli est intra reliquum triangulum
qui solus in Graecis, quos habemus, Euclidis codicibus de
monstratus est, etiam reliquos casus demonstrandos esse ia
Proclus innuit, et eius casus, quo vertex unius trianguli e
intra alterum, demonstrationem dedit, quam pariter habe
Campanus, Savilius, Clavius et Robertus Simson. In
nempe (Fig. 9.) aequalitas angulorum ΑΔΓ, ΑΓΔ, atque e
inde inaequalitas angulorum ΖΔΓ, ΒΓΔ infertur, qui tam
ex parte posteriore Prop. 5. aequales esse debebant. Hu

ad et aliud punctum ad easdem partes, ita ut eos-
m terminos habeant, quos primae rectae.

Si enim fieri potest, super eadem recta AB dua-
s iisdem rectis $A\Gamma$, ΓB, aliae duae rectae $A\Delta$,
ΔB aequales utraque utrique constituantur ad aliud et
ad punctum Γ et Δ, ad easdem partes Γ, Δ, et
easdem terminos habentes A, B; ita ut aequalis sit
quidem ΓA ipsi ΔA, eundem terminum habens, quem
illa, punctum A, ΓB vero ipsi ΔB, eundem ter-
minum habens, quem illa, punctum B; et iungatur
$\Gamma\Delta$.

tamen casum ab Euclide non omissum, nec Euclidem ipsum
mutilatum, sed librariorum tantum culpa alteram figuram
omissam esse asserit Peyrard. Tom. I. Praefat. p. XVIII. et,
hac figura restituta, et rectis duabus productis, ne ulla
quidem voce mutata, perfectam demonstrationem se restituisse
sit. Iubet nempe (Fig. 10.) rectas $B\Gamma$, $B\Delta$ producere, ubi deinde
demonstratio, paucis tantum litteris mutatis, ad utrumque
casum applicari potest, nominatim itaque ad eum quoque, quo
vertex Γ unius trianguli est intra alterum triangulum $A\Delta B$.
Ita nempe procedit, postquam ostensus fuerat angulus $A\Gamma\Delta$
$= A\Delta\Gamma$: „Quare angulus $A\Delta\Gamma$ maior est angulo $\Delta\Gamma B$, multo
igitur $\Gamma\Delta Z$ maior est ipso $\Delta\Gamma B$. Rursus, quoniam aequalis est
ΓB ipsi ΔB, aequalis est angulus $\Gamma\Delta Z$ angulo $\Delta\Gamma B$, quod fieri
nequit." Et haec quidem satis ingeniose. Utrum tamen Euclides
ipse rem ita absolverit, dubitari poterit, quod, ut VV. DD. de
Lambre et Prony monent p. XXXVII., vix credi potest, libra-
rios non integram tantum figuram omisisse, sed lineas etiam,
quas productas invenerint, non produxisse, et verba, quae in
ipso textu eas produci iuberent, omisisse. Accedit, quod in
versione Arabica, tam ea, ex qua Campanus transtulisse credi-
tur, quam in Nassireddini typis impressa, et cuius quoad hunc
locum versionem Gallicam, a Sedillot. Profess. Biblioth. Reg.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἡ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση.

Paris. factam, Peyrardus in Praefat. Tom. II. p. XLII. exhibet, quamvis caeterum non consentiant, casus secundus nominatim demonstratus est.

Is denique casus, quo quis sumere possit, verticem unius trianguli esse in latere aliquo alterius ipso vel producto facillimam habet demonstrationem ex eo, quod totum non aequale esse potest parti. Caeterum Pappus, et ex eo Savilius aliique observant, hanc propositionem, quod raro fiat, in propositionibus geometricis, negative efferri, nec esse nisi lemma ad I. 8. Atque huic ipsi usui, nempe ut prope lemmatibus inserviant aliis propositionibus, saepius inservire propositiones negative expressas, v. c. III. 23. coll. III. 24., observat Hauber. Chrest. p. 230.

Quoniam igitur aequalis est $\Delta\Gamma$ ipsi ΔA, aequalis est et angulus $\Delta\Gamma A$ ipsi $\Delta A\Gamma$ (Prop. 5.); maior igitur $\Delta A\Gamma$ ipso $\Delta\Gamma B$; multo igitur ΓAB maior est ipso $\Delta\Gamma B$. Rursus, quoniam aequalis est ΓB ipsi ΔB, aequalis est et angulus $\Gamma\Delta B$ angulo $\Delta\Gamma B$. Ostensus est autem ipso et multo maior, quod fieri nequit. Non igitur super etc.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 11.)

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, habeant autem et basin basi aequalem; et angulum angulo aequalem habebunt, ab aequalibus rectis contentum.

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ duo latera AB, $A\Gamma$ duobus lateribus ΔE, ΔZ aequalia habentia, utrumque utrique, AB quidem ipsi ΔE, $A\Gamma$ vero ipsi ΔZ; habeat autem et basin $B\Gamma$ basi EZ aequalem; dico et angulum $BA\Gamma$ angulo $E\Delta Z$ esse aequalem.

Cor. 1. Duo circuli e duobus punctis descripti, ex eadem parte rectae, quae centra eorum coniungit, non nisi in unico puncto se invicem secare possunt. — Savilius ex hoc corollario pro axiomate sumto vicissim propositionem hanc I. 7. derivavit.

Cor. 2. Non itaque nisi unum triangulum aequilaterum ex eadem parte rectae alicuius datae describi potest.

Haec duo corollaria sunt ex schedis Pfleidereri manuscriptis, e quibus saepius hausimus, et quae iam impressae etiam leguntur in Hauberi Chrest. p. 304.

PROPOSITIO VIII.

Obs. Est haec propositio una e conversis quartae. Caeterum non anguli tantum aequalibus lateribus comprehensi,

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον, τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ, διὰ τὸ ἴση εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. Οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

sed reliqua etiam omnia, nominatim ipsa triangula utrimque erunt aequalia, quod vel ex congruentia, vel ex Prop. 4. patet. Euclides id brevitatis studio omisit, ut Savilius observat. Notandum tamen videtur, ne, si similis casus obvenerit, a Prop. 8. semper denuo ad quartam recurrendum vel aliter res expedienda sit. Aliam huius propositionis demonstrationem, ut Proclus refert, Philo Byzantinus dedit, quae eo redit, ut duo triangula, quorum aequalitas demonstranda est, ad diversas eiusdem basis partes constituantur, et vertices eorum recta iungantur, quae tum bina triangula aequicrura efficiet, quorum anguli ad basin

Congruente enim $AB\Gamma$ triangulo ipsi ΔEZ triangulo, et posito puncto B super punctum E, recta vero $B\Gamma$ super EZ, congruet et punctum Γ ipsi Z, quia aequalis est $B\Gamma$ ipsi EZ; congruente igitur $B\Gamma$ ipsi EZ, congruent et BA, ΓA ipsis $E\Delta$, ΔZ. Si enim basis quidem $B\Gamma$ basi EZ congruat, latera vero BA, $A\Gamma$ ipsis $E\Delta$, ΔZ non congruant, sed situm mutent ut EH, HZ, constituentur super eadem recta duabus rectis aliae duae rectae aequales, utraque utrique, ad aliud et aliud punctum, ad easdem partes, eosdem terminos habentes. Non autem constituuntur (Prop. 7.). Congruente igitur basi $B\Gamma$ basi EZ, non possunt non congruere etiam latera BA $A\Gamma$ lateribus $E\Delta$, ΔZ. Congruent igitur; quare et angulus $BA\Gamma$ angulo $E\Delta Z$ congruet, et aequalis ei erit. Si igitur duo etc.

PROPOSITIO IX. (Fig. 12.)

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

aequales erunt, et qui vel ipsi, vel quorum aequalis summa aut differentia efficiet id, quod propositum erat. Eam ipsam demonstrationem habent etiam Borellius p. 25. sqq. Kaestnerus Anfangsgr. der Arithm. u. Geom. P. I. Prop. 4. Karsten. Mathes. Theor. Univers. §. 75. Thom. Simpson. Elem. of. Geom. B. I. Th. XIV. aliique. Epicrisin illius a Pfleiderero et Hauberо factam vide in Hauberi Chrest. p. 305. et 235. sqq.

PROPOSITIO IX.

Obs. Proclus monet, demonstrandum etiam esse, verticem trianguli aequilateri intra datum angulum $BA\Gamma$ situm

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω [1]) ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

1) Peyrard. ex cod. a. addit γὰρ, quod omittunt edd. Basil. et Oxon.

esse. Quod ita demonstrabitur. Quodsi (Fig. 13.) vertex trianguli aequilateri super ΔΕ constructi non sit intra angulum ΒΑΓ, erit vel in uno crurum anguli, vel extra angulum. Sit, si fieri potest, punctum Η in alterutro crurum v. c. in ΑΓ vertex trianguli aequilateri super ΔΕ constituti, eritque angulus ΕΔΗ=ΔΕΗ (Prop. 5.), adeoque angulus ΒΔΕ>ΔΕΓ. At, quum ex construct. sit ΑΔ=ΑΕ, erit etiam ΒΔΕ=ΔΕΓ (I. 5.), quod fieri nequit. Et similis erit demonstratio verticem trianguli nec in puncto aliquo Θ extra angulum ΒΑΓ esse posse.

Sit datus angulus rectilineus $BA\Gamma$; oportet ipsum bifariam secare.

Sumatur in AB quodlibet punctum Δ, et auferatur ab $A\Gamma$ ipsi $A\Delta$ aequalis AE, et iungatur ΔE, et constituatur super ΔE triangulum aequilaterum ΔEZ (Prop. 1.), et iungatur AZ; dico angulum $BA\Gamma$ bifariam secari a recta AZ.

Quoniam enim aequalis est $A\Delta$ ipsi AE, communis autem AZ, duae ΔA, AZ duabus EA, AZ aequales sunt, utraque utrique, et basis ΔZ basi EZ aequalis est; angulus igitur ΔAZ angulo EAZ aequalis est (Prop. 4.).

Datus igitur angulus rectilineus $BA\Gamma$ bifariam secatur a recta AZ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X. (Fig. 14.)

Datam rectam terminatam bifariam secare.

Sit data recta terminata AB; oportet rectam terminatam AB bifariam secare.

Cor. Manifestum est, angulum ita bisectum denuo bisecari, adeoque angulum primo propositum in quatuor, octo, sedecim etc. partes aequales, nempe in omnes eas partes aequales dividi posse, quarum numerus exprimi potest numero 2 ad dignitatem quamcunque n evecto i. e. numero 2^n.

PROPOSITIO X.

Obs. Proclus refert, Apollonium Pergaeum datam rectam terminatam bisecare, ducta recta per puncta intersectionum duorum circulorum, qui e punctis datae rectae extremis, intervallo isti rectae aequali descripti sunt; quae ratio quoad rem ipsam haud multum differt ab Euclidea, quam tamen

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΙ καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τ ΒΔ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχ τέτμηται κατὰ τὸ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντο σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν

longe praefert Proclus. Cf. Hauber. Chrest. p. 241. Pat etiam, rectam ΓΔ (Fig. 14.), quae ex constructione rectam ΑΒ bisecat, ei ad angulos rectos insistere. Caeterum idem de di visione rectae notandum est, quod in Cor. praecedentis de di visione anguli notavimus. Quod reliquum est, infra ad VI 10., quin iam I. 34. Cor. 23. ostendetur, rectam in quotlibe partes aequales ope geometriae elementaris dividi posse, quo in angulo fieri nequit.

PROPOSITIO XI.

Obs. Pro eo casu huius propositionis, quo punctum e quo perpendicularis ad rectam datam erigi debet, est extre mum huius rectae, Proclus solutionem habet satis facilem quae etiam est apud Clavium, pluresque aliae dantur, partim

Constituatur super ipsa triangulum aequilaterum $\Delta B\Gamma$ (Prop. 1.), et secetur angulus $A\Gamma B$ bifariam a recta $\Gamma\Delta$ (Prop. 9.); dico rectam AB bifariam secari in puncto Δ.

Quoniam enim aequalis est $A\Gamma$ ipsi ΓB, communis autem $\Gamma\Delta$, duae $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ duabus $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ aequales sunt, utraque utrique, et angulus $A\Gamma\Delta$ angulo $B\Gamma\Delta$ aequalis est; basis igitur $A\Delta$ basi $B\Delta$ aequalis est (Prop. 4.).

Ergo data recta terminata AB bifariam secatur in puncto Δ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XI. (Fig. 15.)

Datae rectae, a puncto in ea dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta AB, datum vero punctum in ea Γ; oportet a puncto Γ rectae AB ad rectos angulos rectam lineam ducere.

e propositionibus, quae subsequuntur, demum demonstrandae. *Vid. infra I. 32. Cor. 11.*

Cor. 1. Ex hac propositione Rob. Simson. monet, facile consequi, duas rectas segmentum commune non habere. Quodsi enim fieri posset, ut (Fig. 16.) rectae $\Delta\Gamma\Theta$, $\Delta\Gamma E$ segmentum $\Delta\Gamma$ commune habere possent, erigatur (I. 11.) in Γ ad $\Delta\Gamma$ perpendicularis ΓZ, et ostendetur, ut in nostra propositione, tam $Z\Gamma\Delta = Z\Gamma E$, quam $Z\Gamma\Delta = Z\Gamma\Theta$, foret itaque $Z\Gamma E = Z\Gamma\Theta$ pars toti, q. e. a. (Ax. 9.) Notandum tamen, hoc ipsum corollarium potius axiomatis loco sumendum esse, quum iam in I. Prop. 1. tacite sumatur, unde illud ut Ax. 10. a supra posuimus.

Cor. 2. Datae rectae ΔE (Fig. 17.) ad datum in ea punctum Γ non nisi una recta ΓZ ad rectos angulos duci potest. Si enim, si fieri potest, praeter ΓZ etiam ΓH rectae ΔE ad

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, κα κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΙ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΙ λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸ αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνία εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσα εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τ ΖΕ ἴση ἐστὶν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπ ΕΓΖ ἴση ἐστὶ, καὶ εἰσιν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖ ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλή λαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ περ αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίο εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δο θέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον ε θεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

rectos angulos, eritque $\Delta\Gamma H = H\Gamma E$ (Def. 10.), adeoque ΔI $< Z\Gamma E$ (Ax. 9.), et multo magis $\Delta\Gamma Z < Z\Gamma E$. At quum etia $Z\Gamma$ ad angulos rectos sit rectae ΔB (ex hypoth.), erit etia $\Delta\Gamma Z = Z\Gamma E$ (Def. 10.), quod est absurdum.

PROPOSITIO XII.

Obs. Demonstrandum erat ante omnia circulum ce tro Γ, intervallo $\Gamma\Delta$, descriptum secare rectam AB in du bus punctis H et E. Quod ita fiet. Quum puncta Γ et

Sumatur in $A\Gamma$ quodlibet punctum Δ, et ponatur ipsi $\Gamma\Delta$ aequalis ΓE (Prop. 3.), et constituatur super ΔE triangulum aequilaterum $Z\Delta E$ (Prop. 1.) et iungatur $Z\Gamma$; dico datae rectae AB a dato in ea puncto Γ, ad rectos angulos rectam lineam ductam esse $Z\Gamma$.

Quoniam enim aequalis est $\Gamma\Delta$ ipsi ΓE, communis vero ΓZ, duae $\Delta\Gamma$, ΓZ duabus $E\Gamma$, ΓZ aequales sunt, utraque utrique, et basis ΔZ basi ZE aequalis est (Prop. 8.), et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens angulos deinceps aequales inter se facit, rectus uterque aequalium angulorum est (Def. 10.); rectus igitur est uterque ipsorum $\Delta\Gamma Z$, $Z\Gamma E$.

Ergo datae rectae AB a dato in ea puncto Γ, ad rectos angulos recta linea ducta est ΓZ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII. (Fig. 18. a.)

Super datam rectam infinitam, a dato puncto, quod non est in ea, perpendicularem rectam lineam ducere.

ex constructione sint e diversis rectae AB partibus, ducta $\Gamma\Delta$ secabit rectam AB in puncto aliquo K (Ax. 15.). Et quum punctum K in recta $\Gamma\Delta$, adeoque intra circulum centro Γ intervallo $\Gamma\Delta$ descriptum positum sit, recta AKB, quae per hoc punctum K i. e. intra circulum transit, necessario secabit circulum in duobus minimum punctis H et E (Ax. 13.). At nec in pluribus quam duobus punctis rectam AB et circulum descriptum se invicem secare Proclus demonstrare tentat in hunc fere modum. Secet (Fig. 18. b. et

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ, τ
δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δε
δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπ
τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς
κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθεία
τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστή
ματι δὲ τῷ ΓΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τε
τμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύ
χθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴ
δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέν
τος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετο
ἦκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ
δύο δὴ αἱ ΘΗ, ΘΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν
ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶ
ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ
ἐστὶν ἴση, καί εἰσιν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ
εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαι
ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· κα
ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφε
στήκεν.

18. c.) si fieri potest, circulus centro Γ radio ΓΔ descriptu
rectam ΑΒ non tantum, ut in praecedente schemate, in puncti
Η et Ε, sed praeterea in alio quodam puncto Δ sito v. c
inter Η et punctum Θ, quod rectam ΗΕ bisecat. Circulu
itaque ut ex Δ ad punctum Ε transeat, rectam ΓΘ ipsam au
productam in puncto aliquo Μ secabit (Ax. 15.), et ob ΓΗ
=ΓΕ, erit angulus ΓΗΔ=ΓΕΔ (I. 5.). Pariter autem, ol
ΓΗ=ΓΔ, erit ΓΗΔ=ΓΔΗ, et ob ΓΕ=ΓΔ, erit ΓΕΔ=ΓΔΕ
itaque ΓΔΗ=ΓΔΕ, adeoque uterque rectus erit (Def. 10.)
Ostensus est autem etiam ΓΘΔ rectus esse, itaque ΓΔΘ=ΓΘΔ

Sit quidem data recta infinita AB, datum vero punctum Γ, quod non est in ea; oportet super datam rectam infinitam AB, a dato puncto Γ, quod non est in ea, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sumatur ad alteram partem AB rectae quodlibet punctum Δ, et centro quidem Γ, intervallo autem $\Gamma\Delta$, circulus describatur EZH (Post. 3.), et secetur EH recta bifariam in Θ (Prop. 10.), et iungantur ΓH, $\Gamma\Theta$, ΓE rectae (Post. 1.); dico super datam rectam infinitam AB, a dato puncto Γ, quod non est in ea, perpendicularem ductam esse $\Gamma\Theta$.

Quoniam enim aequalis est recta $H\Theta$ rectae ΘE, communis autem $\Theta\Gamma$, duae utique ΘH, $\Theta\Gamma$ duabus $E\Theta$, $\Theta\Gamma$ aequales sunt, utraque utrique, et basis ΓH basi ΓE est aequalis (Def. 15.); angulus igitur $\Gamma\Theta H$ angulo $E\Theta\Gamma$ est aequalis (Prop. 8.); et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens, angulos deinceps aequales inter se facit, rectus uterque aequalium angulorum est; et recta insistens perpendicularis appellatur ad eam, in quam insistit (Def. 10.).

Ax. 10.); erit igitur $\Gamma\Delta=\Gamma\Theta$ (I. 6.). • At est etiam $\Gamma\Delta=\Delta M$ (Def. 15.), itaque $\Gamma M=\Gamma\Theta$, pars toti, quod est absurdum (Ax . Recta igitur AB circulum in tertio aliquo puncto inter Γ et Θ posito secare nequit. Simili deinde ratione demonstrare conatur, rectam AB nec in puncto Θ rectam HE bisecante circulum secare posse, ac deinde, nec in quatuor punctis rectam AB et circulum se invicem secare etc. Quod quamvis satis ingeniosum sit, facilius tamen demonstratio procedet demum post I. 16. vel I. 17. Cf. Pfleiderer. in Hauberi Chrest. p. 307.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσα

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποι ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ στα θεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγ ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι, ἤτοι δύο ὀρθ εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒ. δύο ὀρθαί εἰσιν. Εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σ μείου τῇ ΓΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προςκε σθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ τα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσιν. Πάλιν ἐπεὶ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστὶ, κοι προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. Ἐδε χθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐτα ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· κ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσ

Schol. Huius problematis Oenopiden primum inve torem esse Proclus refert.

PROPOSITIO XIII.

Cor. 1. Hinc, si angulorum deinceps positorum un rectus sit, alter pariter erit rectus; si unus acutus, alter o tusus, et contra.

Super datam igitur rectam infinitam AB a dato puncto Γ, quod non est in ea, perpendicularis ducta est $\Gamma\Theta$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 19.)

Si recta in rectam insistens angulos faciat, vel duos rectos, vel duobus rectis aequales faciet.

Recta enim quaedam AB in rectam $\Gamma\Delta$ insistens angulos faciat ΓBA, $AB\Delta$; dico ΓBA, $AB\Delta$ angulos vel duos rectos esse vel duobus rectis aequales.

Si quidem igitur aequalis est ΓBA ipsi $AB\Delta$ duo recti sunt (Def. 10.). Si vero non, ducatur a puncto B rectae $\Gamma\Delta$ ad rectos angulos recta BE (Prop. 11.); ergo ΓBE, $EB\Delta$ duo recti sunt. Et quoniam ΓBE duobus ΓBA, ABE aequalis est, communis addatur $EB\Delta$; ergo ΓBE, $EB\Delta$ tribus ΓBA, ABE, $EB\Delta$ aequales sunt (Ax. 2.). Rursus, quoniam ΔBA duobus ΔBE, EBA aequalis est, communis addatur $AB\Gamma$; ergo ΔBA, $AB\Gamma$ tribus ΔBE, EBA, $AB\Gamma$ aequales sunt (Ax. 2.). Ostensi sunt autem et ΓBE, $EB\Delta$ tribus eisdem aequales; quae autem eidem aequalia, et inter se sunt aequalia (Ax. 1.); ergo et ΓBE, $EB\Delta$ ipsis ΔBA, $AB\Gamma$ aequales sunt; sed ΓBE, $EB\Delta$

Cor. 2. Si plures rectae, quam una ad idem punctum eidem rectae ad easdem eius partes insistant, anguli omnes simul fient duobus rectis aequales.

Cor. 3. Quotcunque rectis se mutuo secantibus, anguli ad punctum sectionis quatuor rectis aequales erunt, et generalius: omnes anguli circa idem punctum constituti quatuor rectos efficient. Cf. Pfleiderer. l. c. p. 307.

εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι, κα
αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν
Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι [1]), μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτ σημείῳ τῷ Β, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, μὴ ἐπὶ τ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπ ΑΒΓ, ΑΒΔ ὐυσὶ ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω, ὅτ ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστ τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δυσὶ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ται ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσίν. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύ νατον. Οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῇ ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ. Ἐὰν ἄρ καὶ τὰ ἑξῆς.

1) Proclus legit: δύο εὐθεῖαι ἑξῆς.

PROPOSITIO XIV.

Obs. Est haec conversa praecedentis, pariterque paul generalius conversa Cor. 2. praecedentis demonstrari poteri

duo recti sunt; ergo et ΔBA, $AB\Gamma$ duobus rectis aequales sunt. Si igitur etc.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 20.)

Si ad aliquam rectam, et ad punctum in ea, duae rectae, non ad easdem partes positae, angulos deinceps duobus rectis aequales faciant, in directum erunt sibi invicem rectae.

Ad aliquam enim rectam AB, et ad punctum in ea B, duae rectae $B\Gamma$, $B\Delta$, non ad easdem partes positae, angulos deinceps $AB\Gamma$, $AB\Delta$ duobus rectis aequales faciant; dico in directum esse rectae ΓB rectam $B\Delta$.

Si enim non est rectae $B\Gamma$ in directum $B\Delta$, sit rectae ΓB in directum BE (Post. 2.).

Quoniam igitur recta AB super rectam ΓBE insistit, anguli $AB\Gamma$, ABE duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); sunt autem et $AB\Gamma$, $AB\Delta$ duobus rectis aequales; ergo ΓBA, ABE ipsis ΓBA, $AB\Delta$ aequales sunt. Communis auferatur ΓBA; reliquus igitur ABE reliquo $AB\Delta$ est aequalis (Ax. 3.), minor maiori, quod fieri nequit. Non igitur in directum est BE rectae $B\Gamma$. Similiter, autem ostendemus, neque esse aliam quandam praeter $B\Delta$; in directum igitur est ΓB rectae $B\Delta$. Si igitur etc.

Alia praecedentis converta erit haec: Si duo anguli duobus rectis aequales sint, atque in vertice communi ita iungantur, ut unum crus unius cum uno crure alterius sit in directum, reliqua quoque angulorum crura in eandem rectam coincident, quod facile ostendetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἱπὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσίν. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἑξῆς. [1])

1) Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ὅσαι δήποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσιν. Hoc Corollarium addunt edd. Oxon. et Cod. Peyrardi m. In margine vel inter lineas illud habent Codd. d. e. f. et, ut Peyrardus in Praefat. dicit, etiam Coila, ita tamen, ut non prae se ferat signum, quo in hoc manuscripto ea, quae ad marginem sunt, ad textum pertinere indicantur. Idem tamen in lect. variant. id in Cod. a. deesse asserit. Pariter edit. Basil. ex alio, ut dicit, exemplari illud in margine addit. Quum tamen etiam in Codd. h. i. k. n. desit, nec omnino huc, sed ad I. 13. (ubi apud nos Cor. 3. est) pertineat, textui inserere noluimus. Caeterum Proclus etiam ad hanc propositionem simile fere corollarium habet, eo tantum ab hoc diversum, quod ei de duabus tantum rectis sermo est.

PROPOSITIO XV.

Schol. Thaletem hanc Prop. primum invenisse, Euclidem

PROPOSITIO XV. (Fig. 21.)

Si duae rectae sese secent, angulos ad verticem aequales inter se facient.

Duae enim rectae AB, $\Gamma\Delta$ sese secent in puncto E; dico aequalem esse angulum quidem $AE\Gamma$ angulo ΔEB, angulum autem ΓEB angulo $AE\Delta$.

Quoniam enim recta AE in rectam $\Gamma\Delta$ insistit angulos faciens ΓEA, $AE\Delta$; anguli ΓEA, $AE\Delta$ duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.). Rursus, quoniam recta ΔE in rectam AB insistit, angulos faciens $AE\Delta$, ΔEB; anguli $AE\Delta$, ΔEB duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.). Ostensi sunt autem et ΓEA, $AE\Delta$ duobus rectis aequales; ergo anguli ΓEA, $AE\Delta$ angulis $AE\Delta$, ΔEB aequales sunt. Communis auferatur $AE\Delta$, reliquus igitur ΓEA reliquo $BE\Delta$ aequalis est (Ax. 3.). Similiter autem ostendemus et angulos ΓEB, ΔEA esse aequales. Si igitur duo etc.

autem primam demonstratione dignam habuisse, Proclus refert.

Obs. Prop. 15. duae sunt conversae. Alteram Proclus habet huius sententiae: Si (Fig. 21.) ad punctum E rectae alicuius AB duae rectae $E\Delta$, ΓE ducantur non ad easdem partes, ac faciant angulos ad verticem aequales $E\Delta$ et ΓE in directum erunt. Nam, quum $AE\Delta+\Delta EB=2$ rectis (I. 13.) et $\Delta EB=AE\Gamma$ ex hypoth. erunt etiam $AE\Delta+AE\Gamma=2$ rectis, adeoque $E\Delta$ et ΓE in directum sitae erunt (I. 14.). Alteram conversam exhibet Peletarius huius sententiae: Si quatuor rectae AE, ΓE, BE, ΔE ex uno puncto E exeuntes binos angulos oppositos inter se aequales fecerint, erunt quaelibet duae lineae adversae in directum sibi oppositae. Nempe omnes quatuor anguli circa punctum E duobus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβλη θείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπε ναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθ αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτ γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶ

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζε χθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ Ζ καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ζ καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ Β τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, Ε ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστὶ, κατὰ κορυφὴν γάρ· β σις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκ τέρα, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. Μείζων δέ ἐστ

rectis aequales sunt (Prop. 13. Cor. 3.). Atqui ex hypo tam *ΑΕΔ*=*ΒΕΓ*, quam *ΑΕΓ*=*ΒΕΔ*, unde *ΑΕΔ*+*ΑΕΓ* *ΒΕΓ*+*ΒΕΔ*=2 rectis, adeoque *ΔΕ* et *ΓΕ* in directum eru (I. 14.). Pariter, quum *ΑΕΓ*+*ΒΕΓ*=*ΔΕΓ*+*ΒΕΓ*=2 rec *ΑΒ* et *ΒΕ* in directum erunt.

PROPOSITIO XVI.

Obs. Ramus, ut solet, hysterologiae accusat Euclide quod hanc propositionem, quae facile consequatur ex I. 3 separatim demonstret. At demonstratio I. 32. in Euclidis stemate ex I. 27., huius vero ex I. 16. dependet, neque igit

PROPOSITIO XVI. (Fig. 22.)

Omnis trianguli uno laterum producto, exterior angulus utroque interiorum et oppositorum angulorum maior est.

Sit triangulum $AB\Gamma$, et producatur ipsius unum latus $B\Gamma$ ad Δ; dico angulum exteriorem $A\Gamma\Delta$ maiorem esse utroque interiorum et oppositorum angulorum ΓBA, $BA\Gamma$.

Secetur $A\Gamma$ bifariam in E (Prop. 10.), et iuncta BE producatur in directum ad Z, et ponatur rectae BE aequalis EZ (Prop. 3.), et iungantur $Z\Gamma$, et producatur $A\Gamma$ ad H.

Quoniam igitur aequalis est AE rectae $E\Gamma$, BE vero ipsi EZ, duae AE, EB duabus ΓE, EZ aequales sunt, utraque utrique, et angulus AEB angulo $ZE\Gamma$ aequalis est, ad verticem enim est (Prop. 15.); basis igitur AB basi $Z\Gamma$ aequalis est, et triangulum ABE triangulo $ZE\Gamma$ aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt, uterque utrique, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis igitur est BAE ipsi $E\Gamma Z$. Maior autem est angulus $E\Gamma\Delta$

circulum in demonstrando si evitare volebat, denuo I. 16. ex I. 32. deducere poterat. Laudandus potius est Euclides, qui pedetentim ad magis ardua progressus facilioribus difficiliora tam apte superstruere norat.

Cor. (Procli). Ex uno puncto extra aliquam rectam posito ad eam haud plures quam duae rectae aequales duci possunt, ut ex I. 5. et I. 16. facile consequitur, vel aliter: Circulus rectam in pluribus quam duobus punctis secare nequit. Cf. III. 2. Cor. 1. Praeterea Proclus monet, etiam I. 17. non nisi consectarium esse huius I. 16.

ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ὁμοίως δὲ, τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν; ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα καὶ τὰ ἑζῆς.

PROPOSITIO XVII.

Obs. Aliam adhuc huius propositionis demonstrationem habet Proclus, in qua recta *ΒΓ* non producitur, at ab *Α* ad punctum quodcunque rectae *ΒΓ* recta ducitur.

Cor. 1. In omni triangulo, cuius unus angulus rectus est aut obtusus, reliqui acuti sunt. Cf. Clavius. Hinc patet ratio, cur Def. 27. 28. 29. ita, ut factum est, expressae fuerint. Cf. Pfleideler. in Hauberi Chrestom. Geom. p. 309.

Cor. 2. Omnes anguli trianguli aequilateri, et duo an-

angulo *ΕΓΖ* (Ax. 9.); maior est igitur *ΑΓΔ* ipso *ΒΑΕ*. Similiter autem, *ΒΓ* secta bifariam, ostendemur et *ΒΓΗ*, hoc est *ΑΓΔ* (Prop. 15.), maior et ipso *ΑΒΓ*. Omnis igitur etc.

PROPOSITIO XVII. (Fig. 23.)

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum *ΑΒΓ*; dico trianguli *ΑΒΓ* duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse.

Producatur enim *ΒΓ* ad *Δ* (Post. 2.).

Et quoniam trianguli *ΑΒΓ* exterior est angulus *ΑΓΔ*, maior est interiore et opposito *ΑΒΓ* (Prop. 16.). Communis addatur *ΑΓΒ*; ergo *ΑΓΔ*, *ΑΓΒ* angulis *ΑΒΓ*, *ΒΓΑ* maiores sunt (Ax. 4.). Sed *ΑΓΔ*, *ΑΓΒ* duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); ergo *ΑΒΓ*, *ΒΓΑ* duobus rectis minores sunt. Similiter autem ostendemus et *ΒΑΓ*, *ΑΓΒ* duobus rectis minores esse, et adhuc ipsos *ΓΑΒ*, *ΑΒΓ*. Omnis igitur etc.

guli ad basin trianguli aequicruri sunt acuti, anguli externi autem, qui iis adiacent, obtusi. Cf. Clavius.

Cor. 3. In triangulo, in quo duo anguli inaequales sunt, minor eorum est acutus.

Cor. 4. (Procli). A puncto quocunque extra rectam posito non nisi unum perpendiculum ad eam demitti potest.

Cor. 5. Si e puncto aliquo rectae, quae oblique instet alteri rectae, adeoque ex altera sui parte cum ea acutum, ex

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ. Παντὸς ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

altera obtusum angulum efficiat, ad hanc alteram demittatur perpendiculum, cadet id ad partes anguli acuti. Cf. Pfleiderer. l. c.

Cor. 6. Quod e vertice trianguli in basin demittitur perpendiculum, incidet in ipsam basin, aut in terminum eius extremum, aut in basin productam, prout angulorum ad basin, vel uterque acutus, vel alter rectus, vel denique alter obtusus erit. Cf. Pfleiderer. l. c.

PROPOSITIO XVIII.

Obs. Aliam e Porphyrio demonstrationem addit Proclus, in qua (Fig. 25.) sumta $\Gamma\Delta = AB$, producitur $B\Delta$ ultra B ad punctum aliquod E, ita ut BE aequalis fiat rectae $A\Delta$, ac deinde iungitur $E\Gamma$, ubi facile patet, esse $AB\Gamma = A\Gamma E$ (I. 5.),

PROPOSITIO XVIII. (Fig. 24.)

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

Sit enim triangulum $AB\Gamma$, maius habens latus $A\Gamma$ latere AB; dico et angulum $AB\Gamma$ maiorem esse angulo $B\Gamma A$.

Quoniam enim recta $A\Gamma$ maior est recta AB, ponatur rectae AB aequalis $A\Delta$ (Prop. 3.), et iungatur $B\Delta$.

Et quoniam trianguli $B\Gamma\Delta$ exterior est angulus $A\Delta B$, maior est interiore et opposito $A\Gamma B$ (Prop. 16.). Aequalis autem angulus $A\Delta B$ angulo $AB\Delta$, quia et latus AB lateri $A\Delta$ est aequale; maior igitur et $AB\Delta$ ipso $A\Gamma B$; multo igitur $AB\Gamma$ maior est ipso $A\Gamma B$. Omnis igitur trianguli etc.

PROPOSITIO XIX. (Fig. 26.)

Omnis trianguli maiorem angulum maius latus subtendit.

adeoque $AB\Gamma$ [$> A\Delta\Gamma$ (I. 16.)] $> A\Gamma E > A\Gamma B$. Caeterum notetur huius et 19. cum 5. et 6. Analogia, quam etiam Proclus innuit.

Cor. 1. In triangulo scaleno omnes etiam anguli inaequales erunt, maiores nempe, qui maioribus lateribus opponuntur; et in quovis triangulo non aequilatero ii, qui minoribus lateribus opponuntur anguli, acuti erunt. Cf. Clavius u. Pfleiderer. l. c. p. 310.

Cor. 2. Trianguli aequicruri angulus ad verticem maior aut minor erit quolibet angulo ad basin, prout basis maior aut minor est quovis crure. Cf. Pfleiderer. l. c.

Cor. 3. In quovis triangulo perpendiculum demissum a vertice opposito in latus, quod non minus est utrovis reliquo,

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἢ ἐλάσσων· ἴση μενοῦν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἄν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ. Οὐ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

intra triangulum cadit. Tum nempe, anguli ad basin acuti erunt (Cor. 1.), unde ex Cor. 6. praecedentis res consequitur. Cf. Pfleiderer. l. c.

PROPOSITIO XIX.

Obs. Aliam directam, at operosiorem huius propositionis, quae conversa est praecedentis, demonstrationem habet Proclus, quam etiam Clavius affert, deductam ex praemissis lemmate, quo docetur: Si in triangulo angulus bisecetur, et recta bisecans secet basin in partes inaequales, latera etiam angulum ad verticem comprehendentia inaequalia fore, et maius quidem id, quod maiori basis segmento adiacet. Quod ipsum lemma etiam converti potest. Cf. Clavius. Campani nostra 18. est 19., et contra, unde et alias habet demonstrationes.

Cor. 1. In triangulo, cuius omnes anguli sunt inaequales, latera etiam sunt inaequalia; maius nempe, quod maiori

Sit triangulum $AB\Gamma$, maiorem habens angulum $AB\Gamma$ angulo $B\Gamma A$; dico et latus $A\Gamma$ latere AB maius esse.

Si enim non; vel aequalis est $A\Gamma$ rectae AB, vel minor; aequalis quidem non est $A\Gamma$ rectae AB, aequalis enim esset et angulus $AB\Gamma$ angulo $A\Gamma B$ (Prop. 5.). Non est autem; non igitur aequalis est $A\Gamma$ rectae AB. Neque tamen minor est $A\Gamma$ recta AB; minor enim esset et angulus $AB\Gamma$ angulo $A\Gamma B$ (Prop. 18.); non est autem; non igitur minor est $A\Gamma$ recta AB. Ostensum est autem neque aequalem esse; maior igitur est $A\Gamma$ recta AB. Omnis igitur etc.

PROPOSITIO XX. (Fig. 27.)

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocunque sumpta.

angulo opponitur. Cf. Pfleiderer l. c., qui etiam reliqua corollaria habet.

Cor. 2. Trianguli aequicruri basis maior aut minor erit quovis crure, prout angulus ad verticem maior aut minor est quolibet angulo ad basin.

Cor. 3. In triangulo rectangulo aut obtusangulo latus angulo recto aut obtuso oppositum maius est quovis reliquo.

Cor. 4. Si e puncto aliquo ad rectam ducantur duae rectae, quarum sit una ad eam perpendicularis, ea erit minor altera. Vel: Omnium rectarum, quae e puncto aliquo in eam extra id punctum transeuntem duci possunt, minima est ea, quae isti rectae est perpendicularis, quae ipsa etiam distantia, minima nempe, istius puncti a linea dicitur. Cf. Gravius.

Cor. 5. Si e puncto aliquo ad rectam ducantur perpendicularis et ex eadem perpendiculi parte duae aliae rectae,

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒ
τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰ
πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς Β
αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς Α

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθ
τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία
ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ[1]· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τ

1) ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστίν. H
verba, quae hic habent edd. Basil. et Oxon. consentiente C
a. omittit Peyrard. Nec sane sunt necessaria.

harum quae perpendiculo propior est, minor est altera: e
diversis perpendiculi partibus duae tantum aequales rectae d
possunt.

PROPOSITIO XX.

Obs. Proclus refert, Epicuraeos Geometras irrisisse, hanc propositionem asinis quoque notam esse dixisse, q recta pergant, ubi foenum sit. Quod ludibrium quam in ptum sit, ubi non de eo agatur, quid sensibus videat (κατὰ τὴν αἴσθησιν), sed de scientia philosophica, quam ἐπ στημονικὸν λόγον vocat Proclus, omnes vident. Nec axiom tum numerus, ut monet Rob. Simson., sine necessitate auge dus est. Plures adhuc alias huius propositionis demonstratio nes affert Proclus, e quibus e schola Philonis et Porphyr hanc satis simplicem: In triangulo quocunque ΑΒΓ (Fig. 28. si bisecetur angulus ΒΑΓ recta ΑΔ, quae basin secet in Δ erit angulus ΒΔΑ > ΔΑΓ (I. 16.). At ΔΑΓ = ΔΑΒ ex constr Itaque ΒΔΑ > ΔΑΒ, quare ΒΑ > ΒΔ (I. 19.). Eodem mod monstratur, esse ΑΓ > ΔΓ, quare ΒΑ + ΑΓ > ΒΔ + ΔΓ i. e > ΒΓ. Alii, ut Ambrosius Rhodius, e definitione rectae Ar chimedea immediate hoc assertum deducunt, quod non Ram solum, sed etiam Tacqueto, Coëtsio, aliisque simplicissimum visum fuit. At an Euclidis adsensum obtinere potuisset, du

Sit enim triangulum $AB\Gamma$; dico $AB\Gamma$ trianguli a latera reliquo maiora esse, quomodocunque sumta; nempe BA, $A\Gamma$ latere $B\Gamma$, et AB, $B\Gamma$ latere $A\Gamma$, et $B\Gamma$, ΓA latere AB.

Producatur enim BA ad punctum Δ, et ponatur rectae ΓA aequalis $A\Delta$ (Prop. 3.), et iungatur $\Delta\Gamma$.

Quoniam igitur aequalis est ΔA rectae $A\Gamma$, aequalis est et angulus $A\Delta\Gamma$ angulo $A\Gamma\Delta$ (Prop. 5.), ma-

pirandum omnino videtur. Et ipsi Archimedi proprie id non definitio est, sed λαμβανόμενόν τι, ut ad Def. 4. diximus.

Cor. 1. Trianguli aequicruri unumquodque aequalium crurum maius est dimidia basi. Cf. Pfleiderer. l. c. p. 312.

Cor. 2. In triangulo non aequicruro differentia duorum aequalium laterum minor est tertio latere. Nempe quum (Fig. 27.) $BA+A\Gamma>B\Gamma$, erit demta utrimque recta $A\Gamma$, $BA>B\Gamma-A\Gamma$, vel $B\Gamma-A\Gamma<BA$, atque ita pariter circa reliqua latera.

Cor. 3. In quovis triangulo summa omnium laterum simul sumptorum maior est, quam duplum cuiuscunque lateris. Nam, quum $BA+A\Gamma>B\Gamma$, erit, utrimque addito $B\Gamma$, $BA+A\Gamma+B\Gamma>2B\Gamma$.

Cor. 4. In quovis triangulo omnia latera simul sumpta minora sunt duplo duorum quorumcunque laterum. Quum rursum $B\Gamma<BA+A\Gamma$ erit, utrimque additis $BA+A\Gamma$, $B\Gamma+BA+A\Gamma<2BA+2A\Gamma$. Haec tria proxime praecedentia corollaria sunt e Borellio. Cf. Pfleiderer. l. c.

Cor. 5. In quavis figura rectilinea quodvis latus est minus summa reliquorum. Cf. Pfleiderer. l. c. Verbi causa in Figura quadrilatera $AB\Gamma\Delta$ (Fig. 29.) ducta diametro $B\Gamma$, erit $A\Gamma+B\Gamma>AB$. At $\Gamma\Delta+B\Delta>B\Gamma$, unde eo magis $A\Gamma+\Gamma\Delta+B\Delta>AB$, atque eodem modo in figuris, quae plura latera habent, etiam, si angulos habent introrsum vergentes, res demonstrabitur. Conversam huius propositionis, nempe, si rectae quotcunque v. c. n datae sint, quarum quaevis minor

ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ, μείζ
ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ
τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει
ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. Ἴση δὲ ἡ ΔΒ τ
ΑΒ, ΑΓ [1]· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς Β
Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ
ΓΑ μείζονές εἰσιν· αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ. Παν
ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τ
περάτων [2] δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσ
θεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλ
σόνες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρ
τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθε

1) Peyrard. habet lectionem Cod. a: ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ Α
nos praetulimus lectionem edd. Basil. et Oxon. ut consequen
bus magis aptam.
2) Proclus habet: ἀπὸ τῶν περάτων ἀρξάμεναι.

est summa reliquarum, construi inde posse figuram tot la
rum (n), quot rectae datae sunt, demonstrat Develey Ele
de Géom. Livr. II. Ch. II. §. 41.

Cor. 6. Pari ratione ostenditur, quamvis ab uno punc
ad alterum ductam rectam minorem esse quavis in eode
plano inter haec puncta ducta linea fracta i. e. composita
pluribus rectis sub angulis quibuscunque inter se iunct
Cf. Pfleiderer. l. c.

Cor. 7. In quavis figura rectilinea summa omnium l
terum maior est duplo uniuscuiusque lateris figurae. Sit eni
hoc latus A, summa omnium laterum $=\Sigma$, erit summa rel
quorum laterum $=\Sigma-A$, et ex Cor. 6. $\Sigma-A>A$, unde,
A utrimque addatur, $\Sigma>2A$, vel $\frac{\Sigma}{2}>A$. Cf. Pfleiderer. l.

igitur est $B\Gamma\Delta$ angulo $\Delta\Delta\Gamma$ (Ax. 9.); et quoniam triangulum est $\Delta\Gamma B$, maiorem habens angulum $\Gamma\Delta$ angulo $B\Delta\Gamma$, maiorem autem angulum maius ... subtendit; ΔB igitur recta $B\Gamma$ maior est (Prop. ...); aequalis autem ΔB rectis ΔB, $\Delta\Gamma$; maiores ... $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ recta $B\Gamma$. Similiter autem ostendemus et ΔB, $B\Gamma$ recta $\Gamma\Delta$ maiores esse; et $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ recta ΔB. Omnis igitur etc.

PROPOSITIO XXI. (Fig. 30.)

Si a terminis uniùs lateris trianguli duae rectae intus constituantur, hae reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim $\Delta B\Gamma$ super uno latere $B\Gamma$, a terminis B, Γ, duae rectae intus constituantur $B\Delta$,

Cor. 8. In quavis figura rectilinea summa omnium laterum minor est duplo summae omnium laterum praeter unum. Sit hoc unum latus A, et summa omnium laterum, ut in praecedente Cor. $=\Sigma$, eritque $\Sigma-A>A$, unde, si utrimque addatur $\Sigma-A$, erit $2(\Sigma-A)>\Sigma$, vel $\Sigma<2(\Sigma-A)$, vel $\frac{\Sigma}{2}<\Sigma-A$.

PROPOSITIO XXI.

Obs. Addi potest, valere etiam propositionem, si punctum, quod hic intra triangulum positum sumebatur, sit in ipsoro trianguli latere v. c. si punctum Δ (Fig. 30.) cum puncto B coincidat. Aliam adhuc demonstrationem habet Clavius (Euclid. Elem. VI. libr. prior. Lugd. Batav. 1692. p. 82.), quae tamen non generaliter valet. Ostendere nempe vult, esse tam $\Delta B>B\Delta$, quam $\Delta\Gamma>\Gamma\Delta$, quod neutiquam necesse est. Probe autem notandum est, ut vera sit propo-

ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι αἱ Β
ΔΓ πλευραὶ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρ
τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσι, μείζονα δὲ γωνί
περιέχουσι, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τ
λοιπῆς μείζονές εἰσι, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δ
πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν· κοι
προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, Ε
μείζονές εἰσιν. Πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου
δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσ
κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν Γ
ΔΒ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζον
ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, Α
τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσιν.

sitio, a *terminis extremis* basis ducendas esse rectas intra tr angulum constituendas. Proclus enim demonstrat, hac co ditione omissa, multa esse triangula, quibus alia inscribi po sint, quorum duo latera simul sumpta maiora sint lateribus tr anguli ambientis, aut etiam, quae angulum comprehenda minorem eo, quem latera trianguli ambientis comprehendun Cf. Isaaci Monachi Scholia in Euclid. Elem. libr. VI. prio Argentor. 1589. Sit nempe (Fig. 31.) triangulum *ABI* cuius angulus *ABΓ* vel rectus sit, vel obtusus. Ducatur a punctum baseos quodcunque *Δ* recta *AΔ*, eritque in triangul *ABΔ* recta $AΔ > AB$ (Prop. 19. Cor. 3.). Sumatur $ΔE = AB$ rectaque *AE* bisecetur in puncto *Z* (Prop. 10), iungaturqu *ZΓ*, eritque $AZ + ZΓ > AΓ$ (Prop. 20.) i. e. $ZE + ZΓ > AΓ$ ideoque, additis utrimque aequalibus *ΔE*, *AB*, erit $ZE +$ $ΔE + ZΓ > AΓ + AB$ i. e. $ZΔ + ZΓ > AΓ + AB$. Quin Pappu (Collect. Mathem. III. 3.) ut Rob. Simson. monet, demon strat, latera trianguli alteri inclusi non solum maiora ess posse lateribus trianguli ambientis, sed quamvis etiam ad e

Γ; dico BA, $A\Gamma$ latera reliquis trianguli duobus lateribus BA, $A\Gamma$ minora quidem esse, maiorem vero angulum continere, angulum nempe $B\Delta\Gamma$ angulo $BA\Gamma$.

Producatur enim $B\Delta$ ad E.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt (Prop. 20.), trianguli ABE duo latera AB, AE latere BE maiora sunt. Communis addatur $E\Gamma$; ergo BA, $A\Gamma$ rectis BE, $E\Gamma$ maiores sunt (Ax. 4.). Rursus, quoniam $\Gamma E\Delta$ trianguli duo latera ΓE, $E\Delta$ latere $\Gamma\Delta$ maiora sunt (Prop. 20.); communis addatur ΔB; ergo ΓE, EB rectis $\Gamma\Delta$, ΔB maiores sunt (Ax. 4.). Sed ipsis BE, $E\Gamma$ maiores ostensae sunt BA, $A\Gamma$; multo igitur BA, $A\Gamma$ rectis $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ maiores sunt.

rationem habere, dummodo minor sit dupla. Unde Clairaltio in Praef. ad Geometr. Paris. 1741. non adeo superflua videri debebat Euclidis demonstratio. Pariter, quod ad angulum attinet, ita Proclus pergit. Sit (Fig. 32.) triangulum $AB\Gamma$ (Proclus quidem dicit triangulum aequicrurum, ut nempe $AB=A\Gamma$, quod tamen haud necessarium esse videtur), cuius maximum latus $B\Gamma$, a quo abscindatur $B\Delta=BA$, et in ducta $A\Delta$ sumatur punctum quodcunque E, et iungatur $B\Gamma$. Erit itaque angulus $BA\Delta=B\Delta A$ (I. 5.). At $BAA>AE\Gamma$ (I. 16.). Itaque et $BA\Delta>AE\Gamma$, et multo magis $BA\Gamma>AE\Gamma$. Unde patet, et quoad angulum necessariam esse illam conditionem, ut a punctis *extremis* baseos ductae sint rectae ad punctum intra triangulum.

Cor. 1. In figura quadrilatera $AB\Gamma\Delta$ (Fig. 33.) in qua unus angulus Δ introrsum vergit (ita nempe constructus, ut rectas eum comprehendentes, si producantur, intra figuram cadant) summa laterum $B\Delta+\Gamma\Delta$ hunc angulum comprehendentium minor est summa reliquorum laterum $BA+A\Gamma$, quod,

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν· τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα [1]) καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας [2]).

1) Διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα. Ita cum edd. Basil. et Oxon. posuimus. Peyrard. secutus Cod. a. habet: διὰ ταῦτα τοίνυν.

2) Peyrard. addit e Cod. a: διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας. Nos haec verba cum edd. Basil. et Oxon. omisimus, quod glossam sapere viderentur, et alibi quoque, ubi problemata occurrunt, quae determinatione aliqua vel limitatione opus habent, in ipso problematis enunciato huius limitationis ratio reddi haud solet v. c. in VI. 28.

ducta recta ΒΓ, statim apparet. Eius generis figuram Proclus ad I. Def. 24. satis insulse τρίγωνον τετράπλευρον, triangulum quadrilaterum, nominat, angulum nempe ad Δ haud pro vero angulo reputans. Rectius, ut ibidem refert, Zenodorus κοιλογώνιον (σχῆμα) vocabat.

Cor. 2. Quadrilaterum aequilaterum angulum introrsum vergentem habere nequit, summa potius rectarum, quae angulum introrsum vergentem comprehendunt, minor est summa duorum reliquorum quadrilateri laterum.

Cor. 3. Si super ΒΓ (Fig. 34.) alia figura rectilinea quaecunque, quae non habeat angulos introrsum vergentes, intra triangulum ΑΒΓ constituta sit, v. c. quadrilatera figura

Iursus, quoniam omnis trianguli exterior angulus interior et opposito maior est (Prop. 16.), $\Gamma\Delta E$ trianguli exterior angulus $B\Delta\Gamma$ maior est angulo $\Gamma E\Delta$. Eadem ex ratione et ABE trianguli exterior angulus ΓEB maior est angulo $BA\Gamma$. Sed angulo ΓEB maior ostensus est $B\Delta\Gamma$; multo igitur $B\Delta\Gamma$ maior est angulo $BA\Gamma$. Si igitur etc.

PROPOSITIO XXII. (Fig. 35.)

Ex tribus rectis, quae sunt aequales tribus datis rectis, triangulum constituere; oportet autem duas reliqua maiores esse, utcunque sumptas.

$B\Delta E\Gamma$, summa laterum $AB+A\Gamma$ semper maior erit summa laterum istius figurae $B\Delta+\Delta E+E\Gamma$. Ducta enim AB, producatur $B\Delta$, dum rectae AE occurrat in Z, tum iungantur $Z\Gamma$, $A\Gamma$, eritque ex nostra propositione, $Z\Delta+Z\Gamma>\Delta E+E\Gamma$, unde, addita utrimque ΔB, erit $\Delta B+Z\Delta+Z\Gamma$ i. e. $ZB+Z\Gamma>B\Delta+\Delta E+E\Gamma$. At ex nostra propositione $AB+A\Gamma>ZB+Z\Gamma$, unde tanto magis $AB+A\Gamma>B\Delta+\Delta E+E\Gamma$. Et similis erit demonstratio in figuris plurium laterum.

Cor. 4. Pariter, si super eadem basi, ad easdem eius partes, duae figurae rectilineae, quae angulos introrsum vergentes non habeant, constituantur una intra alteram, perimeter exterioris maior est perimetro interioris. Idemque valet, si utrimsque perimetrum intelligas, demta utrimque basi communi, quin etiam, si interior atque exterior figura unum alterumve latus praeter basin commune habeant. Haec corollaria sunt ex schedis Pfleidereri. Vid. Hauberi Chrest. p. 133. sqq.

PROPOSITIO XXII.

Obs. 1. Ostendendum erat, quod et Proclus facere tentavit, circulos centro H, intervallo $H\Theta=\Gamma$, et centro Z, intervallo $Z\Delta=A$ descriptos, si problematis conditiones serven-

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι·

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ

tur, se invicem secare. Quod ita fere demonstrari poterit. Si isti circuli se invicem non secent, vel circulus centro H descriptus (circulum H vocabimus) complectetur totum circulum centro Z descriptum, quem circulum Z vocabimus; vel circulus Z complectetur circulum H; vel uterque extra alterum positus erit. Casu primo ΘH aequalis aut maior esse deberet, quam $HZ+ZA$ i. e. $\Gamma \geqq B+A$, contra hypothesin. Secundo casu foret $ZA \geqq HZ+H\Theta$ i. e. $A \geqq B+\Gamma$, pariter contra hypothesin. Tertio foret $HZ \geqq H\Theta+ZA$ i. e. $B \geqq \Gamma+A$, pariter

Sint datae tres rectae A, B, Γ, quarum duae reliqua maiores sint, utcunque sumptae, nempe A, B maiores, quam Γ; A, Γ autem maiores, quam B; denique B, Γ maiores, quam A; oportet igitur ex rectis aequalibus ipsis A, B, Γ triangulum consituere.

Exponatur aliqua recta ΔE, terminata quidem ad Δ, infinita vero versus E; et ponatur rectae A aequalis ΔZ, rectae vero B aequalis ZH, et rectae Γ aequalis $H\Theta$ (Prop. 3.); et centro quidem Z, intervallo vero $Z\Delta$, circulus describatur $\Delta K\Lambda$ (Post. 3.); et rursus, centro quidem H, intervallo vero $H\Theta$, circulus describatur $K\Lambda\Theta$ (Post. 3.) et iungantur KZ, KH; dico ex tribus rectis, aequalibus ipsis A, B, Γ, triangulum constitutum esse KZH.

Quoniam igitur Z punctum centrum est $\Delta K\Lambda$ circuli, aequalis est $Z\Delta$ ipsi ZK (Def. 15.); sed $Z\Delta$ ipsi A est aequalis; et KZ igitur ipsi A est aequalis (Ax. 1.). Rursus, quoniam punctum H centrum est circuli $\Delta K\Theta$, aequalis est $H\Theta$ ipsi HK (Def. 15.); sed $H\Theta$ ipsi Γ est aequalis; et KH igitur ipsi Γ est aequalis (Ax. 1.). Est autem et ZH ipsi B ac-

contra hypothesin. Itaque circuli se invicem secabunt, et quidem, ut facile patet, tam supra rectam HZ in puncto aliquo K, quam infra illam in puncto aliquo Λ, unde duo triangula HKZ, $H\Lambda Z$, quae vero positione tantum differunt, hac ratione construi poterunt, nec vero plura, ut patet ex I, Cor. 7.

Obs. 2. Quum Proclus Euclidis verba proferat, quae paullo differunt ab iis, quae nunc in textu Graeco leguntur, Commandinus inde concludit, Euclidis demonstrationes aliquibus in locis a Theone immutatas fuisse. Id autem ex levi ista variatione, quam permittere sibi omnino poterat Proclus, qui sensum Euclidis, non minutissima quaevis vocabula, spectaret, haud sequi videtur.

ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσὶν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνίσταται τὸ ΚΖΗ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δυσὶ ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ, βάσει τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυ-

Cor. Triangulum aequicrurum, cujus latus et basis aequent duas rectas datas, similiter construi poterit, dummodo recta, cui latus aequale fieri debet, maior sit dimidia basi (Γ. 20. Cor. 1.). Cf. Pfleiderer. l. c. p. 315.

qualis; tres igitur rectae KZ, ZH, HK tribus A, B, Γ aequales sunt.

Ex tribus igitur rectis KZ, ZH, HK, quae sunt aequales datis rectis A, B, Γ, triangulum constitutum est KZH. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXIII. (Fig. 36.)

Ad datam rectam, et ad punctum in ea, dato angulo rectilineo angulum rectilineum aequalem constituere.

Sit quidem data recta AB, in ea vero punctum A, et datus angulus rectilineus $\Delta\Gamma E$; oportet igitur ad datam rectam AB, et ad punctum in ea A, dato angulo rectilineo $\Delta\Gamma E$ aequalem angulum rectilineum constituere.

Sumantur in utraque ipsarum $\Gamma\Delta$, ΓE quaelibet puncta Δ, E, et iungatur ΔE; et ex tribus rectis, quae sunt aequales tribus $\Gamma\Delta$, ΔE, ΓE, triangulum constituatur AZH (Prop. 22.), ita ut aequalis sit $\Gamma\Delta$ quidem rectae AZ, recta vero ΓE rectae AH, et denique ΔE rectae ZH.

Quoniam igitur duae $\Delta\Gamma$, ΓE duabus ZA, AH aequales sunt, utraque utrique, et basis ΔE basi ZH aequalis, angulus $\Delta\Gamma E$ angulo ZAH est aequalis (Prop. 8.).

Ad datam igitur rectam AB, et ad punctum in ea A, dato angulo rectilineo $\Delta\Gamma E$, aequalis angulus

PROPOSITIO XXIII.

Paullo simplicior fit constructio, si sumatur $\Gamma\Delta = \Gamma E$, ideoque $AZ = AH$. Caeterum hoc problema ab Oenopide inventum esse, Proclus refert. Pari ratione datis duobus lateri-

γράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ,

bus trianguli et angulo, quem comprehendunt, aliud ei aequale triangulum constituetur.

PROPOSITIO XXIV.

Praeter eum casum, qui in textu Graeco habetur, duos adhuc alios esse, Proclus monet, eosque habent etiam Campanus, Commandinus, Clavius, Orontius Finneus, Billingsley aliique. Nempe punctum H non tantum, ut est in Graecis exemplaribus, supra EZ, verum etiam (Fig. 38. a.) in ipsam EZ, vel infra eam (Fig. 38. b.) cadere potest. At etiam his casibus facilis est demonstratio. Cadat enim (Fig. 38. a.) punctum H in rectam EZ, eritque, ob angulum $E\Delta H > E\Delta Z$, necessario punctum H in recta EZ ultra Z producta, i. e. erit EH vel $B\Gamma > EZ$. Sin autem punctum H (Fig. 38. b.) cadet infra rectam EZ, erit triangulum $EZ\Delta$ intra triangulum $EH\Delta$, adeoque $\Delta Z + EZ < \Delta H + EH$ (I. 21.) adeoque, quum ex hyp.

rectilineus constitutus est ZAH. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXIV. (Fig. 37.)

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, angulum autem angulo maiorem habeant, qui ab aequalibus lateribus continetur; et basin basi maiorem habebunt.

Sint duo triangula $ABΓ$, $ΔEZ$, duo latera AB, $AΓ$ duobus lateribus $ΔE$, $ΔZ$ aequalia habentia, utrumque utrique, latus nempe AB lateri $ΔE$, latus vero $AΓ$ lateri $ΔZ$, angulus autem $BAΓ$ angulo $EΔZ$ maior sit; dico et basin $BΓ$ basi EZ maiorem esse.

Quoniam enim maior est $BAΓ$ angulus $EΔZ$ angulo, constituatur ad $ΔE$ rectam, et ad punctum in

sit $EZ=AΓ$ i. e. ex constr. $=ΔH$, erit $EZ<EH$ (Ax. 5.). Caeterum potest etiam res brevius absolvi eo fere modo, quo Rob. Simson utitur, quem exactioris demonstrationis causa paulo tantum immutatum sistimus. Sit nempe (Fig. 39.) $BA=ΔE$, $AΓ=ΔZ$, et angulus $BAΓ=EΔZ$, et ad BA, eam rectarum BA, $AΓ$, quae non maior est altera, constituatur angulus $BAΔ=EΔZ$ (I. 23.), et fiat $AΔ=ΔZ$, et iungantur $BΔ$, $ΔΓ$, eritque (I. 4.) $BΔ=EZ$. Quum igitur angulus $BAΔ=EΔZ$ sit ex hypoth. minor angulo $BAΓ$, recta $AΔ$ intra angulum $BAΓ$ cadet, adeoque recta $AΔ$, si opus sit, producta, secabit rectam $BΓ$. Secet eam in M, eritque $AMΓ>ABΓ$ (I. 16.). At ob $AB \overset{=}{<} AΓ$ ex hypoth. erit $ABΓ \overset{=}{>} AΓB$ (I. 5. et I. 19.) unde semper $AMΓ>AΓB$, adeoque $AM<AΓ$ (I. 19.) adeoque, quum $AΔ=AΓ$, punctum $Δ$ infra $BΓ$ cadet. Et quum $AΔ=AΓ$, erit $AΔΓ=AΓΔ$ (I. 5.), adeoque $BΔΓ>BΓΔ$ et $BΓ$

καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΔΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ, τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. Καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. Ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

>ΒΔ (I. 19.) i. e. ΒΓ>ΕΖ. Atque hac Pfleidereri demonstratione (vid. Hauberi Chrestom. p. 315. sqq.) satisfactum est iis, quae in Rob. Simsoni demonstratione adhuc desiderarat Thomas Simpson. (Elem. of Geometry London 180[illegible] p. 262.), ostenso, punctum Δ necessario infra ΒΓ cadere. Caeterum, ut Proclus observat, conditiones problematis, non definiunt, utrum et quo casu triangula ΔΒΓ, ΔΕΖ inter

et Δ, $B\Delta\Gamma$ angulo aequalis $E\Delta H$ (Prop. 23.); et ponatur alterutri ipsarum $\Delta\Gamma$, ΔZ aequalis ΔH (Prop. 3.), et iungantur EH, ZH.

Quoniam igitur aequalis est AB quidem rectae ΔE, $\Delta\Gamma$ vero rectae ΔH, duae BA, $\Delta\Gamma$ duabus $E\Delta$, ΔH aequales sunt, utraque utrique, et angulus $B\Delta\Gamma$ angulo $E\Delta H$ aequalis est; basis igitur $B\Gamma$ basi EH est aequalis (Prop. 4.). Rursus, quoniam aequalis est ΔZ rectae ΔH, aequalis est et angulus ΔZH angulo ΔHZ (Prop. 5.); maior igitur ΔZH angulo EHZ; multo igitur maior est EZH angulo EHZ. Et quoniam triangulum est EZH, maiorem habens angulum EZH angulo EHZ; maiorem autem angulum maius latus subtendit (Prop. 19.); maius igitur et latus EH latere EZ. Aequale autem EH lateri $B\Gamma$; maius igitur et $B\Gamma$ latere EZ. Si igitur duo etc.

PROPOSITIO XXV. (Fig. 40.)

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, basin autem basi maiorem habeant; et angulum angulo maiorem habebunt, qui ab aequalibus rectis continetur.

aequalia, aut utrum maius sit altero, quod demum ope I. 38. determinari poterit. Alias adhuc observationes et consectaria Heidereri vid. l. c.

PROPOSITIO XXV.

Obs. Alias huius propositionis, quae converta est prioris, demonstrationes, easque directas, at prolixiores, ex Menelao et Heronе affert Proclus, quas etiam videre est apud Clavium, in quibus autem varii casus, qui locum habere possunt, notari

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύ πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τ ΑΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεω τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων· ἴσ μενοῦν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, ἴση γο ἂν ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δ οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπ ΕΔΖ. Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἑξῆ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνία ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μι

debebant, observante Haubero Chrestom. p. 270. sqq. C Pfleidereri observationes et consectaria ibid. p. 319. sq.

PROPOSITIO XXVI.

Obs. 1. Prima huius propositionis pars, quum nempe unu latus cum angulis ei adiacentibus unius trianguli aequale e uni lateri atque angulis adiacentibus in altero triangulo faci per superpositionem directe demonstratur: Ob analogiam aute casus posterioris sine dubio Euclides similiter ac partem post riorem demonstrare maluit. Caeterum Thaleti hoc theoren tribuere Eudemum in historiis geometricis, Proclus refe Latus autem si in uno triangulo id sumatur, quod uni aequ lium angulorum oppositum est, in altero triangulo pariter ill

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ, duo latera AB $A\Gamma$ duobus lateribus ΔE, ΔZ aequalia habentia, utrumque utrique, AB quidem lateri ΔE, $A\Gamma$ vero lateri ΔZ, basis autem $B\Gamma$ basi EZ maior sit; dico et angulum $BA\Gamma$ angulo $E\Delta Z$ maiorem esse.

Si enim non, vel aequalis est ei, vel minor; aequalis autem non est $BA\Gamma$ ipsi $E\Delta Z$, aequalis enim esset et basis $B\Gamma$ basi EZ (Prop. 4.); non est autem; non igitur aequalis est angulus $BA\Gamma$ ipsi $E\Delta Z$. At neque minor est $BA\Gamma$ ipso $E\Delta Z$, minor enim esset et basis $B\Gamma$ basi EZ (Prop. 24.); non est autem; non igitur minor est $BA\Gamma$ angulus ipso $E\Delta Z$. Ostensum est autem neque aequalem esse; maior igitur est $BA\Gamma$ ipso $E\Delta Z$. Si igitur duo etc.

PROPOSITIO XXVI. (Fig. 41.)

Si duo triangula duos angulos duobus angulis aequales habeant, utrumque utrique, et unum latus uni lateri

sumendum erit, et contra. Caeterum etiam hic valet, quod in *Prop.* 8. diximus, triangula etiam ipsa esse aequalia.

Obs. 2. Quatuor hactenus casibus duo triangula inter se aequalia esse vidimus, nempe

1) si unum latus et duo anguli adiacentes,

2) si unum latus, et unus angulus ei lateri adiacens, atque angulus ei oppositus in utroque angulo sint aequalia. Atque haec quidem in nostra propositione.

3) Si duo latera cum angulo, quem comprehendunt, aequalia sint utrimque (I. 4.)

4) Si omnia tria latera utrimque aequalia sint (I. 8.). Restat adhuc casus 5., quo duo triangula inter se aequalia esse possunt, nempe, si duo latera cum angulo uni eorum opposito

ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑπ
τείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπ
πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέρ
ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο γ
νίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖ
ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒ
τῇ ὑπὸ ΔΕΖ τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ κ
μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον, τὴν πρὸς τα
ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω, οτι καὶ τὰς λοιπ
πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκ
τέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λ
πὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔ.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτ
μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω
ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ
ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσ
εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γω
τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει
ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τ
γώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπ

utrimque aequalia sint. Hoc tamen casu, si nulla alia det
minatio accedat, aequalitatem triangulorum *generatim* asser
non licebit, quod etiam Proclus observat p. 91. Sit enim (F
42.) triangulum aequicrurum *ΑΒΓ*, et producatur basis
ad punctum aliquod *Δ*, ducaturque *ΑΔ*. Iam duo triang
ΑΓΔ, *ΑΒΔ* habent latus quidem *ΑΔ* commune, deinde *ΑΓ*
ΑΒ ex hypoth. et angulum etiam *Δ* communem, qui lateri
ΑΓ, *ΑΒ* opponitur, et manifestum tamen est, triangula i
non esse aequalia, quum unum *ΑΒΔ* sit tantum pars alteri
ΑΓΔ. Aequalia tamen inter se esse duo triangula demonstrabit

aequale, vel quod est ad aequales angulos, vel quod subtendit unum aequalium angulorum; et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo.

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ, duos angulos $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ duobus ΔEZ, $EZ\Delta$ aequales habentia, utrumque utrique, $AB\Gamma$ quidem angulo ΔEZ, $B\Gamma A$ vero angulo $EZ\Delta$, habeant autem et unum latus uni lateri aequale; primum, quod est ad aequales angulos, latus $B\Gamma$ lateri EZ; dico et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habitura esse, utrumque utrique, AB quidem lateri ΔE, $A\Gamma$ vero lateri ΔZ, et reliquum angulum reliquo angulo, $BA\Gamma$ angulo $E\Delta Z$.

Si enim inaequalis est AB rectae ΔE, una earum maior est. Sit maior AB, et ponatur rectae ΔE aequalis BH, et iungatur $H\Gamma$.

Quoniam igitur aequalis est BH quidem rectae ΔE, $B\Gamma$ vero rectae EZ, duae BH, $B\Gamma$ duabus ΔE, EZ aequales sunt, utraque utrique, et angulus $HB\Gamma$ angulo ΔEZ aequalis est; basis igitur $H\Gamma$ basi ΔZ aequalis est, et $HB\Gamma$ triangulum ΔEZ triangulo aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales

Si utrumque unum angulum uni aequalem habeant, circa alios item angulos latera aequalia, reliquorum vero angulorum utrumque simul minorem aut non minorem recto; et ostendetur angulos etiam aequales esse, circa quos aequalia sunt latera, et tertium latus tertio lateri fore aequale. Sit nempe (Fig. 8) angulus $A=\Delta$, et $AB=\Delta B$, $B\Gamma=EZ$, et 1) anguli Γ, Z aequi; eritque $AB\Gamma=\Delta EZ$, et $A\Gamma=\Delta Z$, et duo triangula aequalia. Si enim non sit angulus $AB\Gamma=\Delta EZ$, erit alteruter maior altero. Sit, si fieri potest, $AB\Gamma$ maior angulo ΔEZ, et fiat $ABH=\Delta EZ$, eritque in triangulis ABH, ΔEZ, $AB=\Delta B$

γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν, ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

(hypoth.), angulus $A=\Delta$ pariter ex hypoth. et $AB=\Delta E$ (hypoth.): itaque $AHB=\Delta ZE$ (I. 25.), et $BH=EZ$ i. e. e hypoth. $=B\Gamma$. Quum autem ex hypoth. sit angulus Z acutus acutus erit AHB, unde $BH\Gamma$ obtusus (I. 14.). At $B\Gamma H$ tr angulum, ut ostendimus, aequicrurum est, unde $BH\Gamma$ etiam acutus erit (I. 17. Cor. 2.) q. e. a. Sint autem 2 anguli Γ, non minores recto, atque ostendetur ut ante, esse triangulum $BH\Gamma$ aequicrurum, adeoque angulum Γ acutum vel minorem recto (I. 17. Cor. 2.), quem tamen non minorem esse rect posuimus, q. e. a. Caeterum, si angulus A et Δ rectus v obtusus sit, necessario acutus erit angulus Γ et Z (I. 17.), unde tum nova circa hos angulos determinatione non opus est. P iter, si sit $AB<B\Gamma$, adeoque $\Delta E<EZ$, erit angulorum Γ Z uterque acutus (I. 18. Cor. 1.), unde etiam tum res nova d monstratione haud eget. Quum vero demonstratum fuerit, es angulum $AB\Gamma=\Delta EZ$, erunt tum ex I. 4. etiam ipsa triangul

eunt, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis igitur $HΓB$ angulus angulo $ΔZE$. Sed $ΔZE$ angulo $BΓA$ ponitur aequalis; igitur et $BΓH$ angulo $BΓA$ aequalis est, minor maiori, quod fieri nequit. Non igitur inaequalis est AB rectae $ΔE$; aequalis igitur est. Est autem et $BΓ$ rectae EZ aequalis, duae igitur AB, $BΓ$ duabus $ΔE$, EZ aequales sunt, utraque utrique, et angulus $ABΓ$ angulo $ΔEZ$ est aequalis; basis igitur $AΓ$ basi $ΔZ$ aequalis est, et reliquus angulus $BAΓ$ reliquo angulo $EΔZ$ aequalis est (Prop. 4.).

Sed et rursus, sint latera aequales angulos subtendentia aequalia, ut AB lateri $ΔE$; dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus aequalia futura esse, $AΓ$ quidem lateri $ΔZ$, $BΓ$ vero lateri EZ, et adhuc reliquum angulum $BAΓ$ reliquo angulo $EΔZ$ aequalem esse.

et omnes eorum partes inter se aequalia. Cf. Pfleiderer, l. c. p. 321. sq. Hic ex Clavio vel Tacqueto vel Whistono (Andr. Tacquet. Elem. Euclid. Geometriae illustrata a Guil. Whiston. Romae 1745. p. 23.) addi possunt sequentia corollaria, quorum pars iam ad praecedentes propositiones pertinet, at ob nexum cum reliquis hic adiicitur. Cf. Pfleiderer. l. c. p. 323.

Cor. 1. In triangulo aequicruro recta angulum ad verticem bisecans ad basin perpendicularis est, et basin aeque ac triangulum bisecat (I. 4.).

Cor. 2. In triangulo aequicruro recta, quae e vertice recta basin bisecat, bisecat etiam angulum ad verticem, et triangulum, et perpendicularis est ad basin (I. 8.). Cf. dicta ad I. 10.

Cor. 3. In triangulo aequicruro recta, quae a vertice perpendicularis ducitur ad basin, basin vel angulum ad verticem et triangulum bisecat (I. 5. et I. 26.).

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτ μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ τ ΕΖ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθ ἡ ΔΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ Α τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσ εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχου βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓ ἐστὶν ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑ ΒΓΑ, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ Β τῇ ΕΖ, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴσ δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσ ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ τρ γωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ λοιπὴ γωνία ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση. Ἐ ἄρα δύο καὶ τὰ ἑξῆς.

Cor. 4. Quod e media basi ad eam erigitur perpendicalu in triangulo aequicruro, transit per trianguli verticem, et angu lum ad verticem bisecat. Quodsi enim non per verticem tran eat, ducatur per verticem alia recta ad mediam basin, e etiam haec ad basin perpendicularis in eodem puncto, q prius illud perpendiculum, quod fieri nequit (I. 11. Cor. 2.).

Cor. 5. Rectae a quovis talis perpendiculi puncto puncta baseos extrema ductae efficiunt triangulum aequicru rum (I. 4.).

Si enim inaequalis est $B\Gamma$ rectae EZ una earum maior est. Sit maior, si fieri potest, $B\Gamma$ recta EZ, et ponatur rectae EZ aequalis $B\Theta$, et iungatur $\Delta\Theta$.

Et quoniam aequalis est $B\Theta$ quidem rectae EZ, AB vero rectae ΔE, duae AB, $B\Theta$ duabus ΔE, EZ aequales sunt, utraque utrique, et angulos aequales continent; basis igitur $A\Theta$ basi ΔZ aequalis est, et triangulum $AB\Theta$ triangulo ΔEZ aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis igitur est angulus $B\Theta A$ angulo $EZ\Delta$. Sed $EZ\Delta$ angulo $B\Gamma A$ est aequalis; et $B\Theta A$ igitur angulo $B\Gamma A$ est aequalis; trianguli igitur $A\Theta\Gamma$ exterior angulus $B\Theta A$ aequalis est interiori et opposito $B\Gamma A$, quod fieri nequit (Prop. 16.). Non igitur inaequalis est $B\Gamma$ rectae EZ; aequalis igitur. Est autem et AB ipsi ΔE aequalis; duae igitur AB, $B\Gamma$ duabus ΔE, EZ aequales sunt, utraque utrique, et angulos aequales continent; basis igitur $A\Gamma$ basi ΔZ aequalis est, et triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ aequale, et reliquus angulus $BA\Gamma$ reliquo angulo $E\Delta Z$ aequalis (Prop. 4.). Si igitur duo etc.

Cor. 6. Quae contra a puncto extra illud perpendiculum sito ad extrema basis ducuntur rectae, inaequales sunt, vel triangulum scalenum efficiunt. Nam quae a tali puncto ad medium basin ducitur recta, illi oblique insistit (I. 11. Cor. 2.) vel ad alteram sui partem acutum, ad alterum obtusum angulum efficit, unde latera his angulis opposita inaequalia erunt (I. 24.). Itaque vertices omnium triangulorum aequicrurorum, super eadem basi constitutorum, sunt in perpendiculo e media basi erecto, vel illud perpendiculum est locus geometricus, in

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται, ἤτοι ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ ΑΓ. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη κατὰ τὸ Η.

Τριγώνου δὴ τοῦ ΕΗΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ [1]), ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη. Ὁμοίως

1) Μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΖΗ· ἀλλὰ καὶ ἴση. Ita edd. Basil. et Oxon. Peyrard. e Cod. a, cum quo consentit exemplar a Basil. ad marginem citatum, habet breviorem lectionem, quam in textu dedimus.

quo siti sunt vertices omnium triangulorum aequicrurorum, quae super hac basi constitui possunt.

Cor. 7. Si recta angulum trianguli alicuius bisecans oppositae basi est perpendicularis, triangulum illud erit aequicrurum (I. 26.).

Hanc primam huius libri partem antequam relinquamus, monendi videntur lectores, quam plurimas adhuc ad eas, quas hactenus tractavimus, propositiones pertinentes observationes utilissimas reperiri in Append. 2. eius, quam saepius citavimus, Chrestom. Geom. Hauberi, quas attente perlegere neminem harum rerum studiosum poenitebit.

PROPOSITIO XXVII.

Obs. Anguli alterni (αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι) in hac proposi-

PROPOSITIO XXVII. (Fig. 44.)

Si in duas rectas recta incidens alternos angulos aequales inter se faciat, parallela erunt inter se rectae.

In duas enim rectas AB, $\Gamma\Delta$ recta incidens EZ, alternos angulos AEZ, $EZ\Delta$ aequales inter se faciat; dico parallelam esse AB rectae $\Gamma\Delta$.

Si enim non, productae AB, $\Gamma\Delta$, convenient vel ad $B\Delta$ partes, vel ad $A\Gamma$; producantur, et conveniant ad $B\Delta$ partes in H.

Trianguli igitur EHZ exterior angulus AEZ aequalis est interiori et opposito EZH, quod fieri nequit (Prop. 16.); non igitur AB, $\Gamma\Delta$ productae convenient ad $B\Delta$ partes. Similiter autem ostendetur

tiam primum occurrunt. Sunt autem illi anguli, qui, si recta aliqua duas rectas secet, e diversis rectae secantis partibus, alter ad unam duarum, quae ab ea secantur, alter ad alteram constituuntur. Et quidem anguli alterni interni vocantur, si uterque est ad partem interiorem duarum rectarum, quae ab alia secantur, ut hic anguli AEZ, ΔZE, vel BEZ, IZE, et de his solis apud Euclidem sermo est. Sin autem, reliquis conditionibus manentibus, sit uterque ad partem externam rectarum, quae secantur, tum anguli alterni externi audiunt v. c. $AE\Delta$, $MZ\Delta$, vel AEB, IZM. Caeterum etiam si anguli alterni externi fuerint aequales, aut (Prop. 23.) duo externi ad easdem partes secantis aequales fuerint duobus rectis, consequetur parallelismus rectarum, quae ita secantur, quod post Proclum notat Isaac. Monachus in Schol. ad Euclid. libr. VI. priores. Proclus adhuc observat, supponere Euclidem rectas in eodem plano positas. Cf. dicta ad Defin. 7.

Cor. 1. Si in figura quadrilatera $AB\Gamma\Delta$ (Fig. 45.) latera

δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ ΑΓ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα εἰς δύο καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη [1]) γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν

1) Verba καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, quae Peyrard. secutus Codicem a expunxerat, et quae in edit. quoque Basil. desunt, ex edit. Oxon. restituimus. Eadem verba in ipso enunciato propos. sequentis desunt in cod. a, ubi tamen etiam Peyrard. ea retinuit.

opposita aequalia sint, nempe $AB=\Gamma\Delta$, $A\Gamma=B\Delta$, erunt eadem etiam parallela ex I. 8. et I. 27.

Cor. 2. Pariter, si $AB=\Gamma\Delta$, et $\Gamma BA=B\Gamma\Delta$, erit, ob $B\Gamma$ communem, ex I. 4. etiam $A\Gamma=B\Delta$, et tam AB, $\Gamma\Delta$, quam $A\Gamma$, $B\Delta$ parallelae (I. 27.).

neque ad $A\Gamma$; quae autem in neutras partes convenunt, parallelae sunt (Def. 35.); parallela igitur est AB rectae $\Gamma\Delta$. Si igitur in duas etc.

PROPOSITIO XXVIII. (Fig. 46.)

Si in duas rectas recta incidens exteriorem angulum interiori et opposito et ad easdem partes aequalem faciat, vel interiores et ad easdem partes duobus rectis aequales faciat; parallelae erunt inter se rectae.

In duas enim rectas AB, $\Gamma\Delta$ recta incidens EZ exteriorem angulum EHB interiori et opposito et ad easdem partes posito angulo $H\Theta\Delta$ aequalem faciat, vel interiores et ad easdem partes ipsos $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ duobus rectis aequales; dico parallelam esse AB rectae $\Gamma\Delta$.

Quoniam enim aequalis est EHB angulo $H\Theta\Delta$, sed EHB angulo $AH\Theta$ est aequalis (Prop. 15.), et $AH\Theta$ igitur ipsi $H\Theta\Delta$ est aequalis (Ax. 1.); et sunt alterni; parallela igitur est AB ipsi $\Gamma\Delta$ (Prop. 27.).

Rursus, quoniam anguli $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ duobus rectis aequales sunt, sunt autem anguli $AH\Theta$, $BH\Theta$

Cor. 3. Denique, si $AB\Gamma = B\Gamma\Delta$, et $A\Gamma B = \Gamma B\Delta$, erit ex I. 26. $AB = \Gamma\Delta$, et $A\Gamma = B\Delta$, et tam AB, $\Gamma\Delta$, quam $A\Gamma$, $B\Delta$ parallelae (I. 27.).

PROPOSITIO XXVIII.

Obs. Duae conditiones, e quibus hic rectas parallelas esse concluditur, reducuntur ad conditionem propositionis praecedentis. Generatim, nempe tres hae conditiones, ut facile patet, ita a se invicem pendent, ut nulla earum sine re-

ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα εἰς δύο καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

liquis locum habere possit. Caeterum poterat etiam Prop. 28. immediate demonstrari, similiter ac Prop. 27.

PROPOSITIO XXIX.

Obs. In hac propositione, quae conversa est duarum praecedentium, primum adhibetur notum illud axioma undecimum, vel, ut alii volunt, postulatum quintum. Quod quidem, quamvis verissimum, haud tamen aeque perspicuum esse ac reliqua Euclidis axiomata, ita ut omnibus, quibus innotescat, statim, etiam sine ulla illustratione, assensum quasi extorqueat, plerique omnes fatentur. Iam Proclus circa postulatum illud quintum monet: „esse potius theorema multis dubiis obnoxium, unde et Ptolemaeus illud libro singulari demonstrare tentaverit, et pluribus definitionibus ac theo-

duobus rectis aequales; ergo $AH\Theta$, $BH\Theta$ ipsis $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ aequales sunt (Ax. 1.). Communis auferatur $BH\Theta$; reliquus igitur $AH\Theta$ reliquo $H\Theta\Delta$ est aequalis (Ax. 3.); et sunt alterni; parallela igitur est AB rectae $\Gamma\Delta$ (Prop. 27.). Si igitur in duas etc.

PROPOSITIO XXIX. (Fig. 46.)

In parallelas rectas recta incidens, et alternos angulos aequales inter se facit, et exteriorem interiori et opposito et ad easdem partes aequalem, et interiores et ad easdem partes duobus rectis aequales.

In parallelas enim rectas AB, $\Gamma\Delta$ recta incidat EZ; dico eam alternos angulos $AH\Theta$, $H\Theta\Delta$ aequales facere, et exteriorem angulum EHB interiori et opposito et ad easdem partes $H\Theta\Delta$ aequalem, et interiores ad easdem partes $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ duobus rectis aequales.

rematibus ad eius demonstrationem opus esse, et propositionem conversam (I. 17.) Euclidem demonstravisse. Forte quosdam eo deceptos hanc propositionem postulatis annumerare, quod, si anguli fiant duobus rectis minores, rectarum erga se inclinatio et concursus per se patere videatur. At recte contra hos Geminum monere, peritissimos geometriae magistros praecipere, probabiles opiniones abesse debere ab huius scientiae ratiociniis. Et Aristotelem dicere, aeque absurdum esse, ab oratore demonstrationem petere, et a geometra persuaderi sibi pati. Et Symmiam apud Platonem ita habere: qui e verisimilibus demonstrationem petunt, eos vanos ingenio esse scio. Atque rectas, si anguli sint duobus rectis minores, erga se invicem inclinari, verum quidem esse ac necessarium. Lineas autem magis magisque ad se inclina-

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ [1]. *Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴση ἄρα.*

1) Edd. Basil. et Oxon. habent: *ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ.* Nos cum Peyrardo secuti sumus lectionem breviorem cod. a.

tas, si producantur, alicubi concurrere, verum quidem esse, at non necessarium, nisi quis rationibus demonstret, in rectis id verum esse. Esse enim quasdam lineas in infinitum quidem propius ad se accedentes, nec tamen concurrentes; id quamvis incredibile videatur, verum tamen esse, et in aliis lineis ita observatum. Unde dubium orini, nonne et in rectis verum esse possit, quod verum sit in aliis lineis. Quod antequam per demonstrationes refutatum sit, menti molestiae quid afferre. Quum praeterea dubia, quae circa concursum earum rectarum prolata sint, satis sint speciosa, praestare sane, ista saltem probabilia, nec rationibus innixa, his libris excludere. Patere itaque, demonstrationem quaeri oportere." Similes aliorum querelas hic omitto. Nec tamen defuere, qui Euclidem haud absurde defendi posse, aut eius praecepta modo aliqua illustratione opus habere putarent, e quibus eminet Wallisius (Opp. Mathem. T. II. p. 668. sqq.), de quo infra in Excursu ad hunc locum. Quidquid sit, orta sunt quam plurima tentamina hanc quasi lacunam explendi, de quorum

Si enim inaequalis est $AH\Theta$ angulo $H\Theta\Delta$, unus eorum maior est; sit maior $AH\Theta$ angulo $H\Theta\Delta$. Communis addatur $BH\Theta$; ergo $AH\Theta$, $BH\Theta$ angulis $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ maiores sunt. Sed $AH\Theta$; $BH\Theta$ duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); et igitur $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ duobus minores rectis sunt. Rectae autem a minoribus quam duobus rectis productae in infinitum concurrunt (Post. 5. vel Ax. 11.). Ipsae igitur AB, $\Gamma\Delta$ productae in infinitum concurrent; non autem concurrunt, quia parallelae ponuntur; non igitur inaequalis est $AH\Theta$ angulo $H\Theta\Delta$; aequalis igitur.

praecipuis ad finem huius libri disseremus. Hic sufficiat monere, omnes, quae nostram hanc praecedunt, propositiones ex pariter I. 31., sine illo axiomate demonstrari, et nonnullas etiam alias e sequentibus, at quam plurimam reliquarum partem inde derivari, unde, quam late res pateat, facile perspiciatur.

Cor. 1. Quodsi in figura parallelogramma unus angulus rectus sit, erunt omnes recti. Aliter ita: Si recta secans duas parallelas perpendicularis sit ad unam earum, erit etiam ad alteram perpendicularis. (E Pfleidereri schedis, unde et multa in sequentibus, vel ubi non semper expresse monuerimus, desumta sunt.)

Cor. 2. In omni parallelogrammo anguli eidem lateri adiacentes simul sumti aequales sunt duobus rectis.

Cor. 3. Recta AB (Fig. 47.) quae unam duarum parallelarum $B\Gamma$, ΔE, cum quibus in eodem plano est, secat, etiam alteram secat. Ducatur enim ex puncto quocunque Z rectae ΔB recta ZB, eritque (I. 29.) $EZB+ZB\Gamma=2$ rectis, hinc $EZB+ZB\Delta<2$ rectis, adeoque BA, ΔE concurrent (Ax. 11. vel Post. 5.).

Cor. 4. (Peletarii) Si duae rectae, quae duas parallelas secant, ad unum inter ipsas punctum coierint, duosque

Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστὶν ἴση· κα
ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ
ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ α
ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπ
ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἡ ἄρ
εἰς τὰς παραλλήλους καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσ
παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος
λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστὶ παράλληλος.

Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ
εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τ
ὑπὸ ΗΘΖ. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐ
θείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴσ
ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. Ἐδείχθη δὲ κα
ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση. Καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΙ

angulos alternos aequales fecerint, aut angulum externum aequalem interno opposito ad easdem partes, aut duos interno ex alterutra parte aequales: erunt istae duae rectae in directum, vel in unam lineam coincident. Haec propositio, quae est conversa I. Prop. 29. sumto contrario facile apagogice demonstratur.

Cor. 5. Si e duabus rectis AB, $B\Gamma$ (Fig. 48.), quae in puncto B conveniunt, una quidem AB alii $\alpha\delta$, altera autem $B\Gamma$ alii $\gamma\epsilon$ parallelae sint, sint autem $\alpha\delta$, $\gamma\epsilon$ in eodem plano in quo et AB, $B\Gamma$ sunt, convenient etiam $\alpha\delta$, $\gamma\epsilon$ sub angulo aequali angulo $AB\Gamma$. Quum enim $B\Gamma$, $\gamma\epsilon$ parallelae sint, recta AB, quae ex hyp. unam earum $B\Gamma$ secat, secabit etiam

Sed $AH\Theta$ angulo EHB est aequalis (Prop. 15.); et EHB igitur angulo $H\Theta\Delta$ est aequalis.

Communis addatur $BH\Theta$; ergo EHB, $BH\Theta$ anguli $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ aequales sunt. Sed EHB, $BH\Theta$ duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); et $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ igitur duobus rectis aequales sunt. Ergo in parallelas etc.

PROPOSITIO XXX. (Fig. 49.)

Quae eidem rectae parallelae sunt, et inter se sunt parallelae.

Sit utraque rectarum AB, $\Gamma\Delta$ rectae EZ parallela; dico et AB rectae $\Gamma\Delta$ esse parallelam.

Incidat enim in ipsas recta HK.

Et quoniam in parallelas rectas AB, EZ recta incidit HK, aequalis est $AH\Theta$ angulo $H\Theta Z$ (Prop. 29.). Rursus quoniam in parallelas rectas EZ, $\Gamma\Delta$ recta incidit HK, aequalis est $H\Theta Z$ angulo $HK\Delta$ (Prop. 29.). Ostensus est autem et AHK angulo $H\Theta Z$ aequalis; AHK igitur angulo $HK\Delta$ est aequa-

dicam $\gamma\epsilon$ in puncto aliquo ζ (I. 29. Cor. 3.), eritque $B\zeta\gamma = AB\Gamma$ (I. 29.). Pariter, quum AB, $\alpha\delta$ parallelae sint, recta $\gamma\epsilon$, quae, ut ostendimus, rectam AB secat, secabit etiam $\alpha\delta$ in puncto aliquo β (I. 29. Cor. 3.), eritque angulus $\alpha\beta\gamma = \alpha\zeta\gamma = AB\Gamma$ (I. 29.). Eodem modo ostenditur, $\alpha\beta$ et $B\Gamma$ productas se invicem secare, unde patet, dari figuras parallelogrammas (Def. 36.). Praeterea ex hoc Cor. et I. 27. Cor. 1. manifestum est, quadratum, rectangulum, rhombum et rhomboidem esse parallelogramma (Def. 30—33.).

PROPOSITIO XXX.

Obs. Proclus notat, rem eodem modo demonstrari posse,

ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. Πα
ράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Αἱ ἄρα τῇ αὐτ
εὐθείᾳ καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου [1]), τῇ δοθείσῃ εὐθεί
παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα
εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ, διὰ τοῦ Α σημείου, τῇ Β
εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, κ
ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ ε
θείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΔ
γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθεία
τῆς ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεί
ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑ
ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστ
ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α, τῇ δ
θείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμ
ἦκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

1) Cod. a. addit: ὃ μή ἐστιν ἐπὶ αὐτῆς.

quamvis recta ΕΖ, quae duabus reliquis parallela ponitu
haud intermedia inter illas, sed extra utramque posita fuer

PROPOSITIO XXXI.

Obs. 1. Punctum datum ita situm esse debet, ut rec
data etiam producta non cum eo conveniat, quod notant Pr
clus et Clavius.

Obs. 2. Alia ratio problema hoc solvendi patet ex
27. Cor. 1., ubi, si (Fig. 45.) per Α ducenda sit paralle

is; et sunt alterni. Parallela igitur est AB ipsi $\Gamma\Delta$ (Prop. 27.). Quae igitur eidem rectae etc.

PROPOSITIO XXXI. (Fig. 50.)

Per datum punctum, datae rectae parallelam rectam lineam ducere.

Sit quidem datum punctum A, data vero recta $B\Gamma$; oportet igitur, per A punctum, rectae $B\Gamma$ parallelam rectam lineam ducere.

Sumatur in $B\Gamma$ quodlibet punctum Δ, et iungatur $A\Delta$; et constituatur ad ΔA rectam, et ad punctum in ea Δ, angulo $A\Delta\Gamma$ aequalis angulus ΔAE (Prop. 23.), et producatur in directum ipsi EA recta AZ.

Et quoniam in duas rectas $B\Gamma$, EZ recta incidens $A\Delta$ alternos angulos $EA\Delta$, $A\Delta\Gamma$ aequales inter se facit, parallela est EZ rectae $B\Gamma$ (Prop. 27.).

Per datum igitur punctum A, datae rectae $B\Gamma$ parallela recta linea ducta est EAZ. Quod oportebat facere.

rectae $\Gamma\Delta$, sumto in $\Gamma\Delta$ puncto quocunque Γ, descriptisque ex A, Γ, radio eodem quocunque circulis, posterior rectam $\Gamma\Delta$ secabit in puncto aliquo Δ, e quo deinde circulis radio $A\Gamma$ descriptus intersecabit circulum ex A descriptum in puncto B, ita ut ducta recta AB parallela sit rectae $\Gamma\Delta$.

Cor. Non plures una recta per idem punctum eidem rectae parallelae duci possunt. Ducantur enim, si fieri potest, duae uni eidemque rectae parallelae; erunt itaque (I. 30.) et ipsae inter se parallelae, quod, cum se in puncto aliquo secent, fieri nequit (Def. 35.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXXII.

Obs. Proclus refert, Eudemum Peripateticum ad Pythagoraeos huius theorematis inventionem referre. Alias etiam demonstrationes exhibet Proclus, quibus primum propositionis pars posterior adstruitur, et exinde pars prior derivatur. Demonstrationem immediatam, non adhibita parallelarum theoria exhibere tentavit Thibaut., de qua infra in Exc. I. Est autem haec propositio consequentiarum longe fertilissima, quarum praecipuae ex Proclo, Clavio, Tacqueto, Pfleiderero maximae aliisque desumtae hae fere fuerint.

Cor. 1. Conversa quoque valet. Nempe, si (Fig. 51.) angulus aliquis exterior *ΑΓΔ* ad triangulum aliquod aequalis sit duobus trianguli angulis internis oppositis *ΒΑΓ*, *ΑΒΓ* simul sumptis, erit recta *ΓΔ* rectae *ΒΓ* in directum. Erunt enim anguli *ΑΓΒ*+*ΑΓΔ* aequales tribus angulis trianguli *ΑΒΓ* i. e. ex hac propos. duobus rectis, unde *ΒΓ*, *ΓΔ* in directum erunt (I. 14.).

Cor. 2. Omnia triangula eandem angulorum summam habent.

Cor. 3. Quodsi duo anguli unius trianguli singuli aut simul sumti aequales sint duobus angulis alterius trianguli singulis aut simul sumtis, tertius etiam angulus prioris trianguli aequalis est tertio angulo posterioris trianguli: et contra si duo triangula unum angulum aequalem habeant, aequalis etiam erit reliquorum summa.

Cor. 4. Si in triangulo aliquo dati sint duo anguli singulatim, aut simul sumti, datus est etiam tertius: et, si unus datus est, data est reliquorum summa.

Cor. 5. Prout unus angulus trianguli rectus, aut obtusus, aut acutus fuerit, summa reliquorum aequalis, aut mi

PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis aequalis est; et interiores trianguli tres anguli duobus rectis aequales sunt.

ior, aut maior recto erit, et vice versa. Et unusquisque trianguli alicuius angulus rectus, aut obtusus, aut acutus erit, prout duo reliqui simul ipsi aequales, aut minores, aut maiores eo fuerint, et vice versa.

Cor. 6. Trianguli aequicruri dato uno angulo dantur etiam reliqui. Quum enim (I. 5.) anguli ad basin aequales sint, erit, dato uno angulorum ad basin, alter ei aequalis, et tertius ad verticem angulus datus erit (Cor. 4.), si vero primum datus fuerit angulus ad verticem, data erit reliquorum summa (Cor. 4), unde, quum sint aequales (I. 5.) pariter singuli dati erunt.

Cor. 7. Prout angulus ad verticem trianguli aequicruri fuerit rectus, aut obtusus, aut acutus, quisque reliquorum vel aequalis erit dimidio recto, vel minor, vel maior dimidio recto.

Cor. 8. In quovis triangulo aequicruro intervis angulus ad basin sit dimidius anguli externi ad verticem.

Cor. 9. Trianguli aequilateri quisque angulus efficit tertiam partem duorum rectorum, vel duas tertias recti.

Cor. 10. Si in triangulo aequilatero ex vertice demittatur perpendiculum ab basin, duo orientur triangula rectangula, quorum anguli, praeter rectum, alter tertiam partem recti, alter duas tertias recti efficit. Hinc patet ratio, angulum rectum in tres partes aequales, et deinde bisecando (I. 9.) in sex, duodecim etc. partes aequales dividendi.

Cor. 11. Si in triangulo aequicruro $AB\Gamma$ (Fig 52.) alterum crus AB ultra verticem producatur, usquedum $A\Delta$ fiat $=AB$, et iungatur $\Delta\Gamma$, erit angulus $\Delta\Gamma B$ rectus. Omnes enim anguli trianguli $B\Gamma\Delta=2$ rectis, at, ob $AB\Gamma=A\Gamma B$,

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἤχθω γὰρ, διὰ τοῦ Γ σημείου, τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

et $ΑΔΓ=ΑΓΔ$ (I. 5.), erit $ΑΓΒ+ΑΓΔ$ i. e. $ΔΓΒ$ ha summa dimidia, adeoque aequalis recto. Hinc facile pa ratio, ad rectam $ΒΓ$ in puncto ipsius $Γ$ extremo perpendic larem erigendi, descripto nempe super $ΒΓ$ triangulo aequ latero $ΑΒΓ$, factaque $ΑΔ=ΑΒ$, et ducta $ΔΓ$.

Cor. 12. In quavis figura rectilinea (Fig. 53.) cuius a guli omnes extra figuram vergunt (angles saillans), ut itaq versus partes interiores figurae concavi sint, omnes angu simul efficiunt bis tot rectos angulos, demtis quatuor, qu figura habet latera vel angulos, vel, si figura habeat n later omnes anguli simul efficient (2n—4) angulos rectos, vel (—2×2R, si R rectum denotat. Nempe in omni tali figu v. c. $ΑΒΓΔΕΖ$ ab uno angulo quocunque $Α$ ad reliquos a gulos omnes, exceptis duobus ipsi proximis, duci possu rectae diversae a lateribus figurae, quae figuram in totide triangula divident: itaque, si figura habet n angulos, prove nient n—2 triangula, et, quum summa angulorum cuiusqu trianguli sit =2R erit summa omnium istorum angulorum =(n—2)×2R. Ita v. c. in quovis quadrangulo summa an gulorum erit =4R; in quovis pentagono =6R; in quovi hexagono =8R etc. Est haec propositio iam apud Proclum Conversam quoque, nempe, si anguli quotcunque, quorum numerus =n, dati sint, sitque eorum summa =(n—2)×2R construi posse figuram rectilineam n laterum, cuius angul aequales sint datis istis angulis, demonstrat Develey, Elem de Géom. Append. ad Livr. II. §. 45.

Sit triangulum $AB\Gamma$, et producatur ipsius unum latus $B\Gamma$ in Δ; dico exteriorem angulum $A\Gamma\Delta$ aequalem esse duobus interioribus et oppositis ΓAB, $AB\Gamma$, et interiores trianguli tres angulos $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, ΓAB duobus rectis aequales esse.

Ducatur enim, per Γ punctum, rectae AB parallela ΓE (Prop. 31.).

Cor. 13. Quodsi igitur in quadrangulo tres anguli recti fuerint, vel saltem summam trium rectorum effecerint, etiam quartus rectus erit, et contra: si unus rectus sit, summa trium reliquorum simul tres rectos efficiet: et, si in quadrangulo duo anguli simul duos rectos faciant, facient etiam reliqui duo simul duos rectos.

Cor. 14. Quodsi vero (Fig. 54.) nonnulli figurae anguli introrsum vergant (angles rentrans), ita tamen, ut nullum figurae latus plura duobus e reliquis lateribus secent, etiam talis figura resolvi poterit in tot triangula, demtis duobus, quot figura latera habet, e. g. si figura n latera habeat, in n —2 triangula, et summa angulorum horum triangulorum pariter efficiet $(n-2)\times 2R$. At observandum est, horum triangulorum summam intrare angulos illos gibbos s. introrsum vergentes, siquidem angulos eos dicere velis. Sensu enim magis solito angulus vocatur inclinatio duarum rectarum ex ea parte, qua minor est duobus rectis. Quidquid sit, si angulos hos gibbos numerare velis, erit adhuc summa angulorum internorum figurae, $=(n-2)\times 2R$. Quodsi figura habeat N angulos gibbos A, B, C etc. adeoque praeter eos n—N angulos consueto sensu sumtos, vel concavos, quisque angulorum gibborum habebit alium ipsi contiguum, extrorsum vergentem, solito sensu sumtum, A v. c. habebit angulum contiguum a, B angulum b, etc. ita ut $A=4R-a$, $B=4R-b$ etc. adeoque $A+B+C$ . . . . . (quorum numerus N) $=4N.R-(a+b+c$ . . . .). Iam, si summa angulorum concavorum figurae ae-

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

qualis sit angulo S, erit S+A+B+C . . . . . =(n−2)×2R, adeoque S+4N.R−(a+b+c . . . . .) =2nR−4R, vel S−(a+b+c . . . .)=2nR−(N+1)4R, i. e. summa angulorum concavorum figurae superabit summam angulorum gibbis contiguorum, duobus rectis tot vicibus sumtis, quot figura latera habet, demtis quatuor rectis una vice plus sumtis, quam anguli gibbi adsunt. Hinc consequitur, si fuerit n=2(N+1) fore S=a+b+c . . . ut, si figura aliqua quatuor latera habuerit, adeoque n=4 fuerit, et unus in ea angulus gibbus sit, (plures enim tum gibbi esse nequeunt) erit S=a, quod etiam ex figura facile patet. Quodsi unum latus plura duobus e reliquis intersecet, figura implicatior vix dicere permittit, qui anguli interni aut externi vocari debeant, neque res tanti est, ut ei iam immorari liceat.

Cor. 15. Si in figura rectilinea, quae angulos gibbos non habet (Fig. 55.) singula latera figurae producantur ordinatim versus easdem partes, omnes anguli externi aequales erunt quatuor rectis, quicunque sit numerus laterum figurae. Nam quilibet externus cum ipsi contiguo interno aequalis est duobus rectis. Omnes igitur externi cum omnibus internis bis tot rectis aequales sunt, quot figura latera habet. At interni soli (Cor. 12.) bis tot rectis, quot figura latera habet, demtis quatuor rectis. Ergo anguli externi simul aequantur quatuor rectis. (Est etiam haec propositio Procli.)

Et quoniam parallela est AB rectae ΓE, et in ipsas incidit $A\Gamma$, alterni anguli $BA\Gamma$, $A\Gamma E$ aequales inter se sunt (Prop. 29). Rursus, quoniam parallela est AB rectae ΓE, et in ipsas incidit recta $B\Delta$, exterior angulus $E\Gamma\Delta$ aequalis est interiori et opposito $AB\Gamma$ (Prop. 29.). Ostensus autem est et $A\Gamma E$ angulo $BA\Gamma$ aequalis; totus igitur $A\Gamma\Delta$ exterior angulus aequalis est duobus interioribus et oppositis $BA\Gamma$, $AB\Gamma$.

Cor. 16. Si figurae rectilineae angulos gibbos habent (Fig. 56.), hi quidem proprie loquendo non habent angulum externum simili ratione, ac in reliquis, formatum. Unum enim latus anguli gibbi productum intra figuram cadit. Quodsi vero ad analogiam reliquorum eos angulos, quos unum latus productum cum latere sibi contiguo facit, improprie pro angulis externis sumere velis, erit excessus angulorum externorum proprie dictorum super hos externos improprie dictos aequalis duobus rectis. Quodsi enim omnes litterae idem significant, ac in Cor. 14., sit summa angulorum proprie dictorum externorum, qui ad $(n-N)$ angulos concavos formantur, = angulo Σ, eritque $\Sigma=(n-N).2R-S=n.2R-N.2R-S$. Deinde, si anguli illi improprie dicti externi, qui ad angulos gibbos proveniunt uno latere producto, vocentur α, β, γ . . . erunt $\alpha+\beta+\gamma$ . . . $=A+B+C$ . . . $-2N.R$, adeoque $\Sigma-(\alpha+\beta+\gamma$ . . . .$)=n.2R-S-(A+B+C$ . . . .). At ex Cor. 11. $S+A+B+C$ . . . . $=(n-2).2R=n.2R-4R$, hinc $\Sigma-(\alpha+\beta+\gamma$ . . . .$)=4R$. Etiam hic figuras tantum consideramus, in quibus nullum latus pluribus quam duobus e reliquis occurrit.

Cor. 17. Si figura aliqua rectilinea (Fig. 57.) ita comparata sit, ut duo quaecunque latera, quae unum latus inter se interpositum habent, extra figuram ab ea lateris interpositi parte, e qua non est figura rectilinea, concurrant, anguli, quos haec latera efficiunt, simul sumti bis tot rectos efficiunt,

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Παντὸς ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΓ.

quot figura habet latera, demtis octo rectis, v. c. in pentagono duos, in hexagono quatuor, in figura n laterum 2nR—8R. Formantur enim n triangula, quorum anguli efficiunt 2nR, a quibus si subtrahantur anguli figurae externi bis sumti, erunt anguli illi nunc demum formati simul =2nR—8R. In triangulis et quadrilateris occursus ille ita, ut diximus, locum habere nequit. De pentagono rem primum demonstravit Campanus. Idem adhuc valet, etiamsi duo latera, quae unum inter se interpositum habent, parallela sint.

Cor. 18. In figuris rectilineis, quarum omnes anguli aequales sunt, e numero laterum vel angulorum facile quantitas uniuscuiusque anguli determinatur. Quum enim ex Cor. 12. omnes anguli simul in figura, quae n latera habet, sint (n—2).2R, erit unusquisque angulorum $=\frac{(n-2).2R}{n}=2R-\frac{4R}{n}$.

Cor. 19. Quum omnes anguli circa aliquod punctum constituti simul efficiant quatuor rectos (I. 13. Cor. 3.) spatium circa aliquod punctum figuris aequiangulis eundem om-

Communis addatur $A\Gamma B$; ergo $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ tribus $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, ΓAB aequales sunt. Sed $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); et $A\Gamma B$, ΓBA, ΓAB igitur duobus rectis aequales sunt. Omnis igitur trianguli etc.

PROPOSITIO XXXIII. (Fig. 58.)

Quae et aequales et parallelas ad easdem partes coniungunt rectae, et ipsae aequales et parallelae sunt.

Sint et aequales et parallelae AB, $\Gamma\Delta$, et coniungant ipsas ad easdem partes rectae $A\Gamma$, $B\Delta$; dico et $A\Gamma$, $B\Delta$ et aequales et parallelas esse.

Iungatur enim $B\Gamma$.

nibus angulum ad hoc punctum comprehendentibus tum saltem expleri poterit, si unus istorum angulorum pars aliquota quatuor rectorum fuerit, vel, si numerus n laterum talis figurae ita sit comparatus, ut $4R : \frac{(n-2).2R}{n}$, vel $\frac{2n}{n-2}$ sit numerus integer. Id vero non fiet, nisi sit vel $n=3$ (ubi sex anguli trianguli aequianguli i. e. aequilateri spatium explebunt), vel $n=4$ (ubi quatuor anguli quadrilateri aequianguli i. e. rectanguli idem efficient) vel $n=6$ (ubi tres anguli hexagoni aequianguli rem praestabunt). Pythagoricum hoc theorema esse ad I. 15. Cor. observat Proclus.

PROPOSITIO XXXIII.

Obs. Hac ratione pariter ac in I. 29. Cor. 5. orientur parallelogramma, et quidem hic ea addita conditione, ut unum parallelogrammi latus, cui aequale est alterum ipsi oppositum, magnitudine datum esse possit.

Cor. 1. Recta, cuius duo puncta ab alia recta aeque distant, i. e. e cuius duobus punctis in alteram demissa per-

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ, δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν. Βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. Αἱ ἄρα τὰς ἴσας καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

pendicula aequalia sunt, huic alteri parallela est. Hinc nova constat ratio per datum punctum rectam alteri datae parallelam ducendi.

Cor. 2. Quodsi vero duo puncta *A*, *B* (Fig. 59.) rectae alicuius ab alia recta *ΓΔ* inaequaliter distent, ita nempe, ut perpendiculorum ex iis in alteram rectam demissorum unum v. c. *BΔ* maius sit altero *AΓ*, rectae *AB*, *ΓΔ* productae concurrent. Sumta enim *ΔE*=*AΓ*, erit ducta *AE* parallela rectae *ΓΔ*, hinc *AB* ei parallela esse nequit (I. 31. Cor.).]

PROPOSITIO XXXIV.

Obs. Circa hanc propositionem multa adhuc, quae vel ex ea ipsa, vel ex natura parallelogrammorum consequuntur,

Et quoniam parallela est AB rectae $\Gamma\Delta$, et in ipsas incidit $B\Gamma$, alterni anguli $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ aequales inter se sunt (Prop. 29.). Et quoniam aequalis est AB rectae $\Gamma\Delta$, communis autem $B\Gamma$; duae igitur AB, $B\Gamma$ duabus $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ aequales sunt, et angulus $AB\Gamma$ angulo $B\Gamma\Delta$ aequalis. Basis igitur $A\Gamma$ basi $B\Delta$ est aequalis, et triangulum $AB\Gamma$ triangulo $B\Gamma\Delta$ aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, uterque utrique, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis est igitur angulus $A\Gamma B$ angulo $\Gamma B\Delta$. Et quoniam in duas rectas $A\Gamma$, $B\Delta$ recta incidens $B\Gamma$, alternos angulos $A\Gamma B$, $\Gamma B\Delta$ aequales inter se facit, parallela est $A\Gamma$ rectae $B\Delta$ (Prop. 27.). Ostensa est autem ipsi et aequalis; quae igitur aequalis etc.

PROPOSITIO XXXIV. (Fig. 58.)

Parallelogrammorum spatiorum et opposita latera et anguli aequalia inter se sunt, et diameter ea bifariam secat.

observari possunt, quae e Proclo, Thom. Simpson., Clavio, Pfleidereri schedis huc conferemus. Et in ipsa quidem theorematis enunciatione notari potest, diametrum spatia parallelogramma non tantum bifariam, sed praecise in triangula perfecte congruentia dividere, ut etiam e demonstratione patet.

Cor. 1. Duae parallelogrammi diametri $B\Gamma$, $A\Delta$ (Fig. 58.) se invicem in puncto E bifariam secant ex I. 26. ob $AB = \Delta\Gamma$ (I. 34.) $BAE = E\Delta\Gamma$ (I. 29.) $ABE = E\Gamma\Delta$ (I. 29.). Simul patet, esse triangula opposita ABE, $\Delta E\Gamma$, pariterque $AE\Gamma$, ΔEB aequalia.

Cor. 2. Si per punctum E in media diametro positum (Fig. 61.) ducatur recta quaecunque ZH, dividit illa parallelogrammum in duo quadrilatera inter se congruentia $BZ\Delta H$,

Ἔστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ λέγω, ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γω-

ΓΘΖΔ, ob aequalia triangula ΑΒΔ, ΔΓΑ, pariterque aequali ΑΕΖ, ΔΕΘ. Punctum Ε centrum figurae vocare solent.

Cor. 3. Rectae ΑΒ, quae alteri ΓΔ parallela est omnia puncta aequaliter ab hac distant, vel omnia perpen dicula a rectæ aliqua in aliam ipsi parallelam demissa sun inter se aequalia.

Cor. 4. Si e pluribus punctis rectae alicuius plura ae qualia perpendicula in eodem plano erigantur, una eademqu recta, priori parallela, omnia perpendiculorum extrema iun git.

Cor. 5. Quadrilaterum, cuius bini oppositi anguli ae quales sunt, est parallelogrammum. Quum enim omnes qu drilateri cuiuscunque anguli aequales sint quatuor rectis (32. Cor. 12.) et bini oppositi aequales esse ponantur, angu eidem lateri cuiounque adiacentes dimidium omnium angul rum quadranguli i. e. duos rectos efficient, adeoque duo qua vis latera opposita aequalia erunt. Nominatim itaque quodv quadrangulum, cuius omnes anguli recti sunt, est parallel grammum. Pariter, si duo quaevis opposita latera aequal sint, figuram parallelogrammam esse, iam I. 27. Cor. 1. v dimus. Cf. Isaac. Monachus l. c.

Cor. 6. Non sufficit ad constituendam figuram parall logrammam, ut duo quidem quadrilateri latera opposita p rallela, reliqua duo autem aequalia sint, id quod ostend Proclus ope trianguli aequicruri, a cuius cruribus si utrimq ex vertice partes aequales abscindantur, et puncta harum p

Sit parallelogrammum spatium $A\Gamma\Delta B$, diameter autem ipsius $B\Gamma$; dico $A\Gamma\Delta B$ parallelogrammi opposita et latera et angulos aequalia inter se esse, et $B\Gamma$ diametrum illud bifariam secare.

Quoniam enim parallela est AB rectae $\Gamma\Delta$, et in ipsas incidit recta $B\Gamma$, alterni anguli $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$,

tum extrema recta iungantur, existet figura quadrilatera, in qua duo quidem latera opposita parallela, reliqua autem opposita latera aequalia sunt, quae tamen manifesto non est parallelogramma.

Cor. 7. Pariter non sufficit ad probandum, figuram aliquam esse parallelogrammum, si ostendatur, diametrum dividere quadrilaterum in triangula perfecte congruentia, nisi ea simul ita posita sint, ut latera aequalia sibi invicem opponantur. Minus igitur accuratum est, quod Isaac. Monachus de hac re habet.

Cor. 8. At, si duae diametri $B\Gamma$, $A\Delta$ altera alteram bifariam secet (Fig. 60.), tum quadrilaterum $AB\Gamma\Delta$ parallelogrammum erit. Erunt enim ex I. 4. anguli BAE, $\Gamma\Delta E$ aequales, ideoque AB rectae $\Gamma\Delta$ parallela, pariterque ob $BA\Gamma = EAB$, erit AB parallela rectae $B\Delta$.

Cor. 9. Dato uno parallelogrammi angulo dantur omnes.

Cor. 10. Nominatim, si unus rectus fuerit, recti erunt etiam reliqui; si unus obliquus, etiam reliqui obliqui erunt. Unde parallelogramma rectangula vel obliquangula.

Cor. 11. Quodvis quadrangulum aequiangulum est parallelogrammum rectangulum.

Cor. 12. Datis duobus parallelogrammi lateribus adiacentibus dantur etiam reliqua.

Cor. 13. Si duo latera adiacentia parallelogrammi aequalia sint, omnia latera erunt aequalia; si duo adiacentia inaequalia, reliqua etiam erunt inter se inaequalia. Hinc parallelogramma aequilatera et scalena.

ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τ
ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓ
δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέρα
ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴ
πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· κα
τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει, ἑκα
τέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γω
νίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ Α
τῇ ΒΔ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. Κα
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓ
ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒ
ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπ
ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

rallela. Nam ex praec. Cor. tam ΕΗ, quam ΖΘ parallela e
rectae ΒΓ, adeoque ΕΗ, ΖΘ (I. 29. Cor. 3.) inter se para
lelae erunt, eodemque modo ostendetur, ΕΖ, ΗΘ parallel
esse; est itaque ΕΖΘΗ parallelogrammum. Habet hoc the
rema Thom. Simpson. Elem. of Geom. Lond. 1800. p. 27.

Cor. 25. Caeterum esse, praeter parallelogramma vulg
dicta, multas adhuc figuras, quarum latera opposita paralle
sint, Proclus et post eum Clavius monent. Latera opposi
nempe sunt, quae ex utraque sui parte parem laterum num
rum in figura habent. Nempe in figura quacunque aequia
gula, quae parem numerum laterum habent (aequilatera etia
esse, quod Proclus et Clavius volunt, nihil attinet) latera o
posita erunt parallela. Quodsi enim numerus laterum s
=2 n, erit numerus laterum ex utravis parte laterum opposit
rum ΑΘ, ΔΕ (Fig. 65.) =n—1. Ducta deinde ΑΔ, habe
figura ex altera rectae ΑΔ parte v. c. dextra n latera, *rec*
ΑΔ pariter cum reliquis computata, ex altera (sinistra part
recta ΑΔ pariter cum reliquis computata, (n+2) latera, itaq
omnes anguli figurae a dextra parte efficiunt ex I. 32. Co
12. (n—2).2R, vel 2nR—4R: omnes autem anguli figurae

aequales inter se sunt (Prop. 29.). Rursus, quoniam parallela est $A\Gamma$ rectae $B\Delta$, et in ipsas incidit $B\Gamma$, alterni anguli $A\Gamma B$, $\Gamma B\Delta$ aequales inter se sunt reliquis. Contra vero, si unum quidem latus cum angulo adiacente utrimque aequale sit, alterum autem latus in uno parallelogrammo maius ac in altero, erit etiam prius parallelogrammum maius altero.

Cor. 22. Vicissim: latera duorum aequalium quadratorum sunt aequalia: aequalia rectangula, quae eandem basin habent, eandem etiam habent altitudinem (perpendiculum e latere opposito in basin demissum); aequales et aequianguli rhombi aequalia habent latera; si in aequalibus et aequiangulis rhomboïdibus unum prioris latus aequale sit uni posterioris, erit etiam alterum prioris latus aequale alteri posterioris.

Cor. 23. Si in uno anguli alicuius crure AB (Fig. 62.) sint partes quotcunque ΔE, EZ etc. aequales, et per puncta earum extrema ducantur rectae inter se parallelae, quae alteri cruri $A\Gamma$ in punctis H, I, K occurrunt, erunt partes HI, IK etc. pariter aequales. Ducatur enim per I recta IA rectae ΔZ parallela (I. 31.) quae rectam ΔH in Θ, rectam ZK in A secet (I. 29. Cor. 3.), eritque ob $I\Theta=\Delta E$ (I. 34.) et $IA=EZ$ (I. 32.), quum ex hypoth. sit $\Delta E=EZ$, etiam $I\Theta=IA$, adeoque, quum praeterea angulus $H\Theta I=IAK$ (I. 29.), et $\Theta IH=AIK$ (I. 15.), $HI=IK$. Idem valet, si inde a puncto A partes aequales abscindantur (Fig. 63.). Hinc facile est rectam datam in partes quotcunque aequales dividere. Contra vero, si ΔE, EZ etc. pariterque HI, IK etc. aequales sint, eaque duae rectarum ΔH, EI, ZK etc. inter se parallelae, parallelae erunt etiam reliquae; vel, si partes e puncto A sumptae ΔE, EZ etc. aequales sint, pariterque ΔI, IK etc. erunt etiam ductae EI, ZK parallelae, quod facile patet, si contrarium sumatur.

Cor. 24. Si latera quadrilateri cuiuscunque $AB\Gamma\Delta$ (Fig. 64.) bisecentur in E, Z, Θ, H, et iungantur EZ, $Z\Theta$, ΘH, HE, erunt in figura $EZ\Theta H$ bina quaevis opposita latera pa-

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναν τίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνε Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τ ΒΔ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΓΔ παραλληλόγραμμον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λέ.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεω ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοι ἐστίν.

eritque (I. 34.) angulus $E=\Gamma$, at $AB\Delta>E$ (I. 16.) adeoqu $AB\Delta>\Gamma$.

3) Latera opposita parallela AB, $\Gamma\Delta$ sunt inaequalia. I constructione nempe antecedente erit $AE=\Gamma\Delta$ (I. 34.). A $AB<AE$, adeoque $AB<\Gamma\Delta$.

4) E triangulis, in quae diagonales trapezium (Fig. 6 68.) dispescunt, duo illa, quorum bases sunt latera parallela aequiangula sunt (I. 29.) reliqua duo in trapeziis tantum ae quicruris (i. e. quorum ea latera aequalia sunt, quae non sun parallela, et quae etiam, ut ducta per terminum unius rect alteri parallela facile patet, aequaliter inclinata sunt ad unum quodvis reliquorum laterum) inter se congruunt (I. 26.).

5) Neutra diagonalis bifariam secat alteram, sed utrius que diagonalis pars maior adiacet maiori duarum parallelarum minor minori: in trapezio aequicruro tamen integrae diagona les pariterque partes unicuique parallelarum adiacentes aequa les sunt.

Ergo parallelogrammorum spatiorum opposita et latera et anguli aequalia inter se sunt.

Dico et diametrum ipsa bifariam secare. Quoniam enim aequalis est AB rectae $\Gamma\Delta$, communis autem $B\Gamma$, duae igitur AB, $B\Gamma$ duabus $\Delta\Gamma$, ΓB aequales sunt, utraque utrique, et angulus $AB\Gamma$ angulo $B\Gamma\Delta$ aequalis est; et basis igitur $A\Gamma$ basi $B\Delta$ aequalis est (Prop. 4.); et igitur triangulum $AB\Gamma$ triangulo $B\Delta\Gamma$ aequale est.

Ergo $B\Gamma$ diameter bifariam secat $A\Gamma\Delta B$ parallelogrammum. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXXV. (Fig. 70.)

Parallelogramma, super eadem basi constituta et in iisdem parallelis, aequalia inter se sunt.

6) Si in trapezio aliquo (Fig. 69.) una diagonalis $A\Delta$ bisecetur in puncto H, et per H recta ΘHI ducatur parallela lateribus trapezii parallelis inter se, bisecabit illa reliqua trapezii latera pariter ac alteram diagonalem. Ducatur enim HK parallela τῇ $B\Delta$, eruntque triangula AHK, $H\Delta I$ aequalia (I. 26.) ob $AH=H\Delta$ ex hyp., ang. $H\Delta K=\Delta HI$ (I. 29.) et $AHK=H\Delta I$ (I. 29.) hinc $AK=HI$ et $KH=I\Delta$: at etiam $KH=BI$ (I. 34.) itaque $I\Delta=BI$. Eadem ratione ostenditur, ducta $H\Delta$ parallela τῇ $A\Gamma$ esse $A\Theta=\Theta\Gamma$. Denique ob $I\Delta=BI$, erit etiam (I. 34. Cor. 23.) $BZ=\Gamma Z$.

7) Iisdem manentibus, erit $\Theta Z=\frac{AB}{2}$, et $ZI=\frac{\Gamma\Delta}{2}$. Nam ob $AK=HI$ (nr. 6.) $=KB$ (I. 34.), et $BZ=\Gamma Z$ (nr. 6.) erit ducta KZ parallela rectae $A\Theta$ (I. 34. Cor. 23.), adeoque $\Theta Z=AK=\frac{AB}{2}$. Similiter, quum sit $\Gamma\Delta=A\Delta$ (I. 34. Cor. 23.) et

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖ παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴσ ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΕΖ τ ΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση· κα κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, κα γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶν ἴση, ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴσ ἐστὶ, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσο

$BZ = \Gamma Z$, erit ducta ZA parallela rectae $B\Delta$, adeoque $ZI = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

8) Iisdem manentibus erit linea ΘI aequalis dimidia summae rectarum AB, $\Gamma\Delta$ et ZH aequalis dimidio excessui τῆ $\Gamma\Delta$ super AB. Est enim ex praeced. $\Theta Z = AK = KB = \frac{AB}{2}$ pariterque $ZI = \Gamma A = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, adeoque $\Theta I = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$. Et quum etiam $HI = \frac{AB}{2}$, erit $ZH = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$.

PROPOSITIO XXXV.

Obs. 1. Debebant quidem, si omnia exacte persequi vellis, tres casus distingui, prout vel puncta Δ, E coincidunt; vel recta EZ tota, (ut est in nostra Fig. 70.) extra $A\Delta$ cadit, vel punctum E inter A et Δ situm est. Et in versione Campani omnes hi casus enumerantur, pariterque eos habent Proclus, Commandinus, Clavius, aliique. Quum autem levi tantum mutatione eadem demonstratio in omnes quadret, non opus visum fuit, ut reliquos casus adderemus. Rob. Simson.

Sint parallelogramma *ΑΒΓΔ*, *ΕΒΓΖ* super eadem basi *ΒΓ* constituta et in eisdem parallelis *ΑΖ*, *ΒΓ*; dico aequale esse parallelogrammum *ΑΒΓΔ* parallelogrammo *ΕΒΓΖ*.

Quoniam enim parallelogrammum est *ΑΒΓΔ*, aequalis est *ΑΔ* rectae *ΒΓ* (Prop. 34.). Ex eadem ratione et *ΕΖ* rectae *ΒΓ* est aequalis (Prop. 34.). Quare et *ΑΔ* rectae *ΕΖ* est aequalis (Ax. 1.); et communis *ΔΕ*; tota igitur *ΑΕ* toti *ΔΖ* est aequalis (Ax. 2.). Est autem et *ΑΒ* rectae *ΔΓ* aequalis (Prop. 34.); duae igitur *ΕΑ*, *ΑΒ* duabus *ΖΔ*, *ΔΓ* aequales sunt, utraque utrique, et angulus *ΖΔΓ* angulo *ΕΑΒ* est aequalis (Prop. 29.), exterior interiori; basis igitur *ΕΒ*

in sua editione demonstrationem paulo commutavit, ut eadem prorsus fieret pro duobus postremis casibus. Paulo aliter adhuc ex I. 26. vel etiam ex I. 8. deduci poterat demonstratio. Ceterum in iisdem parallelis esse idem dicit, ac, quod alii dicunt, eadem altitudinem habere, quum altitudo parallelarum nihil aliud sit, quam distantia basis a parallela ipsi opposita. Cf. VI. Def. 4. Proclus addit, hoc aliaque ipsi similia theoremata appellari posse *τοπικά*, quod nempe recta *ΑΔ* utrimque quantumlibet producta locus (*τόπος*) est, in quem recta *ΕΖ* semper incidere debet. Quodsi *ΑΔ* ita locum rectae *ΕΖ* vocare velis, erit ille *τόπος διεξοδικός*, ut itaque pateat, etiam locum lineae in linea, non tantum in superficie, ut Pappus ait in Praefat. ad libr. VII. Collect. Mathem. esse posse *τόπον διεξοδικὸν* i. e. locum subinde ulterius quasi procedentem. Et quidem erit is locus ad rectam, locus planus (*τόπος ἐπίπεδος*). Idem valet de iis, quae proxime sequuntur, propositionibus 36. 37. 38. 41. Conf. Apollonii loca plana I. 3. et Isaac. Monach. in Schol. ad h. l.

Cor. 1. Speciatim quodvis parallelogrammum aequale est rectangulo super eadem basi in iisdem parallelis constituto.

ἔσται. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΖΗ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. Εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΕ, ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ αἱ ΕΒ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι

Cor. 2. Quodsi vero caeteris manentibus, basis uniu parallelogrammi maior sit, basi alterius, erit etiam prius paral lelogrammum maius, quam hoc posterius. Et quam multiplex est basis unius talium parallelogrammorum basis alterius, tam multiplex est etiam illud parallelogrammum huius.

Cor. 3. Quae hic de parallelogrammis demonstrata sunt valent eodem modo de duobus trapeziis, quorum unum later inter se parallela in iisdem parallelis constituta atque eiusden magnitudinis habet ac alterum.

tasi $ZΓ$ aequalis est, et EAB triangulum ipsi $AΓZ$ triangulo aequale erit (Prop. 4.). Commune auferatur AHE; reliquum igitur $ABHΔ$ trapezium reliquo $EHΓZ$ trapezio est aequale (Ax. 3.). Commune addatur $HBΓ$ triangulum; totum igitur $ABΓΔ$ parallelogrammum toti $EBΓZ$ parallelogrammo aequale est (Ax. 2.). Ergo parallelogramma etc.

PROPOSITIO XXXVI. (Fig. 71.)

Parallelogramma, super aequalibus basibus constituta et in eisdem parallelis, aequalia inter se sunt.

Sint parallelogramma $ABΓΔ$, $EZHΘ$ super aequalibus basibus constituta $BΓ$, ZH, et in eisdem parallelis $AΘ$, BH; dico aequale esse parallelogrammum $ABΓΔ$ parallelogrammo $EZHΘ$.

Iungantur enim BE, $ΓΘ$.

Et quoniam aequalis est $BΓ$ rectae ZH, et ZH rectae $EΘ$ est aequalis (Prop. 34.); et $BΓ$ igitur rectae $EΘ$ est aequalis (Ax. 1.). Sunt autem et parallelae, et iungunt ipsas rectae BE, $ΓΘ$, quae autem aequales et parallelas ad easdem partes coniungunt, aequales et parallelae sunt (Prop. 33.); et EB, $ΓΘ$

Obs. 2. Caeterum, ut Clavius monet, ac facile demonstrari potest, conversa quoque locum habet: nempe parallelogramma aequalia super basibus aequalibus ad easdem partes constituta sunt in iisdem parallelis. Et alia adhuc conversa vacet: Si duo parallelogramma aequalia in iisdem parallelis ita constituta sint, ut bases ex una parte in eodem puncto terminentur, sintque bases ad easdem partes huius puncti positae, etiam ex altera parte in eodem puncto terminabuntur, adeoque congruent. Similiter converti potest etiam Cor. 3.

λοι. Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ, κα
ἐστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴ
ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶ
αὐτῷ, ταῖς ΒΓ, ΑΘ· Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ
τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ
παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστὶν ἴσον. Τὰ ἄρα
παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ
ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς
βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις
ταῖς ΑΔ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον
τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ
Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω
ἡ ΒΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ,
ΔΒΓΖ· καί εἰσιν ἴσα· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς
εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς
ΒΓ, ΕΖ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμ-
μου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος
αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου
ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ

PROPOSITIO XXXVI.

Obs. Parallelogramma nempe intelliguntur, quae, si bases in eadem recta vel ipsa, vel producta, vel partim in ipsa basi, partim in basi producta, constituantur, latera his basibus opposita et parallela pariter habeant in eadem recta posita.

igitur et aequales sunt et parallelae. Parallelogrammum igitur est $EB\Gamma\Theta$, et est aequale parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ (Prop. 35.); basin enim eandem habet $B\Gamma$ ipsum, et in eisdem parallelis est $B\Gamma$, $A\Theta$. Ex eadem ratione, et $EZH\Theta$ eidem $EB\Gamma\Theta$ est aequale; quare et parallelogrammum $AB\Gamma\Delta$ parallelogrammo $EZH\Theta$ est aequale (Ax. 1.). Ergo parallelogramma etc.

PROPOSITIO XXXVII. (Fig. 72.)

Triangula super eadem basi constituta et in eisdem parallelis, aequalia inter se sunt.

Sint triangula $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ super eadem basi constituta $B\Gamma$ et in eisdem parallelis $A\Delta$, $B\Gamma$; dico aequale esse $AB\Gamma$ triangulum $\Delta B\Gamma$ triangulo.

Producatur $A\Delta$ ex utraque parte in E, Z, et per B quidem rectae ΓA parallela ducatur BE (Prop. 31.), per Γ vero rectae $B\Delta$ parallela ducatur ΓZ (Prop. 31.).

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $EB\Gamma A$, $\Delta B\Gamma Z$; et aequalia sunt (Prop. 35.); nam super eadem basi sunt $B\Gamma$ et in eisdem parallelis $B\Gamma$, EZ; et est parallelogrammi quidem $EB\Gamma A$ dimidium triangulum $AB\Gamma$; nam AB diameter ipsum bifariam secat (Prop. 34.); parallelogrammi autem $\Delta B\Gamma Z$ dimidium triangulum $\Delta B\Gamma$, nam $\Delta\Gamma$ diameter ipsum

Ceterum patet, similes et plures etiam ac in praecedente Prop. casus distingui posse, et generatim ea omnia, quae ad praecedentem propositionem notata sunt, corollaria et conversas etiam hic valere, unde non opus videtur, ea nominatim afferre. Parallelogramma haec quamvis inter se aequalia perimetros

δίχα τέμνει· τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοι ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τρι γώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα κα ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεω οντα τῶν ΒΓ, ΕΖ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοι ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνο τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλο ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθ ἡ ΖΘ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ, ἐπί τε γά ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖ παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΗΒΓ

tamen diversissimas habere possunt, quod idem etiam valet d figuris, de quibus in Prop. 35. 37. 38. sermo est. Ad Prop. 37 Proclus, cuius textus hic mancus est, idem observat.

PROPOSITIO XXXVIII.

Obs. Casus iidem distingui possunt in hac et praecedente propositione ac in Prop. 35. et 36. et corollaria etiam similia et similes conversae locum habent.

Cor. 1. (Ex Peletario) Si basis trianguli bifariam secatur recta a vertice ducta, ipsum etiam triangulum eadem recta bifariam secabitur. Et universim duo triangula super aequalibus basibus in recta eadem vel producta constituta, quae eundem verticem habent, sunt aequalia: et triangulorum aeque

bifariam secat (Prop. 34.); aequalium autem dimidia aequalia inter se sunt (Ax. 7.); aequale igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $\Delta B\Gamma$. Ergo triangula etc.

PROPOSITIO XXXVIII. (Fig. 73)

Triangula super aequalibus basibus constituta et in eisdem parallelis, aequalia inter se sunt.

Sint triangula $AB\Gamma$, ΔEZ super aequalibus basibus constituta $B\Gamma$, EZ, et in eisdem parallelis BZ, $A\Delta$; dico aequale esse triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ.

Producatur enim $A\Delta$ ex utraque parte in H, Θ, et per B quidem rectae ΓA parallela ducatur BH (Prop. 31.), per Z vero rectae ΔE parallela ducatur $Z\Theta$ (Prop. 31.).

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $HB\Gamma A$, $\Delta EZ\Theta$; et aequale $HB\Gamma A$ parallelogrammo $\Delta EZ\Theta$ (Prop. 36.); in aequalibus enim et basibus sunt $B\Gamma$, EZ, et in eisdem parallelis BZ, $H\Theta$; est

alterum quam multiplex est basis unius trianguli basis alterius, tum multiplex erit prius triangulum trianguli posterioris.

Cor. 2. Per punctum Δ in latere trianguli $AB\Gamma$ (Fig. 74.) datum, at non in medio $B\Gamma$ situm, si bisecandum sit triangulum, bisecetur $B\Gamma$ in E (I. 10.) et iungatur AE, tum ducta $A\Delta$, et per E ei parallela EZ (I. 31.) ducatur ΔZ, eritque (Cor. praeced.) $AE\Gamma$ dimidia pars $\triangle AB\Gamma$: at, quum $AEZ = \Delta EZ$ (I. 37.), erit etiam (I. Ax. 2.) triangulum $Z\Delta\Gamma = AE\Gamma =$ dimidio triangulo $AB\Gamma$ (Peletarius).

Cor. 3. Duae diametri quodvis parallelogrammum dividunt in quatuor triangula aequalia.

Cor. 4. Summa aut differentia duorum parallelogrammorum (aut triangulorum) in iisdem parallelis constitutorum

παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΖ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίσεα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθεῖα παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστίν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πα-

aequalis est parallelogrammo (aut triangulo) in iisdem parallelis constituto, cuius basis aequalis est summae aut differentiae basium illorum parallelogrammorum (aut triangulorum).

PROPOSITIO XXXIX.

Cor. 1. (e Campano) Recta ΔΕ (Fig. 77.) secans bifariam in Δ, Ε latera ΑΒ, ΑΓ trianguli ΑΒΓ erit reliquo lateri ΒΓ

rem parallelogrammi $HB\Gamma A$ dimidium triangulum $AB\Gamma$ (Prop. 34.), AB enim diameter ipsum bifariam secat; parallelogrammi vero $\Delta EZ\Theta$ dimidium triangulum $ZE\Delta$ (Prop. 34.), nam ΔZ diameter ipsum bifariam secat. Aequalium autem dimidia aequalia inter se sunt (Ax. 7.); aequale igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ. Ergo triangula etc.

PROPOSITIO XXXIX. (Fig. 75.)

Aequalia triangula, super eadem basi constituta et ad easdem partes, in iisdem parallelis sunt.

Sint aequalia triangula $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$, super eadem basi $B\Gamma$ et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse. Iungatur enim $A\Delta$; dico parallelam esse $A\Delta$ rectae $B\Gamma$.

Si enim non, ducatur per A punctum rectae $B\Gamma$ parallela AE (Prop. 31.); et iungatur $E\Gamma$.

Aequale igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $EB\Gamma$ (Prop. 37.); super eadem enim basi est $B\Gamma$ super qua ipsum $BE\Gamma$, et in eisdem parallelis $B\Gamma$, AE; sed triangulum $AB\Gamma$ triangulo $\Delta B\Gamma$ est aequale; ergo et triangulum $\Delta B\Gamma$ triangulo $EB\Gamma$ aequale est (Ax. 1.), maius minori, quod fieri nequit (Ax. 9.). Non igitur

parallela. Est enim $\triangle A\Delta E = \triangle \Delta EB$ (I. 38. Cor. 1.) et eodem modo $\triangle A\Delta E = \triangle \Delta E\Gamma$, unde $\triangle \Delta EB = \triangle \Delta E\Gamma$ (I. Ax. 1.) adeoque ΔE parallela rectae $B\Gamma$ (I. 39.) Cf. I. 34. Cor. 23.

Cor. 2. (E Clavio) Omne quadrilaterum $AB\Gamma\Delta$ (Fig. 60.) quod ab utraque diametro bifariam dividitur, parallelogrammum est. Quum enim sit (hyp.) $\triangle B\Delta\Gamma =$ dimidio quadrilatero $AB\Gamma\Delta$, pariterque etiam $\triangle A\Delta\Gamma =$ eidem dimidio quadrilatero

ράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

ΑΒΓΔ, erit △ΒΔΓ=△ΑΔΓ, adeoque (I. 39.) ΑΒ rectae ΔΓ parallela. Eodemque modo ostenditur esse rectas ΑΓ, ΒΔ parallelas.

Cor. 3. Quadrilaterum, quod ab utraque diametro ita dividitur in quatuor triangula, ut bina quaecunque ad verticem opposita inter se aequalia sint, est parallelogrammum. Redit enim res ad praeced. Cor. 2.

Cor. 4. Quadrilaterum, quod ab utraque diametro in quatuor triangula aequalia dividitur, est parallelogrammum. Pariter redit ad Cor. 2.

PROPOSITIO XL.

Obs. 1. Notandum est, quod Baermannus monet, bases intelligi in eadem recta positas. Bases autem contiguas esse, ut in figura, nihil attinet.

Obs. 2. Alia conversa propositionum 37. 38. similis ei, quam ad 35, 36. notavimus, locum habet, nempe triangula aequalia in iisdem parallelis constituta etiam eandem vel aequalem basin habent.

Obs. 3. In parallelogrammis quoque idem valet, nempe parallelogramma aequalia, super basibus aequalibus et in eadem recta constitutis, ad easdem basium partes posita in iisdem parallelis erunt, vel, ut alii efferunt, eandem altitudinem habebunt; et vice versa, si caeteris manentibus, eandem altitudinem habeant, vel in iisdem parallelis constituta sint, eandem vel aequalem

parallela est AE rectae $B\Gamma$. Similiter autem ostendemus neque aliam quampiam esse praeter $A\Delta$; $A\Delta$ igitur rectae $B\Gamma$ est parallela. Ergo aequalia etc.

PROPOSITIO XL. (Fig. 76.)

Aequalia triangula, super aequalibus basibus constituta et ad easdem partes, in iisdem parallelis sunt.

basin habebunt. Eaedem conversae denique etiam de iis trapeziis valent, de quibus in I. 35. Cor. 3. diximus.

PROPOSITIO XLI.

Obs. 1. Facile patet, 1) idem valere, si, caeteris manentibus, triangulum et parallelogrammum non *eandem*, at aequalem basin habeant. Conf. Peletarius. 2) Si parallelogrammum et triangulum in iisdem parallelis fuerit, sit autem basis trianguli dupla basis parallelogrammi, utramque figuram fore aequalem.

Obs. 2. Proclus notat, converti posse propositionem duplici modo. Nempe a) si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, habeant autem eandem vel aequalem basin super eadem recta constitutam, et sit utraque figura ad easdem huius rectae partes; erunt duae figurae in iisdem parallelis. b) Si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, sit autem utraque figura in iisdem parallelis, erunt etiam vel in eadem vel in aequali basi. Et simili ratione convertetur Prop. 2., quam modo attulimus.

Cor. 1. (E Proclo) Si triangulum et trapezium super eadem (vel aequali) basi, et in iisdem parallelis fuerint, maior autem linea parallela sit basis trianguli: erit trapezium minus duplo trianguli. Si vero minor linea trapezii sit basis trianguli: erit trapezium maius duplo trianguli. Quod facile patet, constructo super eadem basi et in iisdem parallelis parallelogrammo.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, ἐπὶ ἴσων βα σεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΓΕ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγ ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπ ζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ Α τῇ ΒΕ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλ ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τρ γώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, Γ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, Α Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ τρ γώνῳ· καὶ τὸ ΔΓΕ τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓ τριγώνῳ, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνα τον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. Ὁμοίω δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ Α ἄρα τῇ ΒΕ ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα καὶ τ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλα σιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Cor. 2. (E Proclo) Trapezium ΑΒΓΔ (Fig. 79.) habe duo latera ΑΓ, ΒΔ parallela, duplum est trianguli ΑΒΕ, quo basin habet ΑΒ unum latus trapezii conjungens duas parallela verticem vero punctum Ε medium lateris oppositi. Produc tur enim unum latus trianguli ΑΕ, donec conveniat cum rec ΒΔ producta in Ζ, eritque, ob parallelas ΑΓ, ΒΖ, ang. ΑΓ =ΖΔΕ (I. 29.) et, quum praeterea sit ang. ΑΕΓ=ΔΕΖ (I. 15 et ex hypoth. ΓΕ=ΕΔ; erit (I. 26.) triangulum ΑΓΕ=ΖΕ et ΑΕ=ΖΕ, adeoque triangulum ΖΕΒ=ΓΕΑ+ΒΕΔ. At, c ΑΒ=ΖΕ, est etiam (I. 38. Cor. 1.) triang. ΖΕΒ=ΑΕΒ. Ita que triangulum ΑΕΒ=ΓΕΑ+ΒΕΔ i. e. triangulum ΑΕΒ e pars dimidia trapezii ΑΒΓΔ, vel trapezium duplum trianguli.

Sint aequalia triangula $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$, super aequalibus basibus constituta $B\Gamma$, ΓE et ad easdem partes; dico et in iisdem parallelis esse. Iungatur enim $A\Delta$; dico parallelam esse $A\Delta$ rectae BE.

Si enim non, ducatur per A rectae BE parallela ΔZ (Prop. 31.), et iungatur EZ.

Aequale igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $Z\Gamma E$ (Prop. 38.); in aequalibus enim basibus sunt $B\Gamma$, ΓE et in eisdem parallelis BE, ΔZ. Sed triangulum $AB\Gamma$ aequale est triangulo $\Delta\Gamma E$; et triangulum $\Delta\Gamma E$ igitur aequale est triangulo $Z\Gamma E$ (Ax. 1.), maius minori, quod fieri nequit (Ax. 9.); non igitur parallela est ΔZ rectae BE. Similiter autem ostendemus neque aliam quampiam esse praeter $A\Delta$; $A\Delta$ igitur rectae BE est parallela. Ergo aequalia etc.

PROPOSITIO XLI. (Fig. 78.)

Si parallelogrammum eandem habeat basin quam triangulum, et in eisdem parallelis sit, duplum est parallelogrammum trianguli.

Cor. 3. Si, iisdem manentibus ut in Cor. praecedente, ducta Fig. 80. per punctum E recta HZ τῇ AB parallela, completur parallelogrammum $ABHZ$, erit hoc parallelogrammum, aequale trapezio $AB\Gamma\Delta$. Et, quum ducta per E recta $E\Theta$ parallela τῇ $A\Gamma$, sit $E\Theta = AH$ (I. 34.); at ex Append. ad I. Sl. 8. $E\Theta = \frac{A\Gamma + B\Delta}{2}$, erit trapezium $AB\Gamma\Delta$, cuius latera $A\Gamma$ $B\Delta$ parallela sunt, aequale parallelogrammo $ABHZ$ inter easdem parallelas posito, cuius utrumque reliquum latus AH vel BZ aequale est dimidiae summae eorum trapezii laterum, quae inter se parallela sunt, vel erit aequale parallelogrammo, quod eandem cum trapezio altitudinem habet, basin autem aequa-

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ, καὶ ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΕΒΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τοῦ ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, Α[illegible] Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. Ἐὰν ἄρα παραλλη[illegible] λόγραμμον καὶ τὰ ἑξῆς.

lem dimidiae summae parallelorum trapezii laterum. Thom. Simpson. Elem. of Geom. Book II. Theor. IV.

Cor. 4. Quodsi fuerint duo triangula rectangula ΑΒ[illegible] αβγ (Fig. 80. a.), in quibus praeter angulos rectos Γ, γ [illegible] quales etiam sint anguli ΒΑΓ, βαγ, adeoque (I. 32. Cor. 3 etiam angulus ΑΒΓ=αβγ, erit (si latera in triangulis aequ angulis opposita angulis aequalibus latera homologa appe lentur) rectangulum, cuius unum latus est hypothenusa uni trianguli, alterum autem alteruter cathetus alterius triangul aequale rectangulo, cuius unum latus est hypothenusa a terius trianguli, alterum autem cathetus homologus prior trianguli v. c. rectang. ΑΒ×βγ= rectang. αβ×ΒΓ. Posi enim recta αγ super ΑΒ in ΑΕ, et ang. βαγ super ΒΑ ob aequalitatem horum angulorum erit αβ in ΑΓ ita, ut v. punctum β iaceat in Δ, sitque ΑΔ=αβ, unde ducta ΕΔ, er (I. 4.) triangulum ΑΔΕ=αβγ et angulus ΑΕΔ rectus. Con pleatur iam rectangulum ΑΓΒΘ, ducaturque ΔΖ parallela rect ΒΓ i. e. (I. 29.) ad rectos angulos rectae ΑΔ, eritque ΑΔΖ

Parallelogrammum enim $AB\Gamma\Delta$ eandem habeat basin $B\Gamma$, quam triangulum $EB\Gamma$, et in eisdem parallelis $B\Gamma$, AE sit; dico parallelogrammum $AB\Gamma\Delta$ duplum esse trianguli $EB\Gamma$.

Iungatur enim $A\Gamma$.

Aequale igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $EB\Gamma$ (Prop. 37.); nam super eadem basi est $B\Gamma$ super qua et $EB\Gamma$, et in eisdem parallelis $B\Gamma$, AE. Sed $AB\Gamma\Delta$ parallelogrammum duplum est trianguli $AB\Gamma$, nam $A\Gamma$ diameter ipsum bifariam secat (Prop. 34.); quare $AB\Gamma\Delta$ parallelogrammum et trianguli $EB\Gamma$ duplum est. Si igitur parallelogrammum etc.

rectangulum $A\Delta\times\Delta Z$, vel, ob $A\Delta=\alpha\beta$ (Demonstr.) et $\Delta Z=B\Gamma$ (I. 34.) erit $A\Delta Z\Theta$ rectangulum $\alpha\beta\times B\Gamma$. Per punctum Δ deinde ducta recta $H\Delta I$ parallela rectae AB, completur rectangulum $AHIB$, ductis nempe per A et B rectis AH, BI rectae AB ad rectos angulos, unde erit $AH=BI=\Delta E$ (I. 34.) $=\beta\gamma$ (I. 4.), et rectangulum $AHIB$ erit rectangulum $AB\times\Delta E$ vel $AB\times\beta\gamma$. Quodsi iam ducatur recta $B\Delta$, erit triangulum $A\Delta B$ dimidium rectanguli $A\Delta Z\Theta$ i. e. rectg. $\alpha\beta\times B\Gamma$ (I. 43.). Idem vero triangulum $A\Delta B$ est quoque (I. 43.) dimidium rectanguli $AHIB$ i. e. rectg. $AB\times\beta\gamma$: itaque rectangulum $AB\times\beta\gamma=\alpha\beta\times B\Gamma$ (I. Ax. 6.). Ita hanc propositionem, quae vulgo demum e doctrina triangulorum similium libr. VI. derivatur, at ante iam utilis esse potest, non in auxilium vocata doctrina de rationibus et proportionibus demonstrat Gruson. Abhandl. der Berlin. Acad. der Wissensch. für 1814—1815. pag. 45. 46. (Neue höchswichtige und unerwartete Vereinfachung der Euklid. Geometrie §§. 9. 10.)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν

Cor. 5. Quodsi in Cor. praecedente fuerit $\alpha\beta = B\Gamma$, erit $AB \times \beta\gamma = \alpha\beta^{q} = B\Gamma^{q}$ (I. 34. Cor. 21.) Nominatim itaque, si (Fig. 80. b.) in triangulo $AB\Gamma$ ad Γ rectangulo demittatur ex Γ ad AB perpendicularis $\Gamma\Delta$, erit rectangulum inter hypotenusam AB et segmentum $B\Delta$ aequale quadrato ex $B\Gamma$. Nam triangula $AB\Gamma$, $\Gamma B\Delta$, ob angulum rectum $\Delta = \Gamma$, et angulum B communem erunt aequiangula, adeoque $AB \times B\Delta = B\Gamma \times B\Gamma = B\Gamma^{q}$. Eodemque modo, quum etiam triangula rectangula $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$ sint aequiangula, erit $B\Delta \times A\Delta = A\Gamma^{q}$. Has quoque propositiones, quas vulgo ex V. 8. et 17. deducunt, hac ratione demonstrat Gruson *l.* c. §. 16. Quodsi Théor. I. 47. non ut in Cor. sq. hinc, sed independenter ab

PROPOSITIO XLII. (Fig. 81.)

Dato triangulo aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit quidem datum triangulum $AB\Gamma$, datus vero angulus rectilineus Δ; oportet igitur triangulo $AB\Gamma$ aequale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi Δ aequale.

Secetur $B\Gamma$ bifariam in E (Prop. 10.), et iungatur AE, et constituatur ad $E\Gamma$ rectam et ad punctum in ea E angulus ΓEZ ipsi Δ aequalis (Prop. 23.), et per A quidem rectae $E\Gamma$ parallela ducatur AH (Prop. 31.); per Γ vero rectae EZ parallela ducatur ΓH (Prop. 31.); parallelogrammum igitur est $ZE\Gamma H$.

Et quoniam aequalis est BE rectae $E\Gamma$, aequale est et triangulum ABE triangulo $AE\Gamma$ (Prop. 38.); nam super aequalibus basibus BE, $E\Gamma$ sunt, et in eisdem parallelis $B\Gamma$, AH; duplum igitur est triangulum $AB\Gamma$ trianguli $AE\Gamma$. Est autem et parallelogrammum $ZE\Gamma H$ duplum trianguli $AE\Gamma$ (Prop. 41.); basin enim eandem habet quam $AE\Gamma$, et in eisdem

hac propositione demonstretur, poterit vicissim hoc Cor. ex I. 47. derivari.

Cor. 6. Quodsi in eadem figura super AB constituatur quadratum $AB\Delta E$, et perpendicularis ΓA producatur, dum eam recta ΔE conveniat in Z, erit $B\Delta\Delta Z$ rectangulum $AB \times B\Delta$, et $\Delta\Delta ZE$ rectangulum $B\Delta \times \Delta\Delta$, unde, quum duo haec rectangula simul sumpta efficiant quadratum ex AB, statim prodit celebre illud theorema Pythagoraeum, quod infra I. 47. habebitur. Cf. Gruson. l. c. p. 50.

Cor. 7. Porro, si comparentur triangula rectangula aequiangula $A\Gamma B$, $\Delta\Delta\Gamma$, erit rectangulum $AB \times \Gamma\Delta = A\Gamma \times \Gamma B$,

ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλληλοις· ἴσον ἄρα ἐ
τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, κ
ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παρα
ληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ, ἐν γωνίᾳ
ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμ
τρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀ
λήλοις ἐστίν.

nempe rectangulum sub hypotenusa et perpendiculari ΓΔ
quale rectangulo sub cathetis.

PROPOSITIO XLII.

Obs. Problema conversum, quod Peletarius habet; da
parallelogrammo aequale triangulum constituere in angu
dato, nihil difficultatis habet.

PROPOSITIO XLIII.

Obs. In quovis parallelogrammo per punctum quo
cunque diametri duci possunt (I. 31.) duae rectae, quaru
una uni, adeoque etiam (I. 30.) alteri duorum laterum opp
sitorum parallelogrammi, altera autem reliquis duobus para
lelogrammi lateribus parallela sit, quo facto nova duo para
lelogramma existent, per quorum angulos oppositos diamet
transit, et alia duo, per quae illa non transit. Haec duo p
steriore loco nominata Complementa dicuntur duorum illorur
quae antea diximus.

Cor. 1. Patet, quatuor haec parallelogramma aequia
gula esse cum primario parallelogrammo ΑΒΓΔ (I. 29.). Pra
terea, prout in hoc duo latera adiacentia aequalia aut ina
qualia fuerint, erunt etiam in iis, quae circa diametrum sun
parallelogrammis latera aequalia vel inaequalia. Nempe si s

est parallelis, in quibus triangulum $AE\Gamma$; aequale igitur est $ZE\Gamma H$ parallelogrammum triangulo $AB\Gamma$, et habet ΓEZ angulum aequalem dato Δ.

Dato igitur triangulo $AB\Gamma$ aequale parallelogrammum constitutum est $ZE\Gamma H$ in angulo ΓEZ, qui est aequalis angulo Δ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XLIII. (Fig. 82.)

In omni parallelogrammo complementa eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum inter se sunt aequalia.

$\Delta\Gamma > = < \begin{cases} AB \\ A\Gamma \end{cases}$, erit etiam (I. 5. et I. 18.) $A\Gamma\Delta > = <$ $\Gamma\Delta\Delta$, adeoque, quum $AK\Theta = A\Gamma\Delta$, etiam $AK\Theta > = < \begin{cases} \Gamma\Delta\Delta, \\ KA\Theta \end{cases}$ ac proinde $A\Theta > = < \begin{cases} K\Theta \\ AE \end{cases}$ (I. 6. et I. 19.). Eademque ratione ostenditur, fore iisdem casibus etiam $KZ > = < KH$.

Cor. 2. Nominatim itaque, si $AB\Gamma\Delta$ fuerit quadratum, tum ea, quae circa diametrum sunt, parallelogramma $AEK\Theta$, $KH\Gamma Z$ quadrata erunt.

Cor. 3. Complementa eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum semper quidem aequiangula sunt inter se et cum parallelogrammo primario, duo autem latera unius aequalia erunt duobus lateribus alterius tum tantum, si parallelogrammum primarium fuerit aequilaterum, vel etiam, si punctum K, per quod ductae sunt duae rectae lateribus parallelogrammi parallelae, sumtum fuerit in media diametro: reliquis casibus latera unius complementi non erunt aequalia lateribus alterius.

Cor. 4. Quodsi fuerint duo triangula rectangula (Fig. 82 a.) $A\Delta\Gamma$, $\alpha\delta\gamma$, in quibus praeter angulos rectos Δ, δ aequales etiam sint anguli $\Gamma A\Delta$, $\gamma\alpha\delta$ adeoque (I. 32. Cor. 3.) etiam anguli $A\Gamma\Delta$, $\alpha\gamma\delta$, erit, si latera homologa nominemus eodem sensu ac in I. 41. Cor. 4. rectangulum, cuius unum

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΑΚ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΚΔ παραπληρώματί ἐστιν ἴσον. Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου καὶ τὰ ἑξῆς.

latus est cathetus unius, alterum autem cathetus non homologus alterius trianguli, aequale rectangulo, cuius unum latus est reliquus cathetus prioris, alterum reliquus cathetus posterioris trianguli, nempe rectang. $\Delta\Delta\times\gamma\delta=$ rectangulo $\Gamma\Delta\times\alpha\delta$. Ponatur enim $\alpha\gamma$ super $\Delta\Gamma$ in ΔK, et angulus $\gamma\alpha\delta$ super angulo $\Gamma\Delta\Delta$, erit, ob aequalitatem horum angulorum $\alpha\delta$ in $\Delta\Delta$, ita, ut v. gr. punctum δ iaceat in Θ, unde, ducta $K\Theta$, erit (I. 4.) triangulum $\Delta\Theta K=\alpha\delta\gamma$, et angulus $\Delta\Theta K$ rectus, adeoque (I. 28.) recta ΘK parallela rectae $\Gamma\Delta$. Compleatur rectangulum $\Delta B\Gamma\Delta$, et producatur ΘK, dum conveniat cum recta $B\Gamma$ in H, ducaturque per K recta EKZ parallela rectae $\Delta\Delta$, eritque, ob $\Delta B=\Gamma\Delta$ (I. 34.), rectangulum $\Delta\Theta BH=$ rectangulo $\Delta B\times\Delta\Theta=\Delta\Gamma\times\Delta\Theta=\Delta\Gamma\times\alpha\delta$, et rectangulum $\Delta EZ\Delta=$

Sit parallelogrammum $AB\Gamma\Delta$, diameter autem ipsius $A\Gamma$, et circa $\Delta\Gamma$ parallelogramma quidem sint $E\Theta$, ZH, quae vero dicuntur complementa, BK, $K\Delta$; dico aequale esse complementum BK complemento $K\Delta$.

Quoniam enim parallelogrammum est $AB\Gamma\Delta$, diameter autem ipsius $A\Gamma$, aequale est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $A\Gamma\Delta$ (Prop. 34.). Rursus quoniam parallelogrammum est $EK\Theta A$, diameter autem ipsius est AK, aequale est triangulum AEK triangulo $A\Theta K$ (Prop. 34.). Ex eadem ratione et triangulum $KZ\Gamma$ triangulo $KH\Gamma$ est aequale (Prop. 34.). Quoniam igitur triangulum quidem AEK triangulo $A\Theta K$ est aequale; $KZ\Gamma$ vero triangulo $KH\Gamma$, triangulum AEK cum triangulo $KH\Gamma$ est aequale triangulo $A\Theta K$ cum triangulo $KZ\Gamma$ (Ax. 2.); est autem et totum triangulum $AB\Gamma$ toti $A\Delta\Gamma$ aequale. Reliquum igitur BK complementum reliquo $K\Delta$ complemento est aequale (Ax. 3.). Omnis igitur parallelogrammi etc.

rectangulo $A\Delta\times\Delta Z=A\Delta\times\Theta K=A\Delta\times\gamma\delta$. At ex I. 43. est rectang. $BEKH=K\Theta Z\Delta$, hinc, addito communi $AEK\Theta$, erit $A\Theta BH=$ rectangulo $AEZ\Delta$, i. e. $\Delta\Gamma\times\alpha\delta=A\Delta\times\gamma\delta$. Propositio haec, de qua eadem observanda sunt, quae de I. 41. Cor. 4. cum quo arcte cohaeret, hac ratione demonstrata fuit a Grunow. l. c. §. 9.

Cor. 5. Quodsi in Cor. praecedente cathetus unius trianguli v. c. $A\Delta$ aequalis fuerit cathetho non homologo alterius $\gamma\delta$, erit $\Delta\gamma\times\alpha\delta=\gamma\delta q=A\Delta q$. Nominatim itaque, si (Fig. 80. b.) in triangulo $AB\Gamma$ ad Γ rectangulo ex Γ demittatur ad AB perpendicularis $\Gamma\Delta$, erit rectangulum segmentorum $A\Delta$, $B\Delta$ aequale quadrato ex $\Gamma\Delta$. Nempe, quum sit triangulum $AB\Gamma$ aequiangulum triangulo $\Gamma B\Delta$, ut vidimus in I. 41. Cor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥςτε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΒΑ, καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ. ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ ἄρα γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι

5., erit nominatim angulus A = angulo $B\Gamma A$, adeoque, quum in triangulis $AA\Gamma$, ΓAB sint praeterea etiam anguli ad A recti (hyp.), erunt etiam haec triangula aequiangula (I. 32. Cor. 3.) adeoque ex Cor. 4. $AA \times AB = \Gamma A^2$. Cf. Gruson. l. c. §. 16.

Cor. 6. Alia ratione si comparentur triangula rectangula aequiangula $AA\Gamma, \Gamma AB$, erit rectangulum $A\Gamma \times \Gamma A = B\Gamma \times AA$.

Cor. 7. Proclo, cuius commentarius ad hanc propositionem ab initio mancus est, observante, etiam, si non ex uno, sed e duobus punctis diametri ducantur rectae lateribus parallelogrammi parallelae (Fig. 83. 84.) spatia, quae ex utraque parte diametri supersunt, demtis istis circa diametrum parallelogrammis (sive illa se invicem non contingant, sive partem

PROPOSITIO XLIV. (Fig. 85.)

Ad datam rectam, dato triangulo aequale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit quidem data recta AB, datum vero triangulum Γ, et datus angulus rectilineus Δ; oportet igitur ad datam rectam AB, dato triangulo Γ aequale parallelogrammum applicare in angulo aequali ipsi Δ.

Constituatur parallelogrammum $BEZH$ aequale triangulo Γ, in angulo EBH qui est aequalis, angulo Δ (Prop. 42.); et ponatur in directum BE rectae BA, et producatur ZH ad Θ, et per A alterutri ipsarum BH, EZ parallela ducatur $A\Theta$ (Prop. 31.), et iungatur ΘB. Et quoniam in parallelas $A\Theta$, EZ recta incidit ΘZ, anguli $A\Theta Z$, ΘZE duobus rectis sunt aequales (Prop. 29.); ergo $B\Theta H$, HZE duobus rectis minores sunt; rectae autem a minoribus quam duobus rectis in infinitum productae concurrunt (Post. 5. vel

diqua communem habeant) inter se aequalia erunt, quod eodem modo demonstratur. Addi poterat idem verum fore, si vel plura duobus parallelogramma circa diametrum constituantur. Conversum quoque huius theorematis, quod Poletanus habet, facile probari potest. Nempe, si parallelogrammum divisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita, ut ex iis duo adversa aequalia sint, consistent reliqua duo circa diametrum.

PROPOSITIO XLIV.

Obs. 1. Proclus monet, hanc parallelogrammi dato triangulo aequalis ad datam rectam applicationem (παραβολὴν) prima quasi stamina continere doctrinae de Parabola, Hyper-

συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΛ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΛ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. Ἀλλὰ καὶ [1]) τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΛ τῇ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΒ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστι ἴση τῇ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μέ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

1) Καὶ legunt Edd. Basil. et Ox.; omittit Paris. cum Cod. a

bola et Ellipsi, et esse antiquum Pythagoraeorum Musae inventum.

Obs. 2. Caeterum alia ratione problema ita adhuc construi potest. Facto, ut ante (Fig. 96.), parallelogrammo *BEZH* aequali triangulo *Γ* in angulo *EBH*=*Δ*, ponatur *BE* in directum rectae *BA*. Ducatur deinde recta *AH*, cui per *E* parallela ducatur *EM*, quae cum producta *HB* conveniet in *M*

Ax. 11.); ΘB, ZE igitur productae concurrent. Producantur et concurrant in K, et per K punctum alterutri ipsarum EA, $Z\Theta$ parallela ducatur KA (Prop. 31.), et producantur ΘA, HB ad A, M puncta.

Parallelogrammum igitur est ΘAKZ, diameter autem ipsius ΘK, et circa ΘK parallelogramma quidem AH, ME; quae vero dicuntur complementa AB, BZ; aequale igitur est AB ipsi BZ (Prop. 43.); sed et BZ triangulo Γ est aequale; et AB igitur triangulo Γ est aequale. Et quoniam aequalis est angulus HBE angulo ABM, sed HBE angulo Δ est aequalis; et ABM igitur angulo Δ est aequalis.

Ad datam igitur rectam AB, dato triangulo Γ aequale parallelogrammum applicatum est AB, in angulo ABM, qui est aequalis angulo Δ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XLV. (Fig. 87.)

Dato rectilineo, aequale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

I. 29. Cor. 3.), et per M ducatur recta MA parallela rectae AB, pariterque per A recta AA parallela rectae BM, cum qua BA conveniet in puncto aliquo A (I. 29. Cor. 5.) eritque parallelogrammum $ABAM=BEZH$. Ducantur enim rectae EH, AM, eritque ob parellelas AH, EM, triangulum ABH $=AMH$ (I. 37.) adeoque, demto communi ABH, erit HBE $=ABM$ (I. Ax. 3.). At HBE est pars dimidia parallelogrammi $BEZH$ (I. 34.), pariterque ABM pars dimidia parallelogrammi $ABAM$. Itaque $ABAM=BEZH$ (I. Ax. 6.). Similis erit constructio, si recta BE in ipsa BA ponatur.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ὁ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ, ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἣ ἴση ἐστὶ τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΘΗ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ, ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἣ ἐστιν ἴση τῇ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἐστὶν ἴση. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν· Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΚ, ΘΜ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Κοινὴ προς-

Obs. 3. Simile est Peletarii problema conversum: ad datam rectam dato parallelogrammo constituere aequale triangulum in angulo dato.

PROPOSITIO XLV.

Obs. Iure monet Rob. Simson., rectarum *KM*, *ZH* parallelismum ex ipsa constructione immediate consequi postquam ostensum fuerit, *ZH*, *HΔ* pariter ac *KΘ*, *ΘM* in directum esse, nec opus esse, eum inde deducere, quod *KZ*

Sit quidem datum rectilineum $AB\Gamma\Delta$, datus vero angulus rectilineus E; oportet igitur rectilineo $AB\Gamma\Delta$ aequale parallelogrammum constituere, in dato angulo E.

Jungatur enim ΔB, et constituatur triangulo $AB\Delta$ aequale parallelogrammum $Z\Theta$ (Prop. 42.), in angulo ΘKZ, qui aequalis est angulo E; et applicetur ad ΘH rectam parallelogrammum HM aequale triangulo $AB\Gamma$, in angulo $H\Theta M$, qui est aequalis angulo E (Prop. 44.).

Et quoniam E angulus utrique ipsorum ΘKZ, $H\Theta M$ est aequalis; et ΘKZ igitur angulo $H\Theta M$ est aequalis (Ax. 1.). Communis addatur $K\Theta H$; ergo $ZK\Theta$, $K\Theta H$, ipsis $K\Theta H$, $H\Theta M$ aequales sunt (Ax. 2.). Sed $ZK\Theta$, $K\Theta H$ duobus rectis aequales sunt (Prop. 29.); et $K\Theta H$, $H\Theta M$ igitur duobus rectis aequales sunt (Ax. 1.). Ad aliquam igitur rectam $H\Theta$, et ad punctum in ea Θ, duae rectae ΘK, ΘM, non ad easdem partes positae, angulos deinceps duobus rectis aequales faciunt; in directum igitur est $K\Theta$ rectae ΘM (Prop. 14.). Et quonim in parallelas KM, ZH recta incidit ΘH, anguli alterni $M\Theta H$, ΘHZ aequales inter se sunt (Prop. 29.). Commu-

$M\Delta$ sint aequales et parallelae i. e. ex I. 33. Caeterum Pfleiderer. iure pariter monet, applicationem huius problematis ad VI. 25. exigere, ut parallelogrammum non solum datum angulum habeat, *sed etiam ad datam rectam applicetur*; pariter ac in I. 44. iussum fuerat. Nova autem hac conditione addita problema simili reductione absolvetur ac I. 44. ut Commandinus et Rob. Simson. observant in Cor. ad hanc propositionem. Aliter figuram rectilineam quamcunque v. c. $AB\Gamma\Delta E$ (Fig. 66.) primum quidem in triangulum ipsi aequale, deinde

κείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ
ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, Θ
δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ
δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ
τῇ ΗΛ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΖ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παρ
ληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ· καὶ ἡ ΚΖ
τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι· καὶ ἐπιζευγ
ουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ, καὶ αἱ ΚΜ,
ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· παραλληλόγραμμον
ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν Λ
τρίγωνον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΔΒΓ
ΗΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ
ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ
παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ ΚΖΛΜ, ἐν γω
τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ Ε. Ὅ
ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψ

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ
ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

hoc triangulum ope I. 44. in parallelogrammum, quod dat angulum ac datum latus habeat, convertere docent in hi fere modum. Ducantur ex aliquo angulo figurae *B* dia nales *BΔ*, *BE* etc. Ducta deinde recta *ΓZ* parallela re *BΔ* producatur, donec (I. 29. Cor. 3.) cum producta *EΔ* c veniat in *Z*, eritque, ducta *BZ*, triangulum *BΓΔ*=*BZΔ* 37.), adeoque figura *BΑΓΔE* iam transformata est in aliam aequalem *BΑΓZ*, cuius laterum numerus unitate minor numero laterum, quae figura primaria habebat. Pariter dei nova hac figura transformata in aliam, quae laterum numer

is addatur ΘHA; ergo $M\Theta H$, ΘHA angulis ΘHZ, ΘHA aequales sunt (Ax. 2.). Sed $M\Theta H$, ΘHA duobus rectis aequales sunt (Prop. 29.); et ΘHZ, ΘHA igitur duobus rectis aequales sunt (Ax. 1.); in directum igitur est ZH rectae HA (Prop. 14.). Et quoniam KZ rectae ΘH aequalis et parallela est, sed ΘH rectae MA; et KZ igitur rectae MA aequalis et parallela est (Ax. 1. et Prop. 30.); et iungunt ipsas rectae KM, ZA, itaque et KM, ZA aequales et parallelae sunt (Prop. 33.); parallelogrammum igitur est $KZAM$. Et quoniam aequale est quidem $AB\Delta$ triangulum parallelogrammo $Z\Theta$; $AB\Gamma$ vero parallelogrammo HM; totum igitur $AB\Gamma\Delta$ rectilineum toti $KZAM$ parallelogrammo est aequale.

Ergo dato rectilineo $AB\Gamma\Delta$ aequale parallelogrammum constitutum est $KZAM$ in angulo ZKM, qui est aequalis dato E. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XLVI. (Fig. 89.)

Ex data recta quadratum describere.

Sit data recta AB; oportet igitur ex AB recta quadratum describere.

semo unitate minorem habeat, et re ulterius continuata, perveniatur tandem ad triangulum datae figurae aequale. Ita in nostra figura ducta $Z\Theta$ parallela rectae BE conveniet (I. 29. Cor. 3.) cum producta AB in puncto aliquo Θ, eritque, ducta ΘE, triangulum $B E\Theta = BEZ$ (I. 37.) adeoque figura $ABEZ =$ triangulo $A\Theta E$, unde res deducta est ad I. 44. Haec paucis tantum attingere visum est. Qui plura cupit, adeat Klügel. (Mathem. Wörterb. sub voce: Figuren und ihre Verwandl. Th. II. p. 214. sqq.) et eos, qui ab eo citantur, auctores. Ceterum haec figurarum transformatio in parallelogramma et

Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σ
μείου τοῦ Α, πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ· καὶ κείσθω τῇ Α
ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ π
ράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ· διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ Α
παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄ
ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. Ἀλ
καὶ [1]) ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα
ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρ
ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. Λέγω
ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τ
ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑ
ΑΔΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ
ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. Τῶν δὲ πα
ραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί
καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρ
τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν· ὀρ
θογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσό
πλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καί ἐστιν ἀπὸ τῆς Α
εὐθείας ἀναγεγραμμένον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

1) Vocem καὶ habent edit. Basil. et Oxon., omittit Pari
cum Cod. a.

nominatim in rectangula potissimum dimetiendis figuris in
servit. Quum enim ad dimetiendas figuras quadrata adhiber
soleant, haec autem rectangulis tantum applicari possint, no
autem figuris, quarum anguli sunt obliqui, patet, ita demun
eandem quadratorum mensuram dimetiendae figurae cuicunqu
adhiberi posse. Eodem etiam pertinet, quod Peletarius e
Clavius habent, problema: datis duabus figuris rectilineis in
aequalibus, excessum maioris super minorem exhibere, quod
infra v. c. VI. 28. ut notum supponitur.

Ducatur rectae AB, a puncto in ea A, recta $A\Gamma$ ad rectos angulos (Prop. 11.) et ponatur rectae AB aequalis $A\Delta$ (Prop. 3.); et per punctum quidem Δ rectae AB parallela ducatur ΔE (Prop. 31.); per punctum vero B ipsi $A\Delta$ parallela ducatur BE (Prop. 31.). Parallelogrammum igitur est $A\Delta EB$; aequalis igitur est AB quidem rectae ΔE, $A\Delta$ vero rectae BE (Prop. 44.). Sed et AB rectae $A\Delta$ est aequalis; quatuor igitur BA, $A\Delta$, ΔE, EB aequales inter se sunt: aequilaterum igitur est $A\Delta EB$ parallelogrammum. Dico etiam esse rectangulum. Quoniam enim in parallelas AB, ΔE recta incidit $A\Delta$; ergo anguli $BA\Delta$, $A\Delta E$ duobus rectis aequales sunt (Prop. 29.). Rectus autem est $BA\Delta$; rectus igitur et $A\Delta E$. Parallelogrammorum autem spatiorum opposita latera et anguli aequalia inter se sunt (Prop. 44.); rectus igitur et utrique oppositorum ABE, $BE\Delta$ angulorum; rectangulum igitur est $A\Delta EB$. Ostensum autem est et aequilaterum; quadratum igitur est (Def. 30.), et est a AB recta descriptum. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XLVI.

Cor. Facile demonstrari potest, quod Proclus observat, si latera duorum quadratorum sint aequalia, ipsa etiam quadrata esse aequalia, et contra, si quadrata sint aequalia, latera etiam eorum esse aequalia (I. 34. Cor. 21. 22.). Atque id ipsum sumitur in demonstratione I. 48. Contra, si duorum laterum alterum altero maius est, erit etiam quadratum prioris maius quadrato posterioris et vice versa.

Obs. Austin. monet, si rectangulum definiatur esse parallelogrammum, cuius omnes anguli recti sint, et quadratum esse rectangulum, cuius omnia latera sint aequalia, propositione 46. I. non admodum opus esse post I. 42. I. 44. et 45. Et

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ· ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ· καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν· πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ, μὴ

potuisse eam abesse, nemo negaverit; ob multiplicem tamen usum sine dubio adiecta fuit.

PROPOSITIO XLVII.

Obs. Hoc quoque theorema Pythagorae esse dicunt, qui eo invento solemne boum sacrificium fecerit (βουθυτεῖν λέγουσι Proclus ait), unde Pythagoricum vulgo nominatur. Quae circa hanc rem de Pythagora narrant, diligenter collegit Scherz. (Dissert. de Theor. Pythagor. Argent. 1743.) et ex eo Müller. (System. Zusammenstell. der wichtigern bisher bekannten Beweise des Pythagor. Lehrsatzes mit einer ausführlichen Theorie der Zahlendreiecke. Nürnb. 1819.) et huc fere redeunt. Plutarchus in Dialog.: ὅτι οὐδὲ ζῆν ἐστιν ἡδέως κατ' Ἐπίκουρον, Sect. II. p. 100. T. XIV. Edit. Hutt. ita habet:

Καὶ Πυθαγόρας ἐπὶ τῷ διαγράμματι βοῦν ἔθυσεν, ὡς φησιν Ἀπολλόδοτος (Wyttenbach. suspicatur: Ἀπολλόδωρος)

Ἡνίκα Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς εὕρετο γράμμα
Κεῖνο, ἐφ' ᾧ λαμπρὴν ἤγετο βουθυσίην.

PROPOSITIO XLVII. (Fig. 90.)

In rectangulis triangulis, quadratum ex latere rectum angulum subtendente aequale est quadratis ex lateribus rectum angulum continentibus.

Sit triangulum rectangulum $AB\Gamma$, rectum habens angulum $BA\Gamma$; dico quadratum ex $B\Gamma$ aequale esse quadratis ex BA, $A\Gamma$.

Describatur enim ex $B\Gamma$ quidem quadratum $B\Delta E\Gamma$; ex BA, $A\Gamma$ vero quadrata HB, $\Theta\Gamma$ (Prop. 46.); et per A alterutri ipsarum $B\Delta$, ΓE parallela ducatur AZ (Prop. 31.); et iungantur $A\Delta$, ZB.

Et quoniam rectus est uterque angulorum $BA\Gamma$, BAH (Def. 30.), ad aliquam igitur rectam BA, et ad punctum in ea A, duae rectae $A\Gamma$, AH, non ad

ἔστι περὶ τῆς ὑποτεινούσης, ὡς ἴσον δύναται — Dicunt nempe Geometrae: ἡ γραμμὴ δύναται τὸ χωρίον, ut exprimant quadratum lineae aequale esse spatio — ταῖς περιεχούσαις τὴν ὀρθὴν, εἴτε πρόβλημα περὶ τοῦ χωρίου τῆς παραβολῆς. Hic itaque Plutarchus dubius est, an ob hanc propositionem I. 47. an ob aliam aliquam, quae, ut nonnulli locum hunc explicant, ad theoriam parabolae pertinet, rectius autem secundum alios pro I. 44. sumenda fuerit, sacrificium fecerit Pythagoras. Alio loco συμποσιακῶν προβλημάτων libr. VIII. cap. IV. p. 349. T. XI. Edit. Hutt. Plutarchus ait: Ἔστι γὰρ ἐν τοῖς γεωμετρικωτάτοις θεωρήμασι, μᾶλλον δὲ προβλήμασι, τὸ, δυεῖν εἰδῶν εὐθύγραμμων ἄλλο τρίτον παραβάλλειν, τῷ μὲν ἴσον, τῷ δὲ ὅμοιον· ἐφ' οἷς καί φασιν ἐξευρεθέντι θῦσαι τὸν Πυθαγόραν· πολὺ γὰρ ἀμέλει λαμπρότερον τοῦτο καὶ μουσικώτερον τοῦ θεωρήματος, ὃ τὴν ὑποτείνουσαν ἀπέδειξε ταῖς περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσον δυναμένην. Hic itaque propositionem VI. 25. eam fuisse perhibet, ob quam inventam sacra fecerit Pythagoras, quae omnia confirmare videntur, haud satis certam esse famam, ob quodnam inventum

ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσ
ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ Γ
τῇ ΑΗ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστι
ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γων
τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προςκείσθ
ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒ
ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ,
δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ· δύο δὴ [1]) αἱ ΔΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς Γ

1) Verba: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ Ζ
τῇ ΒΑ, omittunt edit. Bas. et Oxon. et habent tantum: κ
ἐπεὶ δύο αἱ ΔΒ, ΒΑ etc. Editio autem Paris. ea ex Cod.
recte addere videtur.

illud Pythagorae sacrificium factum sit, nisi forte illud c
plura inventa plus semel repetitum esse, dicere velis. Di
genes Laertius in vita Pythagorae VIII. segm. 12. ita habe
Φησὶ δὲ Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικὸς ἑκατόμβην θῦσαι αὐτὸν ε
ρύντα, ὅτι τοῦ τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ ἴσον δύναται τα
περιεχούσαις, καί ἐστιν ἐπίγραμμα οὕτως ἔχον·

Ἡνίκα Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς εὕρετο γράμμα
Κεῖν' ἐφ' ὕτῳ κλεινὴν ἤγαγε βουθυσίην.

Eadem fere refert Athenaeus Deipnosoph. L. X. p. 165. E
Ald. 1514. vel p. 418. Ed. Dalechamp. Lugd. 1712. In vi
autem Thaletis l. I. Diogenes Laert. ait: Παρά τε Αἰγυπτίο
γεωμετρεῖν μαθόντα (Thaletem sc.) φησὶ Παμφίλη, πρῶτον κα
ταγράψαι ἐπὶ ἡμικυκλίου τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ θῦσα
βοῦν· οἱ δὲ Πυθαγόραν φασὶν, ὧν ἐστιν Ἀπολλόδωρος ὁ λογι
στικός. Diogenes igitur Laertius priore loco Prop. I. 47. a
Pythogoram inventorem perspicue refert, ita tamen, ut etia
ipse Apollodori auctoritate potissimum niti videatur, cui
Epigramma tamen de sacrificio quidem Pythagorae refert,
qua occasione id factum sit, haud satis clare exponit. Po
phyrius seu Malchus in vita Pythagorae c. 36. refert: Ἑξοι
θύτησε δέ ποτε σταίτινον, ὥς φασι, βοῦν, οἱ ἀκριβέστερο

eadem partes positae, angulos deinceps duobus rectis aequales faciunt; in directum igitur est ΓA rectae AH (Prop. 14.). Ex eadem ratione et BA rectae $A\Theta$ est indirectum. Et quoniam aequalis est $\Delta B\Gamma$ angulus angulo ZBA (Ax. 1.), rectus enim uterque, communis addatur $AB\Gamma$; totus igitur ΔBA toti $ZB\Gamma$ est aequalis (Ax. 2.). Et quoniam aequalis est quidem ΔB rectae $B\Gamma$, ZB vero rectae BA; duae utique

ἑκατὸν τοῦ ὀρθογωνίου τὴν ὑποτείνουσαν ἴσον δυναμένην ταῖς περιεχούσαις. Hic itaque, quamvis de sacrificii genere subdubitare videatur, inventum tamen I. 47. clare ad Pythagoram refert. Caeterum hi testes omnes recentiores sunt, nec ad certam aliquam veterum auctoritatem lectorem remittunt. Haud certiora sunt, quae Romani scriptores habent. Apud Ciceronem de Natura Deorum l. III. c. 36. legitur: „Pythagoras, cum in Geometria quiddam novi invenisset, Musis bovem immolasse dicitur, sed id quidem non credo, quoniam ille ne Apollini quidem Delio hostiam immolare voluit, ne aram sanguine adspergeret.“ Vitruvius Architect. l. IX. c. II. inventum Pythagoricum plenius quam reliqui describit his verbis: „Item Pythagoras normam sine artificis fabricationibus inventam ostendit, et quam magno labore fabri normam facientes vix ad verum perducere possunt. Id rationibus et methodis emendatum ex eius praeceptis explicatur. Namque si sumantur regulae tres, e quibus una sit pedes tres, altera quatuor, tertia pedes quinque eaeque regulae inter se compositae tangant alia aliam suis caeminibus extremis, schema habentes trigoni, deformabunt normam emendatam. Ad eas autem regularum singularum longitudines si singula quadrata paribus lateribus describantur, quod erit pedum trium latus, areae habebit pedes novem, quod erit quatuor, sexdecim; quod quinque, erit viginti quinque. Ita quantum areae pedum numerum duo quadrata ex tribus pedibus longitudinis laterum et quatuor efficiunt, aeque

ΒΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Καί ἐστι τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΑ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΗ τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. Ὁμοίως δὲ, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ, δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΑ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. Καί ἐστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφὲν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ

tantum numerum reddit unum ex quinque descriptum. Id Pythagoras cum invenisset, non dubitans a Musis se in ea inventione monitum, maximas gratias agens, hostias dicitur immolavisse."

E quibus omnibus constare videtur, haud quidem testimoniis ad summam antiquitatem pertinentibus, at fama certa satis constante ad Pythagoram inventum propositionis I. 47 referri, de sacrificio autem, quod fecisse ob id ipsum vel ob aliud inventum Musis dicitur, utrum hecatombe, an minor fuerit victimarum numerus, quin etiam an omnino fuerit sacrificium cruentum, quod Pythagoraeorum disciplina respuere nonnullis visa est, an itaque forte bovem saltem e farina confectum immolaverit, quod alias etiam a Pythagoraeis factum legimus, nihil certi habere veteres. Ceterum, quod veteres *theorema Pythagoricum*, id media aetate *magistrum math*

ΔB, BΔ duabus ΓB, BZ aequales sunt, utraque utrique, et angulus ΔBΔ angulo ZBΓ aequalis; basis igitur (Prop. 4.) AΔ basi ZΓ aequalis, et triangulum ABΔ triangulo ZBΓ est aequale. Et est quidem ipsius trianguli ABΔ duplum BΔ parallelogrammum (Prop. 41.), basin enim eandem habent BΔ et in eisdem sunt parallelis BΔ, AΔ; ipsius vero trianguli ZBΓ duplum quadratum BH (Prop. 41.), et enim rursus basin eandem habent et in eisdem sunt parallelis ZB, HΓ; aequalium autem dupla aequalia inter se sunt (Ax. 6.); aequale igitur est et parallelogrammum BΔ quadrato HB. Similiter autem iunctis AE, BK extendetur et parallelogrammum ΓΔ aequale quadrato ΘΓ. Totum igitur BΔEΓ quadratum duobus HB, ΘΓ quadratis aequale est, et est quidem BΔEΓ quadratum ex BΓ descriptum, quadrata vero HB, ΘΓ ex BΔ, AΓ; ergo quadratum ex BΓ latere aequale

ra vocare solebant. De variis eius demonstrationibus vide Eucrsam II. et supra I. 41. Cor. 6.

Cor. 1. Quadratum super diametro alicuius quadrati duplum est huius quadrati.

Cor. 2. In quovis triangulo rectangulo quadratum unius catheti aequale est excessui, quo quadratum hypotenusae superat quadratum alterius catheti.

Cor. 3. Si e vertice trianguli rectanguli in hypotenusam demittatur perpendiculum, quadrata segmentorum hypotenusae eandem habebunt differentiam, quam quadrata cathetorum.

Cor. 4. Si e puncto quocunque Γ rectae AB (Fig. 91. 92.) erigatur ad eam perpendicularis ΓΔ, et e punctis huius rectae quibuscunque B, Z ducantur ad AB rectae BA, EB, pariter que ZA, ZB etc. Quadrata earum, quae ex uno puncto E ductae sunt, eandem inter se differentiam habebunt, ac qua-

ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις. Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μή.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

drata earum, quae e quovis alio puncto rectae ΔΓ ad Α et Β duci possunt, i. e. erit $BB^q - BA^q = ZB^q - ZA^q = ΓB^q - ΓA^q$. Cf. Pappi Collect. Mathem. l. VII. Prop. 120. Apollonii loca plana l. II. Prop. 1. et Thom. Simpson. Elem. of Geom. Book II. Theor. IX.

Cor. 5. In triangulo aequicruro ΑΒΓ (Fig. 93. 94.) si ex uno aliquo angulorum ad basin in latus oppositum demittatur perpendiculum ΑΔ, erit summa quadratorum omnium trianguli laterum $= ΓΔ^q + 2ΔΑ^q + 3ΒΔ^q$. Est enim $ΒΓ^q = ΓΔ^q + ΒΔ^q$, et $ΑΓ^q = ΑΒ^q = ΔΑ^q + ΒΔ^q$. Itaque $ΒΓ^q + ΑΓ^q + ΑΒ^q = ΓΔ^q + 2ΔΑ^q + 3ΒΔ^q$. Est haec propositio Gregorii a St. Vincent. I. 23. 24.

Cor. 6. Si duo triangula rectangula habeant summam quadratorum cathetorum aequalem, aequales etiam erunt hypotenusae, et vice versa.

Cor. 7. Facile etiam patet ratio describendi quadrati, quod aequale sit summae duorum, trium, quatuor et generatim n

est quadratis ex BA, $A\Gamma$ lateribus; ergo in rectangulis etc.

PROPOSITIO XLVIII. (Fig. 95.)

Si quadratum ex uno laterum trianguli aequale est quadratis ex reliquis duobus trianguli lateribus; angulus a reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus est.

Sit enim quadratum ex uno latere $B\Gamma$ trianguli $AB\Gamma$ aequale quadratis ex lateribus BA, $A\Gamma$; dico angulum $BA\Gamma$ rectum esse.

Ducatur enim ab A puncto rectae $A\Gamma$ ad rectos $A\Delta$ (Prop. 11.), et ponatur rectae BA aequalis $A\Delta$, et iungatur $\Delta\Gamma$.

liorum quadratorum, quorum latera data sunt, dum nempe duo primum latera data sub angulo recto iunguntur, ductaeque hypotenusae ad terminum eius extremum tertium pariter sub angulo recto iungitur, et nova hypotenusa ducitur, atque ita pergitur, dum adhuc data latera supersunt.

Cor. 8. Pariter, datis duabus lineis inaequalibus, patet ratio inveniendi id, quo plus potest maior, quam minor, vel ut aliter dicamus, datur ratio inveniendi quadratum, quod aequale sit differentiae duorum datorum quadratorum. Erigatur nempe ad punctum extremum lineae datae minoris perpendiculum, et ex altero eiusdem minoris lineae termino describatur circulus radio, qui aequalis sit lineae datae maiori, abscinde ille e perpendiculo lineam, cuius quadratum aequale est excessui quadrati lineae maioris super quadratum lineae minoris.

PROPOSITIO XLVIII.

Obs. 1. Propositionis huius, quae conversa est praece-

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ κ
τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετρ
γώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετρ
γωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐσ
τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τὸ
μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ
ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τ
ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὑπόκειται γά
τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπ
τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ Β
ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, κοινὴ
ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσ
εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρ
ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση. Ὀρθὴ δὲ

dentis, aliam demonstrationem habet Proclus, dum nem
ostendit, si angulus *BAΓ* non foret rectus, ex eadem rec
AΓ parte, ex qua est *B*, construi posse aliud triangulum
ctangulum, cuius singula latera aequalia forent lateribus tri
guli *ABΓ*, quod vero fieri nequit ex I. 7. Alium mod
hanc propositionem demonstrandi vide infra II. 13. Obs. 5.

Obs. 2. Quum, ut ad I. 45. diximus, ad dimetien
figuras quascunque, adeoque etiam ad dimetienda quadrata a
quadrata mensurae loco adhibere soleant, v. c. quadratu
cuius singula latera pedem longa sunt, et quod propterea
dem quadratum appellant, invenietur, ut facile demonstr
potest, area quadrati cuiuscunque, si exploretur, quoties la
eius quadrati, quod pro mensura sumitur, contineatur in
tere quadrati propositi. Is enim numerus in se ipsum duc
indicabit numerum quadratorum pro mensura sumtorum,
in proposito quadrato continetur. V. c. si latus quadrati
cuius sit septem pedum, continebit illud septies septem, i.

Et quoniam aequalis est ΔA rectae ΔB, aequale est etiam quadratum ex ΔA quadrato ex AB. Commune addatur quadratum ex $A\Gamma$; quadrata igitur ex ΔA, $A\Gamma$ aequalia sunt quadratis ex BA, $A\Gamma$ (Ax. 2.). sed quadratis ex ΔA, $A\Gamma$ aequale est quadratum ex $\Delta\Gamma$ (Prop. 47.), rectus enim est angulus $\Delta A\Gamma$; quadratis vero ex BA, $A\Gamma$ aequale est quadratum ex $B\Gamma$, id enim sumitur; quadratum igitur ex $\Delta\Gamma$ aequale est quadrato ex $B\Gamma$; quare et latus $\Delta\Gamma$ lateri $B\Gamma$ est aequale; et quoniam aequalis est $A\Delta$ rectae AB, communis autem $A\Gamma$, duae utique ΔA, $A\Gamma$ duabus BA, $A\Gamma$ aequales sunt, et basis $\Delta\Gamma$ basi $B\Gamma$ est aequalis; angulus igitur (Prop. 8.) $\Delta A\Gamma$ angulo

quadraginta novem pedes quadratos. Hinc etiam factum est, ut numeri in se ipsos ducti numeri quadrati vocarentur. Iam veteres et Pythagoraei maxime multi in eo fuerunt, ut numeros tres integros eius indolis invenirent, ut summa quadratorum duorum aequalis esset quadrato tertii numeri. Ita nempe ex nostra propositione latera trianguli, quorum hi numeri longitudinem metiuntur, efficient triangulum rectangulum. Tales numeri sunt verbi causa 3. 4. 5. Est enim $3.3+4.4=5.5$. Generatim autem inveniendis numeris eius generis variae excogitatae sunt regulae, quarum aliquas ita, ut hodie solent, expressas hic subiungemus. Unam Proclus ad Pythagoram refert, quae huc redit. Sumatur pro uno catheto numerus impar quicunque $(2n+1)$, pro altero catheto numerus, qui prodit, si a prioris numeri quadrato unitatem demas, et, quod reliquum est, bifariam dividas $\frac{(4n^2+4n+1-1}{2}$ vel $2n^2+2n)$, et pro hypotenusa denique numerus, qui prodit, si numeri

ὑπὸ ΔΑΓ ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐὰν τριγώνου καὶ τὰ ἑξῆς.

primo sumti quadrato unitatem addas, et quod prodit l
riam dividas $\frac{(4n^2+4n+1+1}{2}=2n^2+2n+1)$. Alia reg
quam ad Platonem refert Proclus, a numero pari initium
cit. Sumatur numerus par quicunque (2n) pro uno cat
et pro altero quadratum dimidii eius numeri unitate n
ctatum (n^2-1), pro hypotenusa autem quadratum dimidii
meri unitate auctum (n^2+1). Alia regula ita habet: Sun

ΕΑΓ est aequalis. Rectus autem *ΔΑΓ*; rectus igitur *ΒΑΓ*. Si igitur trianguli etc.

Duo numeri inaequales quicunque (a, b) et sumatur pro cathero differentia quadratorum eorum (b^2-a^2), pro altero duplum eius, quod prodit uno in alterum ducto (2ab), atque pro hypotenusa summa quadratorum numerorum isto- rum (b^2+a^2). Aliam regulam generaliorem habet Euclides in Lemm. 1. ante X. 30. Quae omnia hic verbo indicasse sufficiat. Conf. etiam Excurs. II. ad I. 47.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΟΡΟΙ.

α΄. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθα
λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶ
εὐθειῶν.

β΄. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περ
τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἑν ὁποῖο
οὖν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω

DEFIN. I.

Quum, ut ad I. 45. diximus, ad exprimendam aream figu
rarum adhibere soleant quadrata, nominatim ad inveniendam
aream parallelogrammorum rectangulorum (quae brevius rectan
gula nominabimus): quaerendum erit, quoties id quadratum
quod mensurae loco sumitur, ipsum aut aliqua eius pars i
basi rectanguli poni possit, i. e. quoties latus huius quadrat
ipsum aut eius pars in basi rectanguli contineatur, et deind
quoties series eiusmodi quadratorum ipsa aut eius pars de
terminata in rectangulo una super alteram poni possit
i. e. quoties idem latus quadrati ipsum aut eius par
determinata in altitudine rectanguli contineatur, qui du
numeri in se ducti ostendet numerum eiusmodi quadra
torum aut partium quadrati in rectangulo contentorum. Hin
etiam factum est, ut eadem, quam pro signo multiplicationi
adhibere solent, nota, nempe × utantur etiam ad designan

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

1. Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectum angulum continentibus rectis.

2. In omni parallelogrammo unumquodque eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum cum duobus complementis gnomon vocetur.

dum rectangulum, quod sub duabus rectis continetur. Ita v. g. rectangulum, quod sub rectis A, B continetur, indicatur per $A \times B$, ut iam ad I. Def. 30. diximus. Aliter etiam parallelogramma litteris, quibus puncta extrema diametri notantur, designare solent. Praeterea monet Scarburgh., Geometras dicere, rectam *posse* aliquam figuram, quum quadratum rectae aequale sit ei figurae (ut ad I. 47. diximus) et pariter duas rectas *posse* aliquam figuram, quum rectangulum sub iis rectis aequale sit figurae.

DEFIN. II.

Gnomon primum dictus est pro indice horologii solaris, deinde etiam ob figurae similitudinem, pro norma vel duabus regulis sub angulo recto iunctis, denique pariter ob figurae similitudinem, uti hic, de ea parallelogrammi parte, quae, demto uno eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogram-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ά.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Ἴσον δέ ἐστι τὸ ΒΘ τοῖς ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Καὶ ἐστι τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ

mum superest. Caeterum, quamvis verum sit, plerasque libr secundi propositiones Arithmeticae, Algebrae et Geometriae communes esse (unde etiam apud Barlaamum monachum Graecum Arithmeticum, decem primae huius libri propositiones arithmetice demonstratae leguntur, quas etiam videre es in Elem. of Geom. of Euclide by Billingsley London 1570 similesque etiam ad Arithmeticam vel Algebram harum propositionum applicationes habent Clavius ad IX. 14. Element. Tacquet. in sua Elem. editione, et Christ. Sturm. in des un vergleichlichen Archimedis Kunstbüchern, Nürnb. 1670. p. 47 sq.) et, quatenus ad Algebram aut Arithmeticam pertinent algebraice vel arithmetice facillime demonstrari posse, ne ad eam rem, uti Clavius, Tacquetus, aliique putasse.videntur (Cf. die Geometrie nach le Gendre u. s. w. von Gilbert

PROPOSITIO I. (Fig. 135.)

Si sint duae rectae, secta fuerit autem altera ipsarum in quotcunque segmenta; rectangulum contentum sub duabus rectis aequale est eis rectangulis, quae sub linea non secta et unoquoque segmentorum continentur.

Sint duae rectae A, $B\Gamma$, et secta sit $B\Gamma$ utcunque in Δ, E punctis; dico rectangulum contentum sub A, $B\Gamma$ aequale esse rectangulo sub A, $B\Delta$ contento, et rectangulo sub A, ΔE, et rectangulo sub A, $E\Gamma$ contento.

Ducatur enim a B rectae $B\Gamma$ ad rectos BZ (I. 11.), et ponatur rectae A aequalis BH (I. 3.), et per H quidem rectae $B\Gamma$ parallela ducatur $H\Theta$ (I. 31.); per Δ, E, Γ vero rectae BH parallelae ducantur ΔK, $E\Lambda$, $\Gamma\Theta$ (I. 31.).

Aequale igitur est $B\Theta$ rectangulis BK, $\Delta\Lambda$, $E\Theta$; et est quidem $B\Theta$ rectangulum sub A, $B\Gamma$, conti-

p. 250.) Geometriae ope nos indigere, et quamvis etiam illud negari haud possit, numerum eiusmodi propositionum admodum, si cui volupe sit, augeri posse, id tamen nentiquam ei valere debet, ut omnes huius generis propositiones tanquam minus necessarias e Geometria excludamus. Sunt enim eiusmodi earum et fere omnes eae, quae hoc libro continentur, per se insignis per omnem Geometriam utilitatis, et reliquis propositionibus quam plurimis brevius demonstrandis et veterum Geometrarum libris intelligendis inserviunt, unde dolendum est, eas a plurimis recentiorum mathematicorum libris praetermitti.

PROPOSITIO I.

Obs. Est haec propositio casus specialis eius, quam habemus I. 38. Cor. 4.

ΒΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΔΛ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΒΗ τῇ Α· καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΙ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Δ, ΒΔ καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ. Ἐὰν ἄρα ὦσι καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Cor. 1. (Quod est apud Commandinum, Clavium, Boermannum, Pfleiderer. in Scholiis ad librum II. Element. Euclidis Tubingae 1797. 98. 99, §. 2., e quibus fere omnia, benevole permittente eorum auctore, vel ipsis auctoris verbis vel brevius aliquantum depromta sunt, quae ad hunc librum notavimus.) Si fuerint duae rectae lineae, quae secentur in partes quotcunque, rectangulum duabus illis rectis contentum aequale erit rectangulis simul, quae unaquaque parte unius ad unamquamque partem alterius applicata continentur.

Cor. 2. Si basis ΗΘ sit multiplex quaecunque rectae ΗΚ v. c. $=m\times HK$, m notante numerum integrum, parallelogrammum rectangulum sub ΒΗ et ΗΘ aequemultiplex est rectanguli sub ΒΗ et ΗΚ, i. e. erit $BH\times H\Theta=m.\ BH\times HK$,

tetur enim sub HB, $B\Gamma$, aequalis autem BH rectae A; BK vero rectangulum sub A, $B\Delta$, continetur enim sub HB, $B\Delta$, aequalis autem BH rectae A; $\Delta\Lambda$ vero rectangulum sub A, ΔE, aequalis enim ΔK, hoc est (I. 34.) BH, rectae A; et similiter etiam rectangulum $E\Theta$ sub A, $E\Gamma$; ergo rectangulum sub A, $B\Gamma$ aequale est rectangulo sub A, $B\Delta$, et rectangulo sub A, ΔE, et rectangulo sub A, $E\Gamma$. Si igitur sint etc.

PROPOSITIO II. (Fig. 136.)

Si recta linea secetur utcunque, rectangula sub tota et utroque segmentorum contenta aequalia sunt quadrato totius.

Recta enim AB secetur utcunque in Γ puncto; dico rectangulum sub AB, $B\Gamma$ contentum, cum rectangulo sub BA, $A\Gamma$ contento, aequale esse quadrato rectae AB.

quod vel ex ipsa II. Prop. 1. vel inde patet, quod I. Prop. 35. Cor. 2. etiam locum habet in I. 38., uti ad eam propositionem diximus. Cf. Pfleiderer. §. 3.

Cor. 3. Quodsi eodem modo altitudo BH sit multiplex quaecunque alterius rectae HZ, v. c. $=n\times HZ$, rursus n denotante numerum integrum, erit rectangulum sub BH, $H\Theta$ $=m.n.HK\times HZ$. Cf. Pfleiderer. §. 4.

Cor. 4. Quodsi porro fuerit $HK=HZ$, adeoque $HK\times HZ=HK^q$, erit rectangulum $BH\times H\Theta=m.n.HK^q$. Cf. Pfleiderer. §. 5.

Cor. 5. Denique, si $m=n$ erit $BH\times H\Theta=m^2.HK^q$. Cf. Pfleiderer. §. 6.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ· καί ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO II.

Obs. Haec propositio sistit praecedentis casum specialem, quo scilicet recta proposita in duas tantum partes secatur, eademque alterum sit latus rectangulorum ad totam et ad ipsius segmenta applicatorum. Quod etiam altera, quam exponunt, demonstratione innuunt Campanus, Peletarius, vel sola, quam tradunt, Scheubelius, Tacquet., Barrov. Applicationem propositi iam exhibet 1. 47. Cf. Pfleiderer. §. 7.

Cor. 1. Si bifariam secetur ΔE in Z, erit, ob rectang. $\Delta\Gamma = ZB$ (I. 35.), rectang. $\Delta B = 2\Delta\Gamma = 2E\Delta \times \Delta Z$. Cf. Pfleiderer. §. 8.

Cor. 2. Pariter, si recta ΔE secetur in quotcunque partes, rectangula sub tota et sub singulis eius segmentis simul aequalia sunt quadrato totius ΔE. Cf. Clavius, Scheubelius,

Describatur enim ex AB quadratum $A\Delta EB$ (I. 46.), et ducatur per Γ alterutri ipsarum $A\Delta$, BE parallela ΓZ (I. 31.).

Aequale itaque est AE rectangulis AZ, ΓE; et est quidem quadratum AE ex AB, AZ vero rectangulum sub BA, $A\Gamma$ contentum, continetur etenim sub ΔA, $A\Gamma$, aequalis autem $A\Delta$ rectae AB (I. Def. 30.); ΓE vero rectangulum sub AB, $B\Gamma$, aequalis enim BE rectae AB; rectangulum igitur sub BA, $A\Gamma$, cum rectangulo sub AB, $B\Gamma$, aequale est quadrato ex AB. Si igitur recta etc

PROPOSITIO III. (Fig. 137.)

Si recta linea secetur utcunque, rectangulum sub tota et uno segmentorum contentum aequale est rectangulo sub segmentis contento, et quadrato ex praedicto segmento.

Hi Quidam ipsam Prop. 2. ita enunciant, Campanus, Peletarius, alii. Cf. Pfleiderer. §. 9.

Cor. 3. Si recta secetur in partes quotcunque, quadratum totius aequale est rectangulis simul, quae sub singulis partibus ad singulas applicatis continentur. Cf. Commandinus, Clavius, Pfleiderer. §. 10.

PROPOSITIO III.

Obs. 1. Haec quoque propositio specialem exhibet II. Prop. 1. casum, quo nempe proposita recta in duas tantum partes secatur, parallelogrammorumque rectangulorum, ad totum et ad eius segmenta applicatorum, latus alterum est unum horum segmentorum. Eodem redeunt altera demonstratio

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ, καὶ διήχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ, ΓΕ· καί ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Campani, Peletarii, Clavii; prior Scheubelii; sola Tacqueti, Barrovii. Cf. Pfleiderer. §. 11.

Obs. 2. Caeterum propositiones 2. 3. quamvis prima iam comprehensae, nominatim sine dubio enunciatae fuerunt, ut immediate essent ad usus occurrentes paratae, nec, quod Austin., qui in ea re Ramum (Schol. Mathem. Francof. 1599. l. X. p. 89.) praecessorem habet, asserit (Examinat. of the first six Books of Euclids Elements Oxf. 1783. p 36.) vitiosae quadrati ab rectangulo distinctioni aut, quod Ramus ait, in-

Recta enim AB secetur utcunque in Γ; dico rectangulum sub AB, $B\Gamma$ contentum aequale esse rectangulo sub $A\Gamma$, ΓB contento, cum quadrato ex $B\Gamma$.

Describatur enim ex ΓB quadratum $\Gamma\Delta EB$ (I. 46.), et producatur $E\Delta$ in Z, et per A alterutri ipsarum $\Gamma\Delta$, BE parallela ducatur AZ (I. 31.).

Aequale igitur est rectangulum AE ipsis $A\Delta$, ΓE; et est quidem rectangulum AE sub AB, $B\Gamma$ contentum, continetur etenim sub AB, BE, aequalis autem BE rectae $B\Gamma$ (I. Def. 30.); $A\Delta$ vero rectangulum sub $A\Gamma$, ΓB, aequalis enim $\Delta\Gamma$ rectae ΓB; ΔB autem est quadratum ex ΓB; rectangulum igitur sub AB, $B\Gamma$ contentum aequale est rectangulo sub $A\Gamma$, ΓB contento, cum quadrato ex ΓB. Si igitur recta etc.

PROPOSITIO IV. (Fig. 138.)

Si recta linea secetur utcunque, quadratum totius aequale est quadratis segmentorum et rectangulo bis sub segmentis contento.

scitiae logicae originem debent. Vid. I. Def. 30. I. 31. II. 1. Cf. Pfleiderer. §. 12.

PROPOSITIO IV.

Obs. 1. Ex aliis huius propositionis demonstrationibus sequens maxime notari meretur, quam habent Campanus, Peletarius, Clavius, Tacquet., Barrov., Scheubel., in qua tertia bis repetitur. Nempe $AB^q = AZ + \Gamma E$ (II. 2.) et tam $AZ =$

Ευθεῖα γαρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυ
κατὰ τὸ Γ· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσ
ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τ
δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τ
ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ
ὑποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ
διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ παράλληλ
ἤχθω ἡ ΘΚ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, κ
εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπ
ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ
Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ κ
πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρ
γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ
ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τ
ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τ
ΚΒ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Λέγ
δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστι
ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπεσεν ἡ ΓΒ· αἱ ἄρ
ὑπὸ ΚΒΓ, ΒΓΗ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι
Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ
Ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚ
ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Ἐδείχθ
δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καί ἐστι
ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγω
νόν ἐστι, καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τοῦτ' ἔστιν ἀπ
τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ

ΑΓ×ΓΒ+ΑΓq (II. 3.) quam ΓΕ=ΑΓ×ΓΒ+ΓΒq (II. 3.)
unde ΑΒq=ΑΓq+2ΑΓ×ΓΒ+ΓΒq. Cf. Pfleiderer. §. 17.

Obs. 2. Corollarium apud Euclidem huic proposition

Recta enim linea AB secetur utcunque in Γ; dico quadratum ex AB aequale esse quadratis ex $A\Gamma$, ΓB et rectangulo bis sub $A\Gamma$, ΓB contento.

Describatur enim ex AB quadratum $A\Delta EB$ (I. 46.), et iungatur $B\Delta$, et per Γ quidem alterutri ipsarum $A\Delta$, EB parallela ducatur ΓHZ (I. 31.); per H vero alterutri ipsarum AB, ΔE parallela ducatur ΘK (I. 31.).

Et quoniam parallela est ΓZ rectae $A\Delta$, et in ipsas incidit $B\Delta$ exterior angulus ΓHB aequalis est interiori et opposito $A\Delta B$ (I. 29.). Sed $A\Delta B$ angulo ΔBA est aequalis (I. 5.), quoniam et latus BA lateri $A\Delta$ est aequale; et angulus ΓHB igitur angulo $HB\Gamma$ est aequalis (I. Ax. 1.); quare et latus $B\Gamma$ lateri ΓH est aequale (I. 6.). Sed ΓB quidem rectae HK est aequalis (I. 34.), ΓH vero rectae BK (I. 34.) et HK igitur ipsi KB est aequalis (I. Ax. 1.); aequilaterum igitur est ΓHKB. Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim parellela est ΓH rectae BK, et in ipsas incidit ΓB; anguli igitur $KB\Gamma$, $B\Gamma H$ duobus rectis sunt aequales (I. 29.). Rectus autem est $KB\Gamma$; rectus igitur et $B\Gamma H$. Quare et oppositi ΓHK, HKB recti sunt (I. 34.); rectangulum igitur est ΓHKB. Ostensum autem est et aequilaterum; quadratum igitur est (I. Def. 30.), et est ex ΓB. Ex eadem ratione et ΘZ quadratum est, et est ex ΘH, hoc est ex $A\Gamma$ (I. 34.); ipsa igitur

dianctum ex interpolatione ortum putat Austin. p. 37. Illud tamen ob frequentem in demonstrationibus sequentibus applicationem (in sequente statim adhibetur) ab ipso elementorum

ΓΒ εἰσίν. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κ
ἐστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ Η
τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α
ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΖ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Α
ΓΒ. Ἔστι δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τ
ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, Η
ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις κ
τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνί
Ἀλλὰ τὰ τέσσαρα ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ
ΑΔΕΒ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρ
ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν Α
ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περι
χομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΚΑΙ ΑΛΛΩΣ[1].

Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐσ
τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δ
ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

1) Editio Basil. et Oxon. pariter ac Parisiensis habe
hanc alteram demonstrationem, quam ἄλλως vel ἑτέρα δεῖ
inscribunt. Eadem etiam adiecta est in versionibus Zar
berti, Orontii, Finei, Commandini, Boermanni, ali
ramque, eamque solam, priore omissa, habent Clavius
Barrov. Peyrardus observat, hanc alteram demonstrationem e
uratam esse (in codice a, ut videtur) in charta paginae co
tigua. Caeterum, quum a priore eo tantum discrepet, qu
aequalitatem angulorum ΓΗΒ, ΗΒΓ inde infert, quia tria
guli aequilateri et ad Α rectanguli ΒΑΔ angulus ad basin s
missis est recti (I. 32. et I. 5.) ideoque trianguli ad Γ recta
guli ΒΓΗ, tertius angulus ΓΗΒ pariter semissis est recti,
quo ad analogiam II. 9. et 10. composita est, jure eam p
spuria habere videtur Pleidererus l. c. Diss. I. p. 6. §. 1
Ne quid tamen deesse videatur, noluimus eam loco s
movere.

auctore notatum fuisse censeri potest, iudice Pfleiderer. §. 1
qui addit, haud generatim, quod Austin. asserat, corollaria

ΘZ, ΓK quadrata ex $A\Gamma$, ΓB sunt. Et quoniam aequale est AH rectangulo HE, et est rectangulum AH sub $A\Gamma$, ΓB, aequalis enim $H\Gamma$ rectae ΓB; et HE igitur aequale rectangulo sub $A\Gamma$, ΓB; rectangula igitur AH, HE aequalia sunt rectangulo sub $A\Gamma$, ΓB bis sumto. Sunt autem et ΘZ, ΓK quadrata ex $A\Gamma$, ΓB; ergo quatuor ΘZ, ΓK; AH, HE aequalia sunt quadratis ex $A\Gamma$, ΓB et rectangulo bis contento sub $A\Gamma$, ΓB. Sed quatuor ΘZ, ΓK, AH, HE totum sunt $A\Delta EB$, quod est quadratum ex AB; ergo quadratum ex AB aequale est quadratis ex $A\Gamma$, ΓB et rectangulo bis contento sub $A\Gamma$, ΓB. Si igitur recta etc.

ET ALITER.

Dico quadratum ex AB aequale esse quadratis ex $A\Gamma$, ΓB et rectangulo contento bis sub $A\Gamma$, ΓB.

duplices propositionum demonstrationes connecti in elementis. Caeterum Clavius addit, omnia parallelogramma circa diametrum quadrati, etiam extra quadratum productam, quamvis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, quadrata esse, dummodo latera eorum lateribus quadrati sint parallela. Praeter illud corollarium addi possunt sequentia.

Cor. 2. Si AB in Γ bifariam secetur, rectangulum $A\Gamma \times \Gamma B$ transibit in quadratum dimidiae lineae AB. Erit itaque $AB = 4A\Gamma q$, vel quadratum cuiuscunque rectae aequale est quadrato eius dimidiae quater sumto (Clavius, Barrov., Baertnerus), vel etiam bis rectangulo sub quadrati latere, et latere dimidio et vice versa. Cf. Whiston. apud Tacquet. Heuderer. §. 13.

Cor. 3. Summa quadratorum duarum rectarum $A\Gamma$, ΓB

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἐπεὶ ἴση ἐστ
ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ
ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνί
δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, τοῦ ΑΒΔ ἄρα τριγώνου
τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ, δυσ
ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, λοιπ
ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί· κ
εἰσιν ἴσαι· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ ἡμ
σειά ἐστιν ὀρθῆς. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, ἴση γ
ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Α· λοιπ
ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἡμισειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα
ὑπὸ ΓΗΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ
ΒΓ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ Η
ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ
ΓΚ. Ἔχει δὲ καὶ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΓΒΚ γωνία
τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ, καί ἐστιν ἀπὸ τῆς Γ
Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, κ
ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ τετρ
γωνά ἐστι, καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, Γ
Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καί ἐστι τὸ Α
τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση ἐστὶ γὰρ ἡ ΓΗ τῇ Γ
καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ·
ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, Γ
Ἔστι δὲ καὶ τὰ ΓΚ, ΘΖ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, Γ
τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀ
τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλ

semper minor est quadrato summae earundem rectarum, du
rectangulo sub ipsis comprehenso. Cf. Pfleiderer. §. 19.

Cor. 4. Quum etiam sit $AB^q = ZΘ + AK + ZK = AΓ^q$
$AB \times BΓ + AΓ \times BΓ = AΓ^q + (AB + AΓ) \times BΓ$ (II.1.) erit ita
quadratum totius AB, utcunque in $Γ$ divisae, aequale q
drato unius partis $AΓ$, et rectangulo simul, quod sub al

Quoniam enim in eadem figura aequalis est BA rectae $A\Delta$, aequalis est et angulus $AB\Delta$ angulo $A\Delta B$ (I. 5.); et quoniam omnis trianguli tres anguli duobus rectis aequales sunt (I. 32.), ergo tria guli $AB\Delta$ tres anguli $AB\Delta$, $A\Delta B$, $BA\Delta$ duobus rectis aequales sunt. Rectus autem $BA\Delta$; reliqui igitur $AB\Delta$, $A\Delta B$ uni recto aequales sunt; et sunt aequales (I. 5.); uterque igitur ipsorum $AB\Delta$, $A\Delta B$ dimidius est recti. Rectus est autem $B\Gamma H$, aequalis enim est interiori et opposito angulo ad A; reliquus igitur ΓHB dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur est ΓHB angulus ipsi ΓBH; quare et latus $B\Gamma$ ipsi ΓH est aequale (I. 6.). Sed ΓB quidem rectae HK est aequalis, ΓH vero rectae BK (I. 34.); aequilaterum igitur est ΓK. Habet autem et rectum angulum ΓBK; quadratum igitur est ΓK (I. 29. et I. Def. 30.), et est ex ΓB. Ex eadem ratione et ΘZ quadratum est, et est aequale quadrato ex $A\Gamma$; ergo ΓK, ΘZ quadrata sunt, et sunt aequalia quadratis ex $A\Gamma$, ΓB. Et quoniam rectangulum AH aequale est rectangulo HE (I. 43.), et est rectangulum AH sub $A\Gamma$, ΓB, aequalis est enim ΓH rectae ΓB; erit et EH aequale rectangulo sub $A\Gamma$, ΓB; ergo AH, HE aequalia sunt ei, quod bis continetur sub $A\Gamma$, ΓB. Sunt autem et ΓK, ΘZ aequalia quadratis ex $A\Gamma$, ΓB; ergo ΓK, ΘZ, AH, HE aequalia sunt quadratis ex $A\Gamma$, ΓB et

segmento ΓB et sub totius AB ac prioris $A\Gamma$ aggregato continetur, vel (notante Peletario): si duae rectae inaequales fuerint, quadratum maioris AB simul aequale est quadrato minoris $A\Gamma$, et rectangulo sub ipsarum summa ($AB+A\Gamma$) ac differentia ($\Gamma B=AB-A\Gamma$); vel duorum quadratorum inaequalium differentia aequalis est rectangulo sub summa et differentia

τὰ ΓΚ, ΘΖ καὶ τὰ ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕ, ὃ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

laterum ipsorum. Cf. Pfleiderer. §§. 20. 21. Immediate hoc corollarium demonstrat, et vicissim ex eo Propositioes IV—VIII. deducit Angelus de Marchettis Euclid. reform. Liburni 1709. Cf. Pfleiderer. §. 22.

Cor. 5. Haec propositio, ut Scheubelius indicat, valet etiam de pluribus segmentis. Nempe, recta AB divisa in quotlibet segmenta, erit quadratum rectae AB aequale summae quadratorum omnium segmentorum, additis duplis rectangulis inter duo quaecunque segmenta comprehensis. Cf. Pfleiderer. §. 24.

PROPOSITIO V.

Obs. 1. Quum sit $AΔ \times ΔB + ΓΔ^q = ΓB^q$, vel $AΔ \times ΔB = ΓB^q - ΓΔ^q$, sit autem $AΔ = AΓ + ΓΔ = BΓ + ΓΔ$ et $AB = BΓ - ΓΔ$ etiamex hac propositione idem consequitur, quod II. 4. Cor. 4 habuimus. Hinc vicissim Prop. 5. ex Prop. 4. Cor. 4. enun-

rectangulo bis contento sub $A\Gamma$, ΓB. Sed ΓK, ΘZ et AH, HE sunt totum AE, quod est quadratum ex AB; ergo quadratum ex AB aequale est quadratis ex $A\Gamma$, ΓB et rectangulo bis sub $A\Gamma$, ΓB contento. Quod oportebat ostendere.[1]

COROLLARIUM.

Ex his evidens est, in quadratis spatiis, parallelogramma circa diametrum quadrata esse.

PROPOSITIO V. (Fig. 139.)

Si recta linea secetur in aequalia et inaequalia, rectangulum sub inaequalibus totius segmentis contentum cum quadrato rectae inter puncta sectionum aequale est quadrato ex dimidia.

ciatis consequitur. Cf. Pfleiderer. §§. 26. 27. Gilbert. l. c. Aliam porro huius propositionis demonstrationem ope II. 4. et II. 3. I. 36. et II. 1. habent Maurolycus, Tacquet., Barrow. Cf. Pfleiderer. §. 28. et aliam adhuc ope II. 1., vel etiam II. 4. Cor. 5. et II. 3. Gregor. a St. Vincent. (Opus Geometr. quadratur. circuli et sectionum Coni Antverp. 1647. p. 37.) Cf. Pfleiderer. §§. 12—14.

Obs. 2. Si AA consideretur ut recta secta utcunque in Γ, ob $\Gamma B = A\Gamma$, et $AB = \Gamma B - \Gamma A = A\Gamma - \Gamma A$, l. II. Prop. 6. etiam ita enuntiari potest: Si recta linea secetur utcunque rectangulum sub tota et sub differentia partium, una cum quadrato partis minoris, aequale est quadrato partis maioris. (Marin. Ghetaldi de resolutione et compositione mathemat. libr. V. Romae 1630. p. 2. sq.) Cf. Pfleiderer. §. 29.

Cor. 1. Si recta AB in aequalia $A\Gamma$, ΓB, et inaequalia AA, AB secetur, rectangulum sub segmentis inaequalibus minus est qua-

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσ κατὰ τὸ Γ· εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τ ΓΒ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ· καὶ διὰ μὲν τοῦ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΗ, δι δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἤχθ ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, Β παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

drato dimidiae rectae (Whiston. II. 5. Cor. 1. in Tacquet. Elem Euclid. Geom. Rom. 1745.), vel, ut Pappus rem exprimit (Lem XIII. ad libr. Apollonii de sectione rationis et spatii Oxon. 179 p. XLIX.) rectangulum $A\Gamma \times \Gamma B$ (id ipsum enim est quadratu dimidiae $B\Gamma$) maius est quovis alio, segmentis quibuslibet ali eiusdem rectae contento. Cf. de Maxim. et Minim. geom. d vinatio in quint. Conicor. Apollonii auct. Vincent. Vivian Florent. 1659. p. 103. sq. Thom. Simpson. Essai sur les Ma et Min. Theor. I. Elem. de Géom. Paris. 1755. p. 173. s Cf. Pfleiderer. §. 33.

Cor. 2. Quum tam quadrati ex $B\Gamma$, quam rectanguli A $\times \Delta B$ perimeter sit $= 2AB$, Prop. 5. simul evincitur, paralle logrammum rectangulorum isoperimetrorum maximum esse qua dratum (Thom. Simpson. l. c. p. 174. l'Huilier de relation mutua capacitatis et terminorum figurae Varsov. 1782. p. 2 Pfleiderer. §. 34. Gilbert. l. c. p. 281.)

Cor. 3. Et, cum ob altitudinem maiorem (I. 19.) paral lelogrammum rectangulum maius sit quocunque parallelo grammo obliquangulo isoperimetro super eadem basi; isop rimetrorum parallelogrammorum quorumlibet maximum er quadratum (De locis solidis secunda divinatio geometr. in libros Aristaei, auct. Vinc. Viviani Florent. 1701. p. 57 s l'Huilier l. c p. 6. Pfleiderer. §. 35.).

Recta enim aliqua AB secta sit in aequalia quidem ad Γ, in inaequalia vero ad Δ; dico rectangulum sub $A\Delta$, ΔB contentum cum quadrato ex $\Gamma\Delta$ aequale esse quadrato ex ΓB.

Describatur enim ex ΓB quadratum ΓEZB (I. 46.), et iungatur BE; et per Δ quidem alterutri ipsarum ΓE, BZ parallela ducatur ΔH (I. 31.), per Θ vero alterutri ipsarum AB, EZ parallela ducatur KM (I. 31.), et rursus per A alterutri ipsarum $\Gamma\Lambda$, BM parallela ducatur AK (I. 31.).

Cor. 4. Ac quidem, cum sit $\Gamma\Delta = A\Delta - A\Gamma = A\Delta - B\Gamma = B\Gamma - B\Delta$, excessus, quo parallelogrammum rectangulum aequalium laterum $A\Gamma$, ΓB superat rectangulum quorumvis segmentorum inaequalium $A\Delta$, ΔB eiusdem rectae AB (Cor. 1.); seu, quo quadratum superat quodcunque rectangulum isoperimetrum, non aequilaterum (Cor. 2.), aequalis est quadrato, cuius latus $\Gamma\Delta$ est differentia laterum singulorum quadrati et rectanguli h. e. excessus longitudinis rectanguli super latus quadrati, vel lateris quadrati super latitudinem rectanguli. Et, quam si (Fig. 140.) ex puncto A abscindatur $A\Pi = B\Delta$, sit recta $\Delta\Pi$ in Γ bifariam secta, adeoque $\Gamma\Delta = \frac{A\Delta - B\Delta}{2}$, erit etiam $B\Gamma^q - A\Delta \times \Delta B = \Gamma\Delta^q$ i. e. = quadrato, cuius latus est semidifferentia laterum contiguorum rectanguli. Cf. l'Huilier l. c. Pfleiderer. §. 36.)

Cor. 5. Secetur AB (Fig. 41. a et b) in alia inaequalia $A\Pi$, ΠB in puncto Π remotiore a puncto bisectionis, quam est Δ, ita ut sit $\Gamma\Pi > \Gamma\Delta$: erit $A\Pi \times \Pi B + \Gamma\Pi^q = B\Gamma^q = A\Delta \times \Delta B + \Gamma\Delta^q$ (II. 5.). At $\Gamma\Pi^q > \Gamma\Delta^q$ (I. Cor. 46.), itaque rectangulum $A\Pi \times \Pi B < A\Delta \times \Delta B$, quod est Pappi l. c. Lemm. XIV. Idem tradunt Barrov., Viviani (l. c. Cor. 1.) Whiston., Baermann., Pfleiderer. §§. 37. 38.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΘΖ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΓΜ τῷ ΑΛ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΝΞΟ γνώμονι[1] ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον

1) Ita edd. Paris. ex cod. a. Editiones Basi[1]. et Oxon. habent: ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΔΖ καὶ ΔΛ ἴσον ἐστὶ, et infra post ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔΒ addunt: τὸ δὲ ΖΔ, ΔΛ ἐστὶν ὁ ΝΞΟ γνώμων, quod eodem redit.

Cor. 6. Et quum etiam perimeter rectanguli $A\Pi \times \Pi B$ maneat $= 2AB$, patet, isoperimetrorum parallelogrammorum rectangulorum non aequilaterorum illud maius esse, cuius latera contigua, seu longitudo et latitudo minus a se invicem differant. Cf. Pfleiderer. §. 40.

Cor. 7. Quum, abscissa $AP = B\Pi$, sit $P\Pi$ differentia segmentorum $A\Pi$, $B\Pi$, semidifferentia $\Gamma\Pi = \Gamma P$, adeoque etiam recta $P\Pi$ secta sit in aequalia in Γ, et inaequalia in Δ, erit $\Gamma\Pi^q = P\Delta \times \Delta\Pi + \Gamma\Delta^q$ (II. 5.). Hinc (Cor. 5.) $A\Pi \times \Pi B + P\Delta \times \Delta\Pi + \Gamma\Delta^q = A\Delta \times \Delta B + \Gamma\Delta^q$ i. e. $A\Pi \times \Pi B + P\Delta \times \Delta\Pi = A\Delta \times \Delta B$. At (Fig. 141. a.) $P\Delta = P\Gamma + \Gamma\Delta = \frac{A\Pi - \Pi B}{2} + \frac{A\Delta - B\Delta}{2}$ et (Fig. 141. b) $P\Delta = P\Gamma - \Gamma\Delta = \frac{A\Pi - \Pi B}{2} - \left(\frac{A\Delta - B\Delta}{2}\right)$ pariterque (Fig. 141. a) $\Delta\Pi = \Gamma\Pi - \Gamma\Delta = \frac{A\Pi - \Pi B}{2} - \left(\frac{A\Delta - B\Delta}{2}\right)$

Et quoniam aequale est complementum $\Gamma\Theta$ complemento ΘZ (I. 43.), commune addatur ΔM; totum igitur ΓM toti ΔZ aequale est. Sed ΓM ipsi $\Delta\Lambda$ aequale est, quia et $A\Gamma$ ipsi ΓB est aequalis (I. 36.); et $A\Lambda$ igitur ipsi ΔZ aequale est. Commune addatur $\Gamma\Theta$; totum igitur $A\Theta$ ipsi $N\Xi O$ gnomoni aequale est. Sed $A\Theta$ quidem est rectangulum sub $A\Delta$, ΔB, aequalis enim $\Delta\Theta$ ipsi ΔB, et $N\Xi O$ igitur gnomon aequalis est rectangulo sub $A\Delta$, ΔB. Commune addatur ΛH, quod est aequale quadrato ex $\Gamma\Delta$ (II. Cor. 4.); ergo $N\Xi O$ gnomon et ΛH aequalia sunt rectangulo sub $A\Delta$, ΔB contento et quadrato ex $\Gamma\Delta$. Sed $N\Xi O$ gnomon et ΛH sunt totum qua-

(Fig. 141. b) $A\Pi = \Gamma P + \Gamma I = \Pi + \Delta = \frac{A\Pi - \Pi B}{2} + \frac{A\Delta + B\Delta}{2}$.

semper itaque spatium, quo rectangulum sub segmentis $A\Delta$, $B\Delta$, in quae recta AB dividitur puncto Δ propiore puncto bisectionis Γ, excedit rectangulum sub segmentis $A\Pi$, $B\Pi$, in quae eadem recta AB dividitur puncto Π remotiore a puncto bisectionis (Cor. 6.), seu, quo rectangulum $A\Delta \times \Delta B$, cuius latera minus inter se differunt, excedit alterum isoperimetrum $A\Pi \times \Pi B$, cuius laterum differentia maior est, aequatur rectangulo $P\Delta \times \Delta\Pi$ sub summa ac differentia semidifferentiarum laterum contiguorum utriusque rectanguli. Cf. Heiderer. §. 41.

Cor. 8. Et quum (II. 4. Cor. 3.) quadratum summae duarum rectarum semper maius sit summa quadratorum earum, ita ut differentia aequalis sit duplo rectangulo inter istas rectas comprehenso, fiet haec differentia tanto minor i. e. summa quadratorum duarum rectarum eo propius accedet ad quadratum summae earum, adeoque eo $\binom{\text{minor}}{\text{major}}$ fiet, quo $\binom{\text{maius}}{\text{minus}}$ est rectangulum inter istas rectas comprehensum. Itaque summa

ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὃ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

duorum quadratorum eandem datam laterum summam habentium minima erit, si latera ipsorum fuerint mutuo aequalia (Cor. 1.) Whiston l. c. p. 51. De eadem hac propositione quae est Euclidis Lemm. post X. 42. adhuc infra ad II. 9 Cor. 1. sermo erit. Cf. Gilbert l. c. p. 281.

Cor. 9. Si duae rectae aequales ita dividantur in partes inaequales, ut rectangulum sub partibus unius aequale sit rectangulo sub partibus alterius, erunt unius partes partibus alterius respective aequales, maior maiori, et minor minori. Cf. Whiston. et Gilbert. l. c.

Cor. 10. Quum non tantum, ut Cor. 5. vidimus, sit $\Gamma\Delta = \frac{A\Delta - B\Delta}{2}$, verum etiam $B\Gamma = \frac{A\Delta + B\Delta}{2}$; II. 5. etiam ita exprimi potest: $\left(\frac{A\Delta + B\Delta}{2}\right)^q = A\Delta \times \Delta B + \left(\frac{A\Delta - B\Delta}{2}\right)^q$ i. e. quadratum semisummae duarum inaequalium rectarum aequale est rectangulo sub ipsis his rectis, una cum quadrato simidifferentiae earum; vel: excessus quadrati semisummae duarum inaequalium rectarum super quadratum semidifferentiae earum aequalis est rectangulo sub ipsis his rectis. Cf. Pfleider

dratum ΓEZB, quod est quadratum ex ΓB; rectangulum igitur sub $A\Delta$, ΔB contentum cum quadrato ex $\Gamma\Delta$ aequale est quadrato ex ΓB. Si igitur recta etc.

PROPOSITIO VI. (Fig. 142.)

Si recta linea secetur bifariam, adiiciatur autem aliqua ipsi recta in directum; rectangulum sub tota cum adiecta, et sub adiecta contentum cum quadrato ex dimidia aequale est quadrato compositae ex dimidia et adiecta tanquam una linea.

§§. 31. 32. Simul patet, ut hoc obiter dicamus, duarum rectarum inaequalium $A\Delta$, $B\Delta$ maiorem $A\Delta$ aequalem esse $A\Gamma + \Gamma\Delta$ vel $B\Gamma + \Gamma\Delta$ i. e. semisummae earum simul cum semidifferentia, minorem $B\Delta$ contra $B\Gamma - \Gamma\Delta$ h. e. excessui semisummae super semidifferentiam. Cf. Pfleiderer. §. 30.

PROPOSITIO VI.

Obs. Alias propositionis huius demonstrationes habent Angelus de Marchettis, Clavius, Barrov. et Tacquet. e II. 4. Cor. 4. vel e II. 4. et II. 3. vel e II. 5. vel e II. 1. et II. 2. petitas. Cf. Pfleiderer. §§. 46. 48. 49. 57. 58. Ea maxime, qua, Clavio referente, Mauritius Bresciius, regius mathem. disciplin. in Academ. Parisiensi professor, utebatur, simplicitate sua se commendat. Ita nimirum ille: Sumatur (Tab. VI. fig. 115.) $A\Gamma = B\Delta$, erit $B\Gamma = A\Delta$ (I. Ax. 2), adeoque $IB \times B\Delta = A\Delta \times \Delta B$, et ob $\Gamma A = \Gamma B$, etiam $\Gamma\Gamma = \Gamma\Delta$, unde (II. 5.) $IB \times B\Delta + B\Gamma q = \Gamma\Delta q$, adeoque $A\Delta \times \Delta B + B\Gamma q = \Gamma\Delta q$. Cf. Pfleiderer. §. 49. Caeterum, si recta $A\Delta$ ut in puncto Γ utcumque recta spectetur, ob $\Gamma B = A\Gamma$, et $B\Delta = \Gamma\Delta - \Gamma B = \Gamma\Delta - A\Gamma$, pariter emergit propositio, quam ad II. 5. Obs. 2. vidimus: Si

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ· διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜ· καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΔ τῷ ΓΘ. Ἀλλὰ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΑΔ ἄρα τῷ ΘΖ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμονί ἐστιν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιε-

recta linea secetur utcunque, rectangulum sub tota et sub differentia partium, una cum quadrato partis minoris aequale est quadrato partis maioris. Cf. Ghetaldus, Herigonius in cursu Mathem. T. I. Paris. 1644. p. 78. sqq. Pfleiderer. §. 50.

Cor. 1. Quum sit $AΔ=ΓΔ+AΓ=ΓΔ+BΓ$, $BΔ=ΓΔ-BΓ$, etiam ex hac propositione idem prodit, quod ad II. 5. Obs. 1. et II. 4. Cor. 4. dictum fuit, nempe $ΓΔ^q-ΓB^q=(ΓΔ+ΓB)\times(ΓΔ-ΓB)$. Cf. Pfleiderer. §. 51.

Cor. 2. Quum sit differentia rectarum $AΔ$, $ΓΔ=AΓ$ vel $BΓ$, pariterque differentia rectarum $ΓΔ$, $BΔ=BΓ$, vel, ut aliter idem dicamus, quum rectae $AΔ$, $ΓΔ$, $BΔ$ sint continue arithmetice proportionales, II. Prop. 6., haec quoque continetur (ut Isaacus Monachus: Schol. in Euclid. Elem. geom. sex priores libros Argentor. 1579. in Schol. ad II. 6., quod et apud Commandinum (fol. 31. b.) exstat, pariterque

lecta enim aliqua AB secetur bifariam ad punctum Γ, adiiciatur autem ipsi aliqua recta $B\Delta$ in directum; dico rectangulum sub $A\Delta$, ΔB contentum cum quadrato ex ΓB aequale esse quadrato ex $\Gamma\Delta$.

Describatur enim ex $\Gamma\Delta$ quadratum $\Gamma EZ\Delta$ (I. 46.), et iungatur ΔE, et per punctum quidem B alterutri ipsarum ΓE, ΔZ parallela ducatur BH (I. 31.); per Θ vero punctum alterutri ipsarum $A\Delta$, EZ parallela ducatur KM (I. 31.); et adhuc per A alterutri ipsarum $\Gamma\Lambda$, ΔM parallela ducatur AK (I. 31.).

Quoniam igitur aequalis est $A\Gamma$ rectae ΓB, aequale est et $A\Lambda$ ipsi $\Gamma\Theta$ (I. 36.). Sed $\Gamma\Theta$ ipsi ΘZ aequale est (I. 43.); et $A\Lambda$ igitur ipsi ΘZ est aequale. Commune addatur ΓM; totum igitur AM ipsi $N\Xi O$ gnomoni est aequale. Sed AM est rectangulum sub $A\Delta$, ΔB, aequalis enim est ΔM ipsi ΔB (II. Cor. 4.); et igitur gnomon $N\Xi O$ aequalis est rectangulo sub

Clavius et alii observant): Si tres rectae sint continue arithmetice proportionales, quadratum mediae aequale est rectangulo sub extremis, cum quadrato differentiae utriusve extremarum ac mediae: Quod idem etiam ex II. 5. consequitur, in qua (vid. Fig. ad II. 5.) $A\Delta$, $B\Gamma = \Gamma\Lambda$, et $B\Delta$ pariter sunt continue arithmetice proportionales. Cf. Pfleiderer. §§. 52. 53.

Cor. 3. Quum sit $\Gamma\Delta = \frac{A\Delta + A\Gamma}{2} = \frac{A\Delta + B\Delta}{2}$, et $\Gamma B = \frac{A\Delta - B\Delta}{2}$, etiam ex hac propositione idem consequetur, quod II. 5. Cor. 10. nempe esse $A\Delta \times \Delta B + \left(\frac{A\Delta - B\Delta}{2}\right)^q = \left(\frac{A\Delta + B\Delta}{2}\right)^q$, quae propositio terminis tantum differt ab ea, quam Cor. praecedente habuimus. Cf. Pfleiderer. §. 55. 56.

γομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΛΗ. Ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιόν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Cor. 4. Caeterum facile patet nexus propositionum 5. et 6. l. II., quae eo tantum differunt, quod in Prop. 5. punctum Δ in ipsa AB, in Prop. 6. autem in ea producta sumitur, unde etiam uno enunciato comprehendi possunt. Cf. Pfleiderer. §. 59.

Cor. 5. Si punctum Π sumatur (Fig. 144.) remotius a Γ, quam Δ, in rectangulis $A\Pi \times \Pi B$, $A\Delta \times \Delta B$ duo latera contigua eandem inter se differentiam $= AB$ habebunt, eritque $A\Pi \times \Pi B > A\Delta \times \Delta B$, sumtoque $AP = B\Pi$, erit $A\Delta \times \Delta B + P\Delta \times \Delta\Pi = A\Pi \times \Pi B$, quod simili ratione ostenditur et evolvitur ac II. 5. Cor. 7. (Pfleiderer. §. 166.) cf. II. 10. Cor. 1.

Cor. 6. Conversae propositionum 5. et 6., quae sunt Pappi in librum III. conicor. Apollonii Lemmata 9. 11. 10. (Collect. Mathem. fol. 274. b. sqq.) vel 8. 7. 9. Apollonii conicor. libr. octo opera Edm. Halleyi Oxon. 1710. P. I. p. 155. pariter valent. Nempe 1) si (Fig. 140.) punctum Δ in

$\Delta\Delta$, ΔB contento. Commune addatur ΔH, quod est aequale quadrato ex ΓB; rectangulum igitur sub $\Delta\Delta$, ΔB contentum cum quadrato ex ΓB aequale est gnomoni $N\Xi O$ et ipsi ΔH. Sed gnomon $N\Xi O$ et ΔH sunt totum quadratum $\Gamma EZ\Delta$, quod quidem fit ex $\Gamma\Delta$; ergo rectangulum sub $\Delta\Delta$, ΔB contentum cum quadrato ex ΓB aequale est quadrato ex $\Gamma\Delta$. Si igitur recta etc.

PROPOSITIO VII. (Fig. 145.)

Si recta linea secetur utcunque, quadrata totius et unius e segmentis simul sumta aequalia sunt rectangulo bis sub tota et dicto segmento contento, et quadrato reliqui segmenti.

recta AB situm sit, sumtumque sit aliud punctum inter A et Δ, sitque a) $\Delta\Delta\times\Delta B+\Gamma\Delta^q=\Gamma A^q$, erit $A\Gamma=\Gamma B$. Nam, quum ex hypoth. sit $\Gamma A^q=\Delta\Delta\times\Delta B+\Gamma\Delta^q$, erit $\Gamma A^q>\Gamma\Delta^q$, adeoque (I. Cor. 46.) $\Gamma A>\Gamma\Delta$. Unde ex ΓA abscindi poterit (I. 3.) $\Gamma I=\Gamma\Delta$, eritque (II. 6.) $\Delta\Delta\times AI+I\Gamma^q=\Gamma A^q$, vel $\Delta\Delta\times AI+\Gamma\Delta^q=\Gamma A^q=\Delta\Delta\times\Delta B+\Gamma\Delta^q$, adeoque $\Delta\Delta\times AI=\Delta\Delta\times\Delta B$, et, ob altitudinem communem $\Delta\Delta$ (I. Conv. 36.) $AI=\Delta B$, adeoque ob $\Gamma I=\Gamma\Delta$ (hyp.) $AI+\Gamma I=\Delta B+\Gamma\Delta$ i. e. $A\Gamma=\Gamma B$. Pariter, si sit b) $\Delta\Delta\times\Delta B+\Gamma\Delta^q=\Gamma B^q$, quo casu sumere non licet, esse $A\Gamma>\Gamma\Delta$, erit $\Gamma B^q=\Gamma\Delta^q+(\Gamma B+\Gamma\Delta)\times\Delta B$ (II. 4. Cor. 4.) adeoque $\Delta\Delta\times\Delta B+\Gamma\Delta^q=\Gamma\Delta^q+(\Gamma B+\Gamma\Delta)\times\Delta B$, vel $\Delta\Delta\times\Delta B=(\Gamma B+\Gamma\Delta)\times\Delta B$, adeoque ob altitudinem communem ΔB (I. Conv. 36.) $\Delta\Delta=\Gamma B+\Gamma\Delta$, vel, demta communi $\Gamma\Delta$, erit $A\Gamma=\Gamma B$. Eadem ratione, si 2) (Fig. 143.) punctum Δ in recta AB producta situm sit, sitque a) $\Delta\Delta\times\Delta B+\Gamma\Delta^q=\Gamma\Delta^q$, erit $\Gamma A<\Gamma\Delta$, unde, sumta ex parte puncti A, $\Gamma I=\Gamma\Delta$, erit A in ipso

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ κατάγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἴσον ἐστί· τὰ ἄρα ΑΖ, ΓΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. Ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ὁ ΚΛΜ ἐστὶ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΛΜ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. Ἔστι δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΖ τῇ

recta ΓΙ, adeoque ex II. 5. $\Delta A \times AI + \Gamma A^q = \Gamma I^q = \Gamma \Delta^q = \Delta A \times \Delta B + \Gamma A^q$, unde $\Delta A \times AI = \Delta A \times \Delta B$, et ob altitudinem communem ΔA (I. Conv. 36.) $AI = \Delta B$, adeoque $\Gamma I - AI = \Gamma \Delta - \Delta B$ i. e. $A\Gamma = \Gamma B$. Pariter, si b) sit $A\Delta \times \Delta B + \Gamma B^q = \Gamma \Delta^q$, quo casu sumere non licet; esse $\Gamma A < \Gamma \Delta$, erit $\Gamma \Delta^q = \Gamma B^q + (\Gamma \Delta + \Gamma B) \times \Delta B$ (II. 4. Cor. 4.), adeoque $A\Delta \times \Delta B + \Gamma B^q = \Gamma B^q + (\Gamma \Delta + \Gamma B) \times \Delta B$, vel $A\Delta \times \Delta B = (\Gamma \Delta + \Delta B) \times \Delta B$, vel, ob altitudinem ΔB communem, $A\Delta = \Gamma \Delta + \Delta B$ (I. Conv. 36.), vel, demta communi $\Gamma \Delta$, $A\Gamma = \Gamma B$. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 60. et §. 191. Conf. quae infra II. ad 10. Obs. 8. dicentur.

PROPOSITIO VII.

Obs. Huius propositionis haud inelegans est sequens demonstratio, quam Peletarius Euclideae subiungit, ope figurae, in qua omnes propositionis particulae apparent. Eandem demonstrationem etiam tradunt Fournier. (Euclid. Elem. Libri VI. Paris. 1654. Coëtsius (Euclid. Elem. L. VI. Amst. 1705.) Whiston. Pfleiderer §. 81. Caeteris nempe, ut in Euclidea constructione factis, describatur (Fig. 146.) super

Recta enim aliqua AB secta sit utcunque in puncto Γ; dico quadrata ex AB, $B\Gamma$ aequalia esse rectangulo bis sub AB, $B\Gamma$ contento et quadrato ex ΓA.

Describatur enim ex AB quadratum $AΔEB$ (I. 46.); et construatur figura.

Quoniam igitur aequale est AH ipsi HE (I. 43.), commune addatur ΓZ; totum igitur AZ toti ΓE aequale est (Ax. 2.); ergo AZ, ΓE dupla sunt ipsius AZ. Sed AZ, ΓE sunt gnomon $KΛM$ et quadratum ΓZ; $KΛM$ igitur gnomon et ΓZ dupla sunt ipsius AZ. Est autem ipsius AZ duplum et rectangulum bis contentum sub AB, $B\Gamma$, aequalis enim

EN quadratum $ENOΠ$ (I. 46.). Erunt itaque $AB^q+B\Gamma^q=AE+EΠ=AZ+ZΠ+NΘ$. Sed ob $AH=HE$ (I. 43.) et $EH=EΠ$, est $AZ=ZΠ$: ergo $AB^q+B\Gamma^q=2AZ+NΘ=2$ rectang. $AB\times B\Gamma+A\Gamma^q$. Aliam adhuc demonstrationem habent Schenbelius, Clavius, Tacquet., Barrov., Viviani. (de locis solidis L. II. Prop. 65. p. 29. sq.) Pfleiderer. §. 82. ex II. propositionibus 3. et 4. deductam. Ex Obs. 1. ad II. 5. nostram propositionem infert Angelus de Marchettis, Pfleiderer §. 83. Caeterum haec propositio aliter adhuc efferri potest. Nempe, quum sit $A\Gamma^q+2AB\times B\Gamma=AB^q+B\Gamma^q$, vel $A\Gamma^q=AB^q+B\Gamma^q-2AB\times B\Gamma$, et $A\Gamma=AB-B\Gamma$, erit $(AB-B\Gamma)^q=AB^q+B\Gamma^q-2AB\times B\Gamma$ i. e. quadratum differentiae duarum rectarum inaequalium aequale est summae quadratorum ipsorum, demto duplo rectangulo sub ipsis contento. Cf. Pfleiderer. §. 86. et qui ab ipso citantur, Barrov. Whiston., Baermann. alique. Vel, si recta AB producatur, donec sit $BX=B\Gamma$, erit recta AX in duas partes inaequales AB, BX secta, quarum differentia partium $=AB-BX=AB-B\Gamma$, adeoque, si recta linea in duas partes inaequales secetur; quadratum differentiae partium aequale est quadratis

ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνο ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Κοινὸν προς κείσθω τὸ ΘΝ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. Ἀλλ ὁ ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ὅλο ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ τὸ ΓΖ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἡ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης κα τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντ τετραγώνῳ.

partium, demto duplo sub partibus rectangulo; vel quadrat partium simul aequalia sunt quadrato differentiae partium una cum duplo sub partibus rectangulo. Cf. Pfleiderer. §§ 87 88.

Cor. Hinc deducitur: recta aliqua in partes inaequale divisa, quadrata partium simul maiora sunt rectangulo, quo bis sub iisdem continetur, vel generalius: summa quadratorur duarum inaequalium rectarum maior est duplo rectangulo su ipsis, illa quippe hanc excedit quadrato differentiae duarur rectarum. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 84. 85.

PROPOSITIO VIII.

Obs. Varias alias huius propositionis demonstratione

BZ ipsi *BΓ* (II. 4. Cor.); ergo gnomon *KΛM* et quadratum *ΓZ* aequalia sunt rectangulo bis contento sub *AB*, *BΓ*. Commune addatur *ΘN*, quod est quadratum ex *AΓ*; ergo gnomon *KΛM* et quadrata ΓZ, *ΘN* aequalia sunt rectangulo bis sub *AB*, *BΓ* contento et quadrato ex *AΓ*. Sed gnomon *KΛM* et quadrata *ΓZ*, *ΘN* sunt totum *AΔEB* et *ΓZ*, quae sunt quadrata ex *AB*, *BΓ*; ergo quadrata ex *AB*, BΓ aequalia sunt rectangulo bis sub *AB*, *BΓ* contento cum quadrato ex *AΓ*. Si igitur recta etc.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 147.)

Si recta linea secetur utcunque, rectangulum quater sub tota et uno segmentorum contentum cum quadrato ex reliquo segmento aequale est quadrato ex tota et dicto segmento tanquam ex una linea descripto.

exhibent Pfleiderer. §§. 91—97. 105. et, qui ab eo citantur, Claud. Richardus, Peletarius, Clavius, Tacquet., Barrov., Angel. de Marchettis et Coëtsius, e quibus eam, quam Clavius, Tacquet. et Barrov. habent (vid. Pfleiderer. §. 95.) simplicitate sua se maxime commendantem hic subiungere liceat. Ita nempe illi: est

$AΔ^q = AB^q + BΔ^q + 2AB \times BΔ$ (II. 4.)

$= AB^q + BΓ^q + 2AB \times BΓ$ (ob $BΔ = BΓ$) ex construct.

Sed $AB^q + BΓ^q = 2AB \times BΓ + AΓ^q$ (II. 7.), ergo

$AΔ^q = 4AB \times BΓ + AΓ^q$.

Caeterum aliter adhuc efferri potest propositio. Nempe 1) ob $BΔ = BΓ$ dici poterit: Si recta aliqua *AB* secetur utcunque in Γ, eique adiiciatur alia recta *BΔ* uni segmentorum *BΓ* ae-

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΒ εὐθεῖα ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ τῇ ΚΝ, καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΝ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΡ τῇ ΡΟ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΚΝ· ἴσον ἄρα ἐστὶ [1]) τὸ μὲν ΓΚ τῷ ΒΝ, τὸ δὲ ΗΡ τῷ ΚΟ. Ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῷ ΡΝ ἐστὶν ἴσον, παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΒΝ ἄρα τῷ ΗΡ ἴσον ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓΚ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ

1) Cod. a habet: ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ, edd. Oxon. et Basil. omisso καὶ habent ἐστὶ τὸ μὲν ΓΚ, Peyrardus utrumque καὶ et μὲν recipit.

qualis, quadratum totius lineae compositae aequale est rectangulo quater comprehenso sub data et adiecta, una cum quadrato alterius segmenti. Atque ita propositionem hanc efferunt Clavius, Peletarius, Campanus, Pfleiderer. §. 98. 2) Vel, cum in puncto B bifariam secetur recta ΓΔ, cui in directum adiicitur ΓΑ, observante Clavio, consequitur propositionis enunciatum: Si recta ΓΔ bifariam secetur in B, et illi recta quaecunque ΓΑ in directum adiiciatur; quadratum totius ΑΔ

Recta enim aliqua AB secta sit utcunque in puncto Γ; dico et rectangulum quater sub AB, $B\Gamma$ contentum cum quadrato ex $A\Gamma$ aequale esse quadrato ex ipsa AB, $B\Gamma$ tanquam ex una linea descripto.

Producatur enim in directum ipsi AB recta $B\Delta$, et ipsi ΓB ponatur aequalis $B\Delta$, et describatur ex $A\Delta$ quadratum $AEZ\Delta$ (I. 46.), et construatur dupla figura.

Quoniam igitur aequalis est $B\Gamma$ rectae $B\Delta$, sed ΓB quidem ipsi HK est aequalis (I. 34.), et $B\Delta$ ipsi KN (I. 34.); et HK igitur ipsi KN est aequalis. Ex eadem ratione et HP ipsi PO est aequalis. Et quoniam aequalis est ΓB quidem ipsi $B\Delta$, et HK ipsi KN; aequale igitur est (I. 36.) rectangulum quidem ΓK rectangulo BN, et rectangulum HP rectangulo KO. Sed ΓK ipsi PN est aequale (I. 43.), complementa enim sunt parallelogrammi ΓO, et BN igitur ipsi HP aequale est; quatuor igitur ΓK, $K\Delta$, HP, PN aequalia inter se sunt; quatuor igitur quadrupla sunt ipsius ΓK. Rursus, quoniam aequalis

compositae ex data $\Gamma\Delta$ et adiecta ΓA aequale est quadruplo rectangulo sub dimidia datae $\Gamma\Delta$, et sub AB composita ex eadem dimidia $B\Gamma$ et adiecta ΓA, una cum quadrato adiectae ΓA. Vide Taequet., Pfleiderer. §. 99. 3) Vel: recta $\Gamma\Delta$ bifariam in B secta, et in ea producta sumto quocunque puncto A (pariter atque in hypothesi II. Prop. 6.) differentia quadratorum rectarum $A\Delta$, $A\Gamma$, puncto arbitrario A, et extremis Γ, Δ rectae propositae $\Gamma\Delta$ terminatarum, aequatur quadruplo rectangulo sub rectis BA et $B\Gamma$ seu $B\Delta$, quae hinc puncto bisectionis B, inde puncto arbitrario A, et alteri rectae propositae $\Gamma\Delta$ extremo Γ vel Δ interiacent. Cf. Pfleiderer §. 100.

ΗΚ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΗΠ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΓΗ ἄρ
τῇ ΗΠ ἴση ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ
τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν
ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. Ἀλλὰ τὸ ΜΠ
τῷ ΠΛ ἐστὶν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΛ
παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον
ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ ἴσα
ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ τετραπλάσιον
ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΚΛ,
ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτὼ ἃ περι-
ιέχει τὸν ΣΤΥ γνώμονα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ.
Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΛ ἐστὶν, ἴση
γὰρ ἡ ΚΒ τῇ ΒΛ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ,
ΒΛ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΚ. Ἐδείχθη δὲ τοῦ
ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνώμων· τὸ ἄρα τε-
τράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώ-
μονι. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ
ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν
ΑΒ, ΒΛ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ
τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι καὶ
τῷ ΞΘ. Ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον
ἐστὶ τὸ ΑΕΖΛ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΛ·
τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ
τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΛ τετραγώνῳ [1]) τοῦτ'

1) Cod. a et ex eo ed. Paris. addunt: ἴση δὲ ἡ ΒΛ τῇ ΒΓ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ (τῆς) ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ (τῆς) ΑΛ quod ut superfluum omisimus, consentientibus etiam de Lambre et Prony in relatione ad Institut. Franc. facta.

4) Quodsi recta ΑΛ tanquam in puncto Β utcunque secta considereturᐧ ob ΒΓ=ΒΛ, sistit ΑΓ=ΑΒΒ−Λ differentiam partium ΑΒ, ΒΛ, et emergit propositio: Si recta in partes inaequales utcunque secatur; quadratum totius, demto quadrat

est ΓB ipsi *BΔ*; sed *BΔ* quidem ipsi *BK* (II. 4. Cor.), hoc est (I. 34.), ipsi *ΓH* est aequalis, *ΓB* vero ipsi *HK* (I. 34.), hoc est, ipsi *HΠ* (I. 34.) est aequalis; et *ΓH* igitur ipsi *HΠ* aequalis est. Et quoniam aequalis est *ΓH* quidem ipsi *HΠ*, et *ΠP* ipsi *PO*; aequale est rectangulum quidem *AH* rectangulo *MΠ*, et rectangulum *ΠΔ* rectangulo *PZ*. Sed *MΠ* ipsi *ΠΔ* est aequale (I. 43.); complementa enim sunt parallelogrammi *MΔ*, et *AH* igitur ipsi *PZ* aequale est; quatuor igitur *AH*, *MΠ*, *ΠΔ*, *PZ* aequalia inter se sunt; quatuor igitur ipsius *AH* quadrupla sunt. Ostensa sunt autem et quatuor *ΓK*, *KΔ*, *HP*, *PN* ipsius *ΓK* quadrupla; ergo octo quae continet gnomon *ΣΤΥ* quadrupla sunt ipsius *AK*. Et quoniam *AK* est rectangulum sub *AB*, *BΔ*, aequalis enim est KB ipsi *BΔ* (II. 4. Cor.); erit contentum quater sub *AB*, *BΔ* quadruplum ipsius *AK*. Ostensus est autem et gnomon *ΣΤΥ* ipsius *AK* quadruplus. Quod igitur quater continetur sub *AB*, *BΔ* aequale est gnomoni *ΣΤΥ*. Commune addatur *ΞΘ*, quod aequale est quadrato ex *AΓ*; rectangulum igitur quater sub *AB*, *BΔ* contentum cum quadrato ex *AΓ* aequale est gnomoni *ΣΤΥ* et quadrato *ΞΘ*. Sed gnomon *ΣΤΥ* et *ΞΘ* sunt totum *AEZΔ*, quod est quadratum ex

differentiae partium, aequale est quadruplo sub partibus rectangulo; seu quadruplum rectangulum sub partibus, cum quadrato differentiae partium, aequale est totius lineae quadrato. Cf. Ghetaldus, Herigonus, Pfleiderer. §. 101. 5) Porro *AΔ*, *AΓ* sunt rectae inaequales, quarum differentia est *ΓΔ*, semidifferentia *BΓ* seu *BΔ*, et minor earum erit semisummae imminutae semidifferentia aequalis maior autem semisummae auctae semidifferentia (II. 5. Cor. 10.). Propositio itaque eo

ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

redit: Differentia quadratorum duarum inaequalium rectarum aequalis est rectangulo sub ipsarum semisumma ac semidifferentia quater sumta. Cf. Pfleiderer §. 102. 6) Vel, quum $AΔ = AB + \begin{cases} BΔ \\ BΓ \end{cases}$ sistat summam, $AΓ = AB - BΓ$ differentiam duarum inaequalium rectarum: excessus quadrati summae duarum rectarum super quadratum differentiae ipsarum aequalis est quadruplo rectangulo sub rectis. Cf. Pfleiderer. §. 103.

PROPOSITIO IX.

Obs. 1. Plures adhuc alias huius propositionis demonstrationes habent Claud. Richardus, Coëtsius, Clavius, Barrov., Angelus de Marchettis, Commandinus, Ghetaldus, Gilbert., Pfleiderer. (Scholia in libr. II. Elem. Euclid. Pars II. p. 1. sqq. §§. 109—114.) Poterit etiam haec propositio aliter efferri. Nempe 1) dum $AΔ$ consideratur tanquam in puncto $Γ$ in partes utcunque inaequales divisa; erunt, quum sit $BΔ = BΓ - ΓΔ = AΓ - ΓΔ$, quadratum totius $AΔ$, una cum quadrato differentiae partium $BΔ$ vel $(AΓ - ΓΔ)$, dupla quadratorum partium $AΓ$, $ΓΔ$ quod observant Ghetaldus, et Pfleiderer. l. c. §. 116. 2) vel, quum sit $AΔ = AΓ + ΓΔ$, erit $(AΓ + ΓΔ)^2 + (AΓ - ΓΔ)^2 = 2AΓ^2 + 2ΓΔ^2$ i. e. aggregatum quadratorum ex summa et differentia duarum inaequalium aequatur duplo quadratorum ex ipsis

$A\Delta$; rectangulum igitur quater sub AB, $B\Delta$ contentum cum quadrato ex $A\Gamma$ aequale est quadrato ex $A\Delta$, hoc est, quadrato ex ipsa AB et $B\Gamma$ tanquam ex una linea descripto. Si igitur recta etc.

PROPOSITIO IX. (Fig. 148.)

Si recta linea secetur in aequalia et inaequalia, quadrata segmentorum inaequalium dupla sunt quadrati ex dimidia et quadrati ex recta inter puncta sectionum.

bet., Pfleiderer. §. 115.) quod etiam ex II. 4. et II. 7. inter se iunctis sponte fluit. Hinc, ut hoc obiter notemus, sequitur $A\Gamma^q+\Gamma\Delta^q=\frac{(A\Gamma+\Gamma\Delta)^q+(A\Gamma-\Gamma\Delta)^q}{2}$ h. e. summa quadratorum duarum inaequalium rectarum aequalis est dimidiae summae duorum quadratorum, quorum latera sunt ipsarum aggregatum et differentia. Cf. Pfleiderer. §. 117.

Cor. 1. Quum $A\Gamma=\Gamma B$ (hyp.), adeoque $A\Gamma^q+\Gamma B^q=2A\Gamma^q$, at ex nostra propositione $A\Delta^q+\Delta B^q=2A\Gamma^q+2\Gamma\Delta^q$; patet, esse $A\Gamma^q+\Gamma B^q<A\Delta^q+\Delta B^q$, vel duorum quadratorum eandem datam laterum summam habentium aggregatum esse omnium minimum, quando ipsorum latera mutuo aequalia sint. Cf. l'Huilier de relatione mutua p. 55. Pfleiderer. §. 118. Et quidem erit $(A\Delta^q+\Delta B^q)-(A\Gamma^q+\Gamma B^q)=2\Gamma\Delta^q$ i. e. recta AB in Γ in aequalia, in Δ autem in inaequalia segmenta divisa, summa duorum quadratorum ab aequalibus rectae segmentis descriptorum a summa duorum quadratorum ab inaequalibus eiusdem rectae segmentis factorum deficit duplo quadrato rectae inter puncta sectionum interceptae i. e. (cf. II. 5. Cor. 4.) duplo quadrato semidifferentiae segmentorum inaequalium. Cf. Pfleiderer. §. 120.

Cor. 2. Aliter itaque res se habet in his quadratis, ac in rectangulis eandem laterum contiguorum summam habentibus. In his nempe vidimus (II. 5. Cor. 4.) rectangulum

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶ, καί εἰσιν ἴσαι· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΑ, ΓΑΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά

laterum aequalium $A\Gamma \times B\Gamma$ i. e. $A\Gamma^q$ superare quadratum inaequalium laterum $A\Delta \times \Delta B$ quadrato lateris $\Gamma\Delta$, vel esse $\left.\begin{matrix} A\Gamma \times B\Gamma \\ A\Gamma^q \end{matrix}\right\} - A\Delta \times \Delta B = \Gamma\Delta^q$, adeoque horum *maximum* esse $A\Gamma \times B\Gamma$ vel $A\Gamma^q$, quum contra $A\Gamma^q + B\Gamma^q$ *minima summa* sit quadratorum, quorum latera eandem summam AB habent. Et, quum in istis rectangulis differentia $\left.\begin{matrix} A\Gamma \times B\Gamma \\ A\Gamma^q \end{matrix}\right\} - A\Delta \times B\Delta = \Gamma\Delta^q$ esset, iam est respondens differentia $(A\Delta^q + B\Delta^q) - (A\Gamma^q + B\Gamma^q) = 2\Gamma\Delta^q$ = duplo prioris. Cf. Pfleiderer. §§. 119. 121. Nempe, quum summa quadratorum $A\Delta$, $B\Delta$, quorum summa laterum $= AB$, sit $= AB^q - 2A\Delta \times B\Delta$ (II. 4.), erit ista summa eo minor, quo maior est rectangulum $A\Delta \times BD$, minima itaque, si hoc rectangulum maximum fuerit e. si sit $A\Delta = B\Delta$. Cf. Pfleiderer. §. 122.

Cor. 3. Quodsi AB secetur (Fig. 149) in alia inaequalia $A\Pi$, $B\Pi$ in puncto Π remotiore quam Δ a puncto bisectionis Γ: erit summa $A\Pi^q + B\Pi^q > A\Delta^q + B\Delta^q$, quum huius

Recta enim aliqua AB secta sit in aequalia quidem ad Γ, in inaequalia vero ad Δ; dico quadrata ex $A\Delta$, ΔB dupla esse quadratorum ex $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$.

Ducatur enim a Γ ipsi AB ad rectas ΓE (I. 11.), et ponatur aequalis alterutri ipsarum $A\Gamma$, ΓB, et iungantur AE, EB, et per Δ quidem ipsi $E\Gamma$ parallela ducatur ΔZ (I. 31.), per Z vero ipsi AB parallela ducatur ZH (I. 31.), et iungatur AZ.

Et quoniam aequalis est $A\Gamma$ rectae ΓE, aequalis est et angulus $EA\Gamma$ angulo $AE\Gamma$ (I. 5.) Et quoniam rectus est ad Γ; reliqui igitur $EA\Gamma$, $AE\Gamma$ uni recto aequales sunt (I. 32.), et sunt aequales (I. 6.); dimidius igitur recti est uterque ΓEA, ΓAE. Ex eadem ratione et uterque ΓEB, $EB\Gamma$ dimidius est recti;

summae excessus super $2A\Gamma^q$ sit $=2\Gamma\Delta^q$, illius $2\Gamma\Pi^q$, sitque $2\Gamma\Pi^q > 2\Gamma\Delta^q$ (Lemma ante X. 43. Barrov., Gilbert, aliique. Pfleiderer. §. 123.). Et quidem $(A\Pi^q + B\Pi^q) - A\Delta^q + B\Delta^q) = 2\Gamma\Pi^q - 2(\Gamma\Pi^q - \Gamma\Delta^q) = 2(\Gamma\Pi + \Gamma\Delta) \times \Gamma\Pi - \Gamma\Delta)$ (II. 5. Obs. 1.), hoc est, facto $AP = B\Pi$, erit $(A\Pi^q + B\Pi^q) - (A\Delta^q + B\Delta^q) = 2P\Delta \times \Delta\Pi$, quod est duplum rectangulum sub summa et differentia semidifferentiarum $A\Pi$, ΠB, et $A\Delta$, $B\Delta$. Cf. II. 5. Cor. 7. Pfleiderer. §. 125.

Cor. 4. Ex his, collatis iis, quae II. 5. Cor. 2. et 6. observata sunt, coniunctis cum I. 47. consequitur, inter parallelogramma rectangula isoperimetra, quadrati aream maximam, diagonales minimas esse; caeterorum areas eo minores, diagonales eo maiores esse, quo magis latera ipsorum contigua invicem differant: pariterque inter triangula rectangula, quorum latera circa angulum rectum eandem summam conficiunt, aequicruri aream maximam, hypotenusam minimam esse; caeterorum scalenorum aream eo minorem, hypotenusam eo ma-

ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ πλευρᾷ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. Πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ, ἴση γάρ ἐστι πάλιν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά

iorem esse, quo magis catheti eorum invicem differant. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 125.

Obs. 2. Quum recta ΑΒ (Fig. 150.) bifariam in Γ secta, et ad Γ constituto perpendiculo ΓΕ=ΑΓ=ΒΓ, iunctisque rectis ΑΒ, ΒΕ, fiat, ut in demonstratione II. 9. ostensum fuit, angulus ΑΕΒ rectus, et, quae ex quibuslibet rectae ΓΒ punctis, Δ, Π rectae ΓΕ parallelae i. e. I. 29. ad ΒΓ perpendiculares aguntur, vel ex punctis quibusvis Z, Σ rectae ΒΕ normales in ΒΓ demittuntur, fiant rectae ΑΒ segmentis ΔΒ, ΠΒ aequales, ideoque sint ΑΔ+ΔΖ=ΑΠ+ΠΣ=ΑΓ+ΓΕ=ΑΒ: completis parallelogrammis rectanguli ΑΓΕΤ, ΑΔΖΓ, ΑΠΣΦ, triangulisque rectangulis ΑΓΕ, ΑΔΖ

totus igitur AEB rectus est. Et quoniam HEZ dimidius est recti, rectus autem EHZ, aequalis enim est interiori et opposito $E\Gamma B$ (I. 29.); reliquus igitur EZH dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur est angulus HEZ angulo EZH; quare et latus EH lateri HZ est aequale (I. 6.). Rursus quoniam angulus ad B dimidius est recti, rectus autem $Z\Delta B$, aequalis enim est rursus interiori et opposito $E\Gamma B$ (I. 29.); reliquus igitur ΔZB dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur angulus ad B angulo ΔZB; quare et latus $Z\Delta$ lateri ΔB est aequale (I. 6.). Et quoniam aequalis est $A\Gamma$ rectae ΓE, aequale est et quadratum ex $A\Gamma$ quadrato ex ΓE; ergo quadrata ex $A\Gamma$, ΓE aequalia sunt quadrati ex $A\Gamma$. Quadratis autem ex $A\Gamma$, ΓE aequale est quadratum ex AE (I. 47.), rectus enim est angulus $A\Gamma E$; quadratum igitur ex AE duplum est quadrati ex $A\Gamma$. Rursus quoniam aequalis est EH rectae HZ, aequale est etiam quadratum ex EH quadrato ex HZ; ergo quadrata ex EH, HZ duplia sunt quadrati ex HZ. Quadratis autem ex EH,

$\Delta\Pi Z$, quae Cor. 14. de diagonalibus rectangulorum et hypotenusis triangulorum traduntur, etiam liquent ex I. 19. Cor. 1. et 5. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 126.

Obs. 3. Esse rectam $\Delta Z = \Delta B$, $Z\Pi = \Pi B$ etc. inde pendet, quod angulus ABE ostensus fuit esse semirectus. Quacunque igitur ratione ducatur BE ad AB ita, ut angulus ABE fiat semirectus, idem valebit non solum de rectis ΠZ, ΔZ, sed etiam producta BE, de rectis $X\Psi$, $A\Omega$, nempe erit $X\Psi = XB$, $A\Omega = AB$. Et, quum, ut facile patet, nonnisi ea puncta, quae in recta $B\Omega$, nempe basi trianguli aequilateri ABO posita sunt, ita comparata sint, ut demissa ex iis ad AB perpendicula intercipiant inter se et punctum B segmenta

ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΖ τετάγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ὀρθὴ γάρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ipsis his perpendiculis aequalia, recta ΒΩ locus erit, quem in rectangulis isoperimetris circa communem angulum Α constitutis attingunt ipsorum anguli, communi angulo Α oppositi, vel quem in triangulis rectangulis ΑΧΨ, ΑΓΕ, ΑΔΖ etc., quorum bina latera circa angulum rectum simul aequant rectam ΑΒ, vertices horum triangulorum contingunt. Et facile patet, idem adhuc valere (Fig. 151.), etiam si parallelogramma non rectangula at aequiangula sint, et in triangulis angulus, quem inter se aequalem habent, non sit rectus, dum deinde recta ΒΕ ita ducatur, ut angulum ΑΒη isti communi angulo aequalem bisecet. Viviani de locis solidis lib. III. Prop. 8 p. 57. Pfleiderer l. c. §§. 127—134. Et quae de diagonalibus et hypotenusis dicta sunt Obs. 2., valent etiam in parallelogrammis et triangulis obliquangulis, quum etiam ubi de ii quaestio est, angulus ΑΕΒ maneat rectus, adeoque 1. 19

HZ aequale est quadratum ex EZ (I. 47.), ergo quadratum ex EZ duplum est quadrati ex HZ. Sed aequale est quadratum HZ quadrato ex $\Gamma\Delta$; quadratum igitur ex EZ duplum est quadrati ex $\Gamma\Delta$. Est autem quadratum ex EA duplum quadrati ex $A\Gamma$ (I. 47.); ergo quadrata ex AE, EZ dupla sunt quadratorum ex $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$; ipsis vero ex AE, EZ aequale est quadratum ex EZ (I. 47.), rectus enim est AEZ angulus; ergo AZ quadratum duplum est quadratorum ex $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$. Quadrato vero ex AZ aequalia sunt quadrata ex $A\Delta$, ΔZ (I. 47.), rectus enim est angulus ad Δ; quadrata igitur ex $A\Delta$, ΔZ dupla sunt quadratorum ex $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$. Aequalis autem ΔZ rectae ΔB; ergo quadrata ex $A\Delta$, ΔB dupla sunt quadratorum ex $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$. Si igitur recta etc.

Cor. 4. et 5. etiam hic applicari queat. Quae vero de areis parallelogrammorum et triangulorum rectangulorum Cor. 4. dicta sunt, demum ope VI. 23. ad obliquangula extendi, vel immediate per VI. 27. de illis inferri possunt. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 135.

Obs. 4. Per praecedentia facile determinatur ac solvitur problema: construere triangulum rectangulum, cuius datur hypotenusa et summa cathetorum, vel: describere parallelogrammum rectangulum, cuius datur diagonalis et summa duorum laterum contiguorum, vel generalius: sub dato angulo quocunque describere triangulum, vel parallelogrammum, cuius latera circa hunc angulum simul sunt datae rectae aequalis, et cuius basis vel diagonalis opposita angulo dato est datae rectae aequalis. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 136—146. et qui plerique ab eo citantur Ghetaldus p. 337. Thom. Simpson.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΓΕ [1]) παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΓ, ΖΔ εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ ΕΖ, αἱ ὑπὸ ΓΕΖ, ΕΖΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ, ΕΖΔ δύο ὀρθῶν ἐλασ-

1) Edit. Paris. cum Codice a addit: πάλιν.

Treatise of Algebra Lond. 1745. p. 287. sq. Schwab. Euklids Data p. 174. sqq. Schulz Taschenbuch II. Heft. Berlin 1783. p. 400. sq. Billy Diophant. geometra Paris 1660. p. 53. sq. Van Swinden Anfangsgr. der Meſskunst 1797. p. 485. sq. Meier Hirsch Samml. geom. Aufg. I. Th. 1805. p. 107. sq. l'Huilier Elémens d'Analyse Géometr. et d'Analyse Algébrique Paris. 1809. p. 212. sq.

Cor. 5. Ex. II. 5. et II. 9. coniunctis sequitur, recta ΑΒ bifariam in Γ, et in inaequalia in Δ utcunque secta, quadrata inaequalium partium simul aequari quadrato ex totius

PROPOSITIO X. (Fig. 152.)

Si recta linea secetur bifariam, adiiciatur autem aliqua ipsi recta in directum, quadratum compositae ex tota cum adiecta et quadratum ex adiecta simul sumpta dupla sunt quadrati ex dimidia et quadrati compositae ex dimidia et adiecta tanquam una linea.

Recta enim aliqua AB secta sit bifariam in Γ, adiiciatur autem aliqua ei recta in directum $B\Delta$; dico quadrata ex $A\Delta$, ΔB dupla esse quadratorum ex $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$.

Ducatur enim a puncto Γ rectae AB ad rectos ΓE (I. 11.), et ponatur aequalis alterutri ipsorum $A\Gamma$, ΓB, et iungantur EA, EB; et per E quidem ipsi $A\Delta$ parallela ducatur EZ (I. 31.) per Δ vero ipsi ΓE parallela ducatur $Z\Delta$ (I. 31.). Et quoniam in parallelas rectas $E\Gamma$, $Z\Delta$ recta aliqua incidit EZ, anguli ΓEZ, $EZ\Delta$ duobus rectis aequales sunt (I. 29.); ergo ZEB, $EZ\Delta$ duobus rectis minores sunt. Rectae

dimidio, una cum triplo quadrato ex interposito segmento et cum rectangulo earundem partium inaequalium.

Est enim $A\Gamma^q = \Gamma\Delta^q + A\Delta \times \Delta B$ (II. 5.)

hinc $2A\Gamma^q + 2\Gamma\Delta^q = A\Gamma^q + 3\Gamma\Delta^q + A\Delta \times \Delta B$

adeoque (II. 9.) $A\Delta^q + \Delta B^q = A\Gamma^q + 3\Gamma\Delta^q + A\Delta \times \Delta B$. Viviani de locis solidis L. II. Prop. 68. p. 46. Pfleiderer. §. 147.

PROPOSITIO X.

Obs. 1. Huius etiam propositionis plures alias demonstrationes habent iidem, quos ad Prop. IX. citavimus, auctores; v. Pfleiderer. §§. 151—160. et nominatim eam aliqui simili ratione ex II. 9. deducunt, ac II. 6. ex II. 5. deduci posse

σονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΕΒ, ΖΔ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπεπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν

vidimus. Potest etiam illa eodem modo aliter efferri ac II. Prop. 9. iisdem verbis, ac ad eam Obs. 1. nr. 1. 2. monitum fuit. Et priorem quidem modum „si recta linea secta fuerit in partes inaequales, quadratum totius, una cum quadrato excessus, quo maius segmentum excedit minus, duplum erit quadratorum ab ipsis segmentis descriptorum" iam indicavit Isaac. Monachus in Schol. ad II. 10.

Cor. 1. Recta AB bifariam in Γ secta, et adiuncta ei quacunque $B\Delta$: ipsa AB differentia est rectarum $A\Delta$, $B\Delta$; $\Gamma\Delta$ autem earum semisumma, vel quod eodem redit (cf. II. 6. Cor. 2.) erunt $A\Delta$, $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ tres continue arithmetice proportionales. Atque his observationibus nituntur aliae propositionis X. (pariter ac Prop. IX.) enunciationes. Cf. Pfleiderer l. c. §§. 182. 183. Nempe: Duarum inaequalium rectarum quadrata simul dupla sunt quadratorum ex ipsarum semisumma et semidifferentia vel si tres rectae sint continue arithmetice proportionales, quadrata extremorum simul aequantur duplo aggregato ex quadrato mediae, ac differentiae utriusvis extremarum et mediae composito. Sumta deinde (Fig. 153.) $\Gamma\Pi > \Gamma\Delta$, manente eadem differentia AB, ambae $A\Pi$, $B\Pi$ crescunt eodem, quo $\Gamma\Pi$, incremento, eritque $A\Pi^q + B\Pi^q > A\Delta^q + B\Delta^q$ pariter ac (coll. II. 6. Cor. 5.) $A\Pi \times \Pi B > A\Delta \times \Delta B$. Sumatur $\Gamma P = \Gamma\Pi$, unde $\Gamma P^q = \Gamma\Delta^q + P\Delta \times \Delta\Pi$ (II. 5.), eritque $A\Pi^q + B\Pi^q = 2\Gamma\Pi^q + 2\Gamma B^q$ (II. 10) =

autem a minoribus quam duobus rectis productae conveniunt (Post. 5. vel Ax. 11.); ergo EB, $Z\Delta$ productae ad partes $B\Delta$ convenient. Producantur, et conveniant in H, et iungatur AH.

Et quoniam aequalis est $A\Gamma$ rectae ΓE, aequalis est et angulus $AE\Gamma$ angulo $EA\Gamma$ (I. 6.); atque rectus est ad Γ; dimidius igitur recti est uterque ipsorum $EA\Gamma$, $AE\Gamma$ (I. 32.). Ex eadem ratione et uterque ipsorum ΓEB, $EB\Gamma$ dimidius est recti; rectus igitur

$$=2\Gamma\Delta^{\square}+2\Gamma B^{\square}+2P\Delta\times\Delta\Pi \text{ (II. 6.)}$$
$$= A\Delta^{\square}+B\Delta^{\square}+2P\Delta\times\Delta\Pi \text{ (II. 10.)}$$

Contra (cf. II. 6. Cor. 5.) est $A\Pi\times\Pi B-A\Delta\times\Delta B=P\Delta\times\Delta\Pi$.

Est autem $P\Delta=P\Gamma+\Gamma\Delta=\Gamma\Pi+\Gamma\Delta=\frac{A\Pi+B\Pi}{2}+\frac{A\Delta\times B\Delta}{2}$.

$$\Delta\Pi=\Gamma\Pi-\Gamma\Delta=\frac{A\Pi+B\Pi}{2}-\frac{A\Delta+B\Delta}{2}.$$

Dum igitur aeque differunt $A\Pi$ et $B\Pi$, $A\Delta$ et $B\Delta$: rectangulum sub prioribus, quorum summa est maior, excedit rectangulum sub posterioribus rectangulo sub summa et sub differentia semisummarum laterum $A\Pi$ et $B\Pi$, $A\Delta$ et $B\Delta$; duplo autem hoc rectangulo summa quadratorum ex prioribus summam quadratorum ex posterioribus excedit. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 166.

Cor. 2. Hinc inter parallelogramma rectangula, quorum latera contigua aeque invicem differunt, eius, cuius perimeter maior est, area et diagonales sunt maiores: pariterque inter triangula rectangula, quorum latera circa angulum rectum aeque invicem differunt, illius area et hypotenusa maiores sunt, cuius summa cathetorum est maior. Cf. Pfleiderer. §. 167.

Obs. 2. Recta AB (Fig. 154. 155.) bifariam secta in puncto Γ, et per hoc ducta sub angulo quocunque $\Gamma E=\Gamma B=\Gamma A$; tum ultra punctum B versus β, δ continuatis rectis EB, AB: quae his rectis $B\delta$, $B\beta$ terminantur, rectae ΓE parallelas quascunque ΔZ, $\Pi\Sigma$ esse segmentis adiacentibus $B\Delta$, $B\Pi$ rectae

ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. Καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ [1]) ΔΗΒ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμί-

1) Verba: ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ omitt. Ed. Paris. et Cod. a. Nos ex edd. Oxon. et Basil. ad analogiam sequentium et demonstrationis II. 9. restituimus.

$B\delta$ aequales, proinde $AZ-\Delta Z=A\Sigma-\Pi\Sigma=AB$, simili ratione, qua in demonstratione II. 10. per I. 6. generatim infertur: quia angulus $\Gamma EB=\Gamma BE$ (I. 5.) $\begin{pmatrix}\Delta ZB\\ \Pi\Sigma B\end{pmatrix}=\Gamma EB$ (I. 29.) et $\beta B\delta=\Gamma BE$ (I. 15.). Contra, quae hinc rectae $B\delta$, inde puncto quocunque extra rectam $B\beta$, ad easdem cum ipsa partes rectae $B\delta$ sito, terminantur rectae, ipsi ΓE parallelae, segmento adiacenti rectae $B\delta$ aequales non sunt, nec proinde differentia earum et rectarum ad idem punctum ex A ductarum rectae AB aequalis est. Porro etiam ultra A, E puncta versus ε, γ productis BA, BE rectis: quae a punctis X ipsius $A\varepsilon$ eidem ΓE parallelae aguntur $X\Psi$ ad occursum usque rectae $B\gamma$, ob angulos $B\Psi X=BE\Gamma$ (I. 29.), ideoque $=\Psi BX$ (I. 5.) sunt segmentis adiacentibus BX rectae $B\varepsilon$ aequales (I. 6.), proinde $X\Psi-XA=BX-XA=AB$: idque pariter exclusive. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 168.

Obs. 3. Per punctum B ducta rectae ΓE parallela $B\zeta$ ad partes rectae $A\delta$, ad quas est $B\beta$: ob angulos $\beta B\zeta=BE\Gamma$ (I. 29.) $\beta B\delta=\Gamma BE$ (I. 15.) bifariam angulum $\zeta B\delta$ secat recta $EB\beta$. Vicissim, si recta $B\beta$ bifariam secat angulum $\zeta B\delta$, quem recta $B\zeta$ utcunque per B ducta cum continuata AB comprehendit: quaelibet cruri eius $B\zeta$ parallela ab altero crure $B\delta$ abscindit segmentum ipsius parallelae segmento rectis $B\beta$, $B\delta$ interiacenti aequale, et quae per punctum bisectionis Γ rectae

est ΔEB. Et quoniam dimidius recti est $EB\Gamma$, dimidius igitur recti est et ΔBH (I. 15.). Est autem et $B\Delta H$ rectus; aequalis enim est ipsi $\Delta\Gamma E$ alterno (I. 29.). Reliquus igitur ΔHB dimidius recti est (I. 32.): angulus itaque ΔHB angulo ΔBH est aequalis; quare et latus $B\Delta$ lateri ΔH est aequale (I. 6.). Rursus, quoniam EHZ dimidius est recti, rectus autem

ΔB, parallela cruri $B\zeta$ ducitur ΓE ad occursum usque continuatae βB in E, pariter fit $=\Gamma B=\Gamma\Delta$. Ob angulos enim ΔB, $\Pi\Xi B$, $BE\Gamma$ singulos $=\zeta B\beta$ (I. 29.) ideoque $=\delta B\beta$ (constr.) $=\Gamma BE$ (I. 15.) sunt (I. 6.) $B\Delta=\Delta Z$, $B\Pi=\Pi\Xi$, $B\Gamma=\Gamma E$. Unde caetera quoque Obs. 2. proposita tum subsistunt. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 169.

Obs. 4. Eandem $\beta B\gamma$, sive iuxta Obs. 2. sive iuxta Obs. 3. ducatur, bifariam dividere angulum $\Delta B\eta$, quem producta ζB cum data ΔB comprehendit, vel ex I. 29. I. 5. vel ex I. 15. consequitur. Quare, dum aequales utrimque sint anguli $\Delta B\eta$, haec $\beta B\gamma$ in directum iacet cum recta $B\Omega$ supra Obs. 3. ad II. 9. determinata. Per rectae igitur magnitudine ac positione datae ΔB alterum extremum B ducta quacunque recta $B\zeta$: quae angulum $\zeta B\delta$, hac $B\zeta$ et continuata ΔB comprehensum bifariam secat recta utrimque continuata $\beta B\gamma$, quatenus hinc ultra B versus β, inde ultra Ω, ubi rectae $\Delta\Omega$ ipsi $B\zeta$ per Δ parallela occurrit, versus γ extenditur (de eius parte $B\Omega$ vide Obs. 3. ad II. 9.). Locus est, ad quem sunt 1) vertices Z, Ξ, Ψ communi Δ oppositi, parallelogrammorum ΔBZT, $\Delta\Pi\Xi\Phi$, $\Delta X\Psi\alpha$; quae, ducta per alterum recta ΔB extremum A rectae $B\zeta$ parallela $\Delta\Omega$, pariterque ultra Δ continuata $B\Delta$, in angulis $\Phi\Delta X$ etc. angulo $\zeta B\Delta$ aequalibus (I. 29.) fieri possunt, sic, ut contigua ipsorum latera invicem differant data ΔB: 2) vertices tertii Z, Ξ, Ψ triangulorum $\Delta Z\Delta$, $\Delta\Xi\Pi$, $\Delta\Psi X$, circa communem verticem Δ constitutorum, quorum anguli ad secundos vertices Δ, Π, X rectae ΔB in directum iacentes, sunt dato $\Delta B\zeta$ aequales (I. 29.) et

σειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Z, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ZEH ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ EHZ γωνία τῇ ὑπὸ ZEH· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ HZ πλευρᾷ τῇ ZE ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ EΓ τῇ ΓA, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EΓ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓA τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν EΓ, ΓA τε-

quorum crura circa hos angulos data *AB* invicem differunt. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 170. 171.

Obs. 5. Ambos locos (Obs. 3. ad II. 9. et Obs. 4. ad II. 10.) una propositione sic licet complecti: Si a puncto ad rectam positione datam ducatur recta in dato angulo; dataque sit summa vel differentia rectae huius et segmenti dato puncto adiacentis, quod ea ex recta positione data abscindit, tangit punctum rectam positione datam. Cf. Pfleiderer. §. 172.

Obs. 6. Bifariam in *Γ* secta *AB*, et per *B* ducta rectae *Bζ* parallela *ΓE* ad occursum usque rectae *βBγ* angulum *ζBδ* bifariam secantis, in *E*: fit *ΓE*=*ΓB*=*ΓA* (Obs. 3.) ideoque angulus *AEB* rectus (I. 6. et I. 32.) et hinc *AΣ*>*AZ* (I. 19. Cor. 5.) dum *ΓΠ*>*ΓΔ* proinde (II. 10. Cor. 1.) *AΣ*+*AΠ*>*AZ*+*AΔ*. Parallelogrammum vero *AΠΣΦ*>*AΔZT*, et triangulum *AΣΠ*>*AZΔ* per I. Ax. 9. Generatim igitur inter parallelogramma aequiangula, quorum latera contigua aeque invicem differunt, eius, cuius perimeter maior est, area et diagonales homologae, seu quae vertices angulorum respective aequalium iungunt, maiores sunt: pariterque inter triangula, quorum unus angulus aequalis, et quorum crura (latera circa hos angulos aequales) aeque invicem differunt, illius area et basis maiores sunt, cuius summa crurum est maior. Cf. Pfleiderer. §. 173.

Obs. 7. Basin seu tertium latus *AZ* cuiuslibet trianguli non aequicruri *AZΔ* maiorem esse differentia *AB* crurum eius *AΔ*, *AB*; proinde et diagonalem utramque parallelogrammi cuiusvis non aequilateri esse differentia laterum eius conti-

est qui ad Z, aequalis enim est opposito qui ad Γ (I. 29.); reliquus igitur ZEH dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur EHZ angulus ipsi ZEH; quare et latus HZ lateri ZE est aequale (I. 6.). Et quoniam aequalis est $E\Gamma$ rectae ΓA, aequale est et quadratum ex $E\Gamma$ quadrato ex ΓA. Ergo quadrata ex $E\Gamma$, ΓA dupla sunt quadrati ex ΓA. Quadratis au-

guorum maiorem, reducitur ad I. 19. Cor. 3.: quod trianguli obtusanguli latus oppositum angulo obtuso sit utroque eius reliquo latere maius; cum a maiore crure AA abscissa $AB = A\Gamma$, trianguli aequicrusi BZA angulus ZBA ab basin sit acutus I. 5. I. 17. et igitur deinceps positus ABZ obtusus (I. 13.). Cf. Pfleiderer. §. 174.

Obs. 8. Per praecedentia facile solvitur problema: sub dato angulo quocunque describere triangulum, vel parallelogrammum, cuius latera circa hunc angulum differant recta data, et cuius basis, vel diagonalis opposita angulo dato sit alii rectae datae, maiori quam differentia data, aequalis. Vid. Pfleiderer. §§. 175—181. Ghetaldus, Thom. Simpson., van Swinden, l'Huilier. l. c. p. 218.

Cor. 3. Ex II. 6. et II. 10. coniunctis sequitur: Si recta AB bifariam secta fuerit in Γ; eique addita in directum quaedam BA, quadratum ex AA, data et addita cum quadrato additae BA aequale est quadrato ex ΓA dimidio datae et additae, cum tribus quadratis ex $A\Gamma$, eodem datae dimidio, et cum rectangulo $AA \times AB$ sub data cum addita in additam.

Est enim $\Gamma A^q = \Gamma B^q + AA \times AB = A\Gamma^q + AA \times AB$ (II. 6.)

itaque $2\Gamma A^q + A\Gamma^q = \Gamma A^q + 3A\Gamma^q + AA \times AB$

i.e. (II. 10.) $AA^q + BA^q = \Gamma A^q + 3A\Gamma^q + AA \times AB$.

Cf. Pfleiderer. §. 161.

Cor. 4. Nexus propositionum II. 9. et II. 10. idem est, ac propositionum II. 5. et II. 6., unde etiam hae duae propositiones uno eodemque enunciato comprehendi possunt. Cf. Cor. 1. Nempe punctum A, quod in II. Prop. 9. in ipsa

τράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. Τοῖς

AB sumtum fuit, in II. Prop. 10. in AB producta sumitur. Cf. Pfleiderer. §. 184.

Obs. 9. Recta AB (Fig. 156.) in inaequalia utcunque in puncto Δ divisa, a maiori segmento ΑΔ abscindatur ΔΑ = minori ΔB, et residua ΑΔ bifariam in Γ secetur, erit $ΑΔ^q + ΔΑ^q = 2ΑΓ^q + 2ΓΔ^q$ (II. 10.), adeoque ob ΔΑ = ΔB, $ΑΔ^q + ΔB^q = 2ΑΓ^q + 2ΓΔ^q$ pariter ac in figura altera (Fig. 157.), in qua ΑB in Γ bisecta, atque in ea ipsa punctum quodcunque Δ sumtum fuit, ubi ex (II. 9.) erit $ΑΔ^q + ΔB^q = 2ΑΓ^q + 2ΓΔ^q$, quamvis priore figura recta ΑB in puncto Γ haud bifariam secetur. ΑΓ priore figura $= \frac{ΑΑ}{2} = \frac{ΑΔ - ΔΑ}{2} = \frac{ΑΔ - ΔB}{2}$ (constr.) sistit semidifferentiam segmentorum inaequalium ΑΔ, ΔB, quam in figura posteriore exhibet ΓΔ (II. 5. Cor. 4.): et ΓΔ priore figura $= ΓΑ + ΔΑ = \frac{ΑΑ}{2} + \frac{BΑ}{2} = \frac{ΑB}{2}$ sistit segmentorum ΑΔ, ΔB semisummam, quae in figura posteriore est ΑΓ. Quare assertum $ΑΔ^q + ΔB^q = 2ΑΓ^q + 2ΓΔ^q$ figura priore quoque conforme etiam est communi propositionum 9. et 10. enunciato, quod Cor. 1. dedimus. Pariter rectae ΑB (Fig. 158.) in directum adiiciatur quaecunque BΔ, et denuo rectae ΑΔ recta ΔΑ = BΔ, ac bifariam in Γ secetur tota ΑΔ. Erit $ΑΔ^q + ΔΑ^q = 2ΑΓ^q + 2ΓΔ^q$ (II. 9.), ideoque, ob ΔΑ = ΔB, etiam $ΑΔ^q + ΔB^q = 2ΑΓ^q + 2ΓΔ^q$, pariter ac (II. 10.) in figura posteriore (Fig. 159.), in qua, ΑB in Γ bifariam divisa, atque in ea producta punctum quodcunque Δ sumtum

tem ex $E\Gamma$, ΓA aequale est quadratum ex AE (I. 47.); ergo quadratum ex EA duplum est quadrati ex $A\Gamma$. Rursus, quoniam aequalis est ZH rectae ZE, aequale est et quadratum ex HZ quadrato ex ZE. Quadrata igitur ex HZ, ZE dupla sunt quadrati ex EZ. Quadratis autem ex HZ, ZE aequale est quadratum ex EH (I. 47.). Quadratum igitur ex EH

fuit, quamvis rursus casu prioris figurae AB in puncto Γ non bifariam secetur. Permutatis etiam $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ utrumque $A\Delta^q + B\Delta^q = 2A\Gamma^q + 2\Gamma\Delta^q$ utraque figura exhibitum continetur proposito Cor. 1.: quippe $A\Gamma$ priore figura $= \frac{AA}{2} = \frac{A\Delta + \Delta A}{2} = \frac{A\Delta + \Delta B}{2}$ (constr.) sistit semisummam rectarum $B\Delta$, $A\Delta$ adiectae scilicet, et compositae ex data AB et adiecta, quam in fig. posteriore exhibet $\Gamma\Delta$ (II. 6. Cor. 3.) et $\Gamma\Delta$ priore figura $= \frac{A\Delta - \Delta A}{2}$ (II. 5. Cor. 4.) $= \frac{A\Delta - B\Delta}{2}$ sistit rectarum $A\Delta$, $B\Delta$ semidifferentiam, quae in fig. posteriore est $A\Gamma$. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 185. 186.

Obs. 10. Conversae quoque Prop. 9. 10. valent. Nempe, rectam AB (Fig. 157. 159.) bifariam secat punctum Γ sic in eo situm, ut duplum aggregatum quadratorum ex rectis ΓB vel ΓA et $\Gamma\Delta$ factorum, quorum una ΓB vel ΓA inter ipsum punctum Γ atque alterum rectae AB extremum, altera $\Gamma\Delta$ inter idem punctum Γ atque punctum Δ alibi in recta AB ipsa vel producta sumtum interiacent, aequale sit quadratis rectarum $A\Delta$, $B\Delta$, quae hinc puncto Δ, inde extremis A, B rectae AB terminantur: *dum*, uti in ipsis propositionibus 9. 10. *recta $\Gamma\Delta$ est rectis ΓB, ΓA minor, quando punctum Δ iacet in ipsa AB; sed $\Gamma\Delta$ maior quam ΓB, ΓA, si punctum Δ est in producta AB.* Sit enim 1) $A\Delta^q + B\Delta^q = 2\Gamma B^q + 2\Gamma\Delta^q$, puncto Δ iacente ad eas puncti Γ partes, ad quas est punctum B: quo casu per se est $\Gamma\Delta < \Gamma B$, dum punctum Δ est in ipsa AB

δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. Ἴση δὲ ΕΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἴση δὲ ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

fig. priore, sed $\Gamma\Delta > \Gamma B$, quando punctum Δ sumitur in producta AB fig. poster. Ob $\Gamma B\,q + \Gamma\Delta\,q = \Delta B\,q + 2\Gamma B \times \Gamma\Delta$ (II. 7.) erit $A\Delta\,q + B\Delta\,q = 2(\Gamma B\,q + \Gamma\Delta\,q)$ (hyp.) $= \Gamma B\,q + \Gamma\Delta\,q + \Delta B\,q + 2\Gamma B \times \Gamma\Delta$, adeoque $A\Delta\,q = \Gamma B\,q + \Gamma\Delta\,q + 2\Gamma B \times \Gamma\Delta = (\Gamma B + \Gamma\Delta)\,q$ (II. 4.) adeoque $A\Delta = \Gamma B + \Gamma\Delta$ (I. 46. Cor.) et, demta communi ΓB, $A\Gamma = \Gamma B$. 2) Sit $A\Delta\,q + B\Delta\,q = 2\Gamma A\,q + 2\Gamma\Delta\,q$, punctis Δ et A iacentibus ad partes oppositas puncti Γ: sitque $\Gamma\Delta < \Gamma A$, quando punctum Δ in ipsa AB iacet (Fig. prior.); sed $\Gamma\Delta > \Gamma A$, si Δ est in producta AB (Fig. poster.). Ob $A\Delta\,q =$

duplum est quadrati ex EZ. Aequalis autem EZ rectae $\Gamma\Delta$; ergo quadratum ex EH duplum est quadrati ex $\Gamma\Delta$. Demonstratum est autem et quadratum ex EA duplum quadrati ex $A\Gamma$; ergo quadrata ex AE, EH dupla sunt quadratorum ex $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$. Quadratis autem ex AE, EH aequale est quadratum ex AH (I. 47.); quadratum igitur ex AH duplum est ipsorum $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$. Quadrato autem ex AH aequalia sunt quadrata ex $A\Delta$, ΔH; quadrata igitur ex $A\Delta$, ΔH dupla sunt quadratorum ex $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$. Aequalis autem est ΔH rectae ΔB; ergo quadrata ex $A\Delta$, ΔB dupla sunt quadratorum ex $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$. Si igitur recta etc.

PROPOSITIO XI. (Fig. 160.)

Datam rectam secare, ita ut rectangulum contentum sub tota et altero segmentorum aequale sit quadrato ex reliquo segmento.

$A\Gamma^q+\Gamma\Delta^q+2\Gamma A\times\Gamma\Delta$ (II. 4.) erit $\Gamma A^q+\Gamma\Delta^q+2\Gamma A\times A\Delta+B\Delta^q=A\Delta^q+B\Delta^q=2(\Gamma A^q+\Gamma\Delta^q)$ (hyp.) adeoque $2\Gamma A\times A\Delta+B\Delta^q=\Gamma A^q+\Gamma\Delta^q$ vel $B\Delta^q=\Gamma A^q+\Gamma\Delta^q-2\Gamma A\times A\Delta$. Hinc fig. priore ubi $\Gamma\Delta<\Gamma A$ (hyp.) $B\Delta^q=(\Gamma A-\Gamma\Delta)^q$ (II. 7. Obs.) et $B\Delta=\Gamma A-\Gamma\Delta$, et addita communi $\Gamma\Delta$, $A\Gamma=B\Gamma$, Et fig. posteriore, ubi $\Gamma\Delta>\Gamma A$ (hyp.) $B\Delta^q=(\Gamma\Delta-\Gamma A)^q$ (II. 7. Obs.) et $B\Delta=\Gamma\Delta-\Gamma A$, et addita communi ΓA, $\Gamma A+B\Delta=\Gamma\Delta$, et demta communi $B\Delta$, $A\Gamma=B\Gamma$. Cf. Pfleiderer. §. 187. Caeterum collatis iis, quae II. 6. Cor. 6. de simi-

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὲ τὴν ΑΒ τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ὑπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διήχθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ διήχθω ἡ ΗΘ ἐπὶ τὸ Κ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι [1]) τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΑΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετρα-

1) Peyrard. cum Cod. a. ponit ἴσον ποιεῖν. Nos ex ed. Oxon. restituimus lectionem εἶναι, ut in Protasi et Ecthesi legitur. Ed. Basil habet; ὥστε — ἴσον ἐστὶ.

libus propositionum II. 5. et II. 6. conversis dicta sunt, observari potest, determinationem, quae hic in enunciato Obs. 10. adiecta fuit, ibi haud allatam fuisse. Neque ea etiam in particulari conditionum expositione erat necessaria: si quis tamen generali propositione utramque conversam indeterminata differentiae quadratorum ex ΓΔ et ΔΑ vel ΔΒ mentione complecti velit, eadem determinatione opus erit. Nempe etiam in figura prior., quam Observ. 9. habuimus, est $\Delta\Delta \times \Delta B = \Gamma\Delta^q - \Gamma A^q$, neque tamen $A\Gamma = \Gamma B$. Cf. Pfleiderer, §. 192.

PROPOSITIO XI.

Obs. 1. Huic problemati sequens praemitti potest ana-

Sit data recta AB; oportet igitur ipsam AB secare, ita ut rectangulum contentum sub tota et altero segmentorum aequale sit quadrato ex reliquo segmento.

Describatur ex AB quadratum $AB\Delta\Gamma$ (I. 46.), et secetur $A\Gamma$ bifariam in puncto E (I. 10.); et iungatur BE, et producatur ΓA in Z, et ponatur rectae BE aequalis EZ (I. 3.), et describatur ex AZ quadratum $Z\Theta$, et producatur $H\Theta$ ad K; dico AB sectam esse in Θ, ita ut rectangulum sub AB, $B\Theta$ contentum aequale sit quadrato ex $A\Theta$.

Quoniam enim recta $A\Gamma$ secatur bifariam in E, adiicitur autem ei recta AZ; rectangulum sub ΓZ, ZA contentum cum quadrato ex AE aequale est quadrato ex EZ (II. 6.). Aequalis autem EZ rectae EB; ergo rectangulum sub ΓZ, ZA contentum cum quadrato ex AE aequale est quadrato ex EB. Sed qua-

lysis. Quum quadratum dimidiae AB sit quadrans quadrati totius AB (II. 4. Cor. 2.), rectangulum autem sub dimidia ac tota AB sit quadrati ipsius AB semissis (II. 1. Cor. 2.): sectio rectae datae AB nostra propositione imperata in inaequalia fieri, ac segmentum, cuius quadratum rectangulo sub tota AB et sub altero segmento aequetur, duorum inaequalium maius esse debet. Facta supponatur sectio desiderata in Θ. Tum super maiori segmento $A\Theta$ descripto quadrato $A\Theta HZ$, et ad minus segmentum $B\Theta$ applicato rectangulo $B\Theta K\Delta$, cuius alterum latus $B\Delta = AB$, requiritur, ut sit $A\Theta HZ = B\Theta K\Delta$. Cum neutrum horum spatiorum, nec nisi rectanguli $B\Theta\Delta K$ alterum latus $B\Delta = AB$ detur; ansa hinc non suppetit problema immediate solvendi. Eam vero suppeditat rectarum ΔK, ZA ad occursum usque in puncto Γ continuatio: qua facta, ut sit $A\Theta HZ = B\Theta K\Delta$, addito utrimque rectangulo $A\Theta K\Gamma$, debet

γώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ τετραγών
Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΔ
ΑΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· τὸ ἄρ
ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐσ
τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπ
τῆς ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περι
χόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τ
τραγώνῳ. Καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ
ΖΚ, ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ
ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ. Κοινὸν ἀφῃρήσθ
τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. Κ
ἐστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ, ἴση γὰρ
ΑΒ τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ [1]· τὸ ἄρ
ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσο
ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ.

1) Hanc lectionem ex edd. Oxon. et Basil. restituimu
Peyrardus et Cod. a. omittunt verba ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ.

esse rectangulum ΗΖΚΓ = quadrato ΑΒΔΓ rectae datae A
Cum rectanguli ΗΖΚΓ latus ΗΖ sit = ΑΖ (constr.); rectang
lum ΗΖΚΓ idem est cum rectangulo sub ΓΖ et ΑΖ. Itaq
problematis solutio huc redit: ut rectae ΓΑ positione ac m
gnitudine datae (quippe quae datae rectae AB perpendicula
est et aequalis) in directum adiiciatur ΑΖ talis, ut rectangulu
sub adiecta ΑΖ et sub composita ΓΖ ex data ΓΑ et adiecta Α
aequale sit quadrato rectae datae AB. Atqui bifariam in punc
Ε divisa ΓΑ, est ΕΖ q = ΓΖ × ΖΑ + ΕΑ q (II. 6.). Quare, ut
ΓΖ × ΖΑ = AB q, debet esse EZ q = AB q + EA q. Sed ob angulu
EAB rectum (constr.) est EB q = AB q + EA q. (I. 47.). Proin
oportet sit ΕΖ q = EB q, et hinc EZ = EB (I. 46. Cór.). Co
structio problematis, quod et Clavius notat, non requirit, ni
ut datae rectae AB in altero eius extremo A perpendicula
excitetur AΓ ipsi AB aequalis, eaque bifariam in E secetu
seu ut tantum semissi ipsius AB aequalis AE ad angulos rect

drato ex EB aequalia sunt quadrata ex BA, AE (I. 47.), rectus enim est angulus ad A; rectangulum igitur sub ΓZ, ZA cum quadrato ex AE aequale est quadratis ex BA, AE. Commune auferatur quadratum ex AE; reliquum igitur rectangulum sub ΓZ, ZA contentum aequale est quadrato ex AB. Et est rectangulum quidem sub ΓZ, ZA ipsum ZK, aequalis enim est AZ rectae ZH, quadratum vero ex AB ipsum $A\Delta$; rectangulum igitur ZK aequale est quadrato $A\Delta$. Commune auferatur AK; reliquum igitur $Z\Theta$ ipsi $\Theta\Delta$ aequale est. Et est quidem $\Theta\Delta$ rectangulum sub AB, $B\Theta$ contentum; recta enim AB aequalis est rectae $B\Delta$, et $Z\Theta$ est quadratum ex $A\Theta$; rectangulum igitur sub AB, $B\Theta$ contentum aequale est quadrato ex ΘA.

datae AB in angulo A constituatur, tum recta EA continuetur, donec sit EZ = rectae EB iungenti puncta data E, B, denique a data AB abscindatur $A\Theta$ aequalis rectae per hactenus facta datae AZ. Quae quidem semper erit data AB minor cum sit EB, itaque EZ seu EA+AZ < EA+AB (I. 20.): eademque maior dimidia AB seu EA, cum sit EB seu EA+AZ > AB (I. 19.) seu 2EA. Demonstratio etiam absque reliquo figurae apparatu sic peragi potest:

EZ q = EB q = AB q + EA q (constr. et I. 47.)

Atqui EZ q = AZ q + EA q + 2EA × AZ (II. 4.).

Igitur AZ q + EA q + 2EA × AZ = AB q + EA q

vel AZ q + 2EA × AZ = AB q

h. e. $A\Theta$ q + BA × $A\Theta$ = AB q ob AZ = $A\Theta$; AB = 2EA (constr.)

= AB × BΘ + BA × $A\Theta$ (II. 2.)

ergo $A\Theta$ q = AB × BΘ. Cf. Pfleiderer. §§. 62. 63.

Obs. 2. Propositio haec aliis verbis docet rectangulum $B\Delta K\Theta$ construere, cuius latus maius $B\Delta$ est datae rectae AB

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι [1]) τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ· Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

1) Verbum εἶναι pro ποιεῖν, quod Peyrard. habet, pariter ex edd. Oxon. et Basil. restituimus.

aequale, et cuius area aequalis est quadrato differentiae $A\Theta$ laterum contiguorum AB, $B\Theta$ rectanguli. Cf. Pfleiderer. §. 64.

Obs. 3. Quum rectanguli $HZK\Gamma$ latus HZ sit $=ZA$ (constr.): est $\Gamma Z-HZ=\Gamma A=AB$. Praeter aream $HZK\Theta=AB^q$ (Obs. 1.) datur itaque differentia laterum eius contiguorum $=AB$. Problema igitur propositione 11. II. enunciatum per analysin Obs. 1. reducitur ad hoc; ut construatur parallelogrammum rectangulum, cuius differentia laterum contiguorum sit datae rectae AB aequalis, et cuius area aequalis sit quadrato eiusdem rectae datae AB. Quod porro per bisectionem differentiae datae ΓA laterum ΓZ et ZA rectanguli describendi reducitur (II. 5. Cor. 10.) ad determinationem semisummae EZ eorundem laterum, quae absolvitur ope propositionis (II. 6. et I. 47.) Cf. Pfleiderer. §. 65.

Obs. 4. Eodem modo solvitur problema generalius: construere rectangulum (Fig. 161.) cuius differentia laterum contiguorum sit datae rectae $A\Gamma$, area autem quadrato alius cuiuscunque rectae datae I aequalis. Sumto enim ΓZ esse latus maius rectanguli construendi: cum latus minus ab eo differre debeat longitudine $A\Gamma$: oportet illud sit $=AZ$. Rursus igitur eo redigitur problema, ut datae rectae ΓA in directum adiiciatur AZ talis, ut rectangulum sub adiecta AZ et sub composita ΓZ ex data ΓA et adiecta AZ aequale sit quadrato rectae datae I. Quod bifariam in E secando datam laterum quaesitorum rectanguli differentiam $A\Gamma$ denuo ad illorum semisummam EZ (II. 5. Cor. 10.) investigandam deducitur. Atque $EZ^q=\Gamma Z\times ZA+EA^q$ (II. 6.). Ut igitur sit rectangulum $\Gamma Z\times ZA=I^q$, debet esse $EZ=I^q+EA^q$, proinde (I. 48.) E

Ergo data recta AB secta est in Θ, ita ut rectangulum sub AB, $B\Theta$ contentum aequale sit quadrato ex θA. Quod oportebat facere.

aequalis esse debet hypotenusae trianguli rectanguli, cuius latera circa angulum rectum sint, unum quidem datae rectae I, alterum datae EA aequalia. Hinc sequens enascitur constructio; datae laterum trianguli differentiae $A\Gamma$, bifariam in puncto E divisae perpendicularis in altero eius extremo A constituatur AB= datae rectae I; tum centro E intervallo EB describatur circulus; qui ob EB > EA (I. 19.) ideoque et > $E\Gamma$ rectam ΓA utrimque productam secabit. Sint puncta Z, A hae sectiones. Erit rectangulum sub ΓZ et ZA vel sub AA et ΓA, quod requiritur. Nempe 1) tam $\Gamma Z - ZA$, quam $AA - \Gamma A = A\Gamma$. 2) Rectangulum $\Gamma Z \times ZA + EA^q = EZ^q$, et rectang. $AA \times A\Gamma + E\Gamma^q = EA^q$ (II. 6.). Quare, cum sint $E\Gamma = EA$, et $EZ = EA = EB$ (constr.) fit tam rectang. $\Gamma Z \times ZA + EA^q$, quam $AA \times A\Gamma + EA^q = EB^q = AB^q + EA^q$ (I. 47.) et hinc tam rectang. $\Gamma Z \times ZA$, quam rectang. $AA \times A\Gamma = AB^q = I^q$. Caeterum, ut facile patet, latera duorum rectangulorum situ solo, non magnitudine differunt. Eandem problematis, enunciato tantum a praecedente diversi: „ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare, excedens quadrato" constructionem tradit Rob. Simson. (Euclid. Element. Glasguae 1756. in nota ad 28. et 29. VI. sq. p. 381. sq.). Cf. Halley in scholio ad Prop. VIII. 18. Conic. Apollonii P. II. p. 153. Pfleiderer. l. c. §. 66. cf. infra ad VI. 29. Obs. 5. Quodsi in figura 160. data esse sumatur recta $A\Theta$, at invenienda denuo recta AB, ita ut $A\Theta^q = AB \times B\Theta$ (quod problema conversum erit problematis II. 11.), facile patet, etiam hoc problema esse idem, ad quod etiam II. 11. redire vidimus, nempe ut rectae datae $A\Theta$ adiiciatur alia ΘB in directum, ita ut rectangulum sub adiecta ΘB et sub AB composita ex data et adiecta aequale sit datae $A\Theta$ quadrato, vel ut describatur re-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

ctangulum $B\Theta\Delta K$, cuius laterum $B\Delta$, $B\Theta$ differentia sit data $\Delta\Theta$, et cuius area aequalis sit eiusdem rectae $\Delta\Theta$ quadrato. Solvetur itaque problema eodem modo ac II. 11. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 67. 68.

Obs. 6. Iubeatur nunc (quod est alterum problematis II. 11. conversum) datae $B\Theta$ (Fig. 162.) alia $\Theta\Delta$ in directum ita adiici, ut rectangulum sub data $B\Theta$ et sub composita $B\Delta$ ex data et adiecta sit quadrato adiectae $\Theta\Delta$ aequale; seu iubeatur rectangulum construi, cuius latus minus sit datae rectae $B\Theta$ aequale, et cuius area aequalis sit quadrato differentiae $\Delta\Theta$ laterum $B\Delta$, $B\Theta$ rectanguli. Facta supponatur continuatio desiderata rectae datae $B\Theta$ ad punctum Δ usque. Cum sit rectang. $\Delta B \times B\Theta = B\Theta_q +$ rectang. $\Delta\Theta \times \Theta B$ (II. 3.) $> B\Theta_q$, ut possit esse $\Delta\Theta_q =$ rectang. $\Delta B \times B\Theta$; debet esse $\Delta\Theta_q > B\Theta_q$, $\Delta\Theta > B\Theta$. Construatur super $\Delta\Theta$ quadratum $\Delta\Theta ZH$, et super ΔB rectangulum $\Delta BN\Pi$, cuius latus $B\Pi = B\Theta$. Recta $N\Pi$, quae ex opposito basis ΔB rectangulum $\Delta B\Pi N$ terminat, latera ΔZ, ΘH, utpote ipsi $\Delta\Theta$ aequalia, ac proinde maiora quam $B\Pi = B\Theta$ in punctis N et O ita secabit, ut sint $\Delta N = \Theta O = B\Pi$ (I. 34.) $= B\Theta$ (constr.); adeoque $ZN = HO = \Delta\Theta \times B\Theta$, atque ut rectangulum $NZHO$ sit rectang. sub $\Theta\Delta$ et HO. Porro, ut sit $\Delta\Theta_q =$ rectang. $\Delta B \times B\Theta$ h. e. constr. $\Delta\Theta ZH = \Delta B\Pi N$, ablato communi spatio $\Delta\Theta ON$, debet esse $NZHO = B\Theta O\Pi$ h. e. rectang. $\Theta H \times HO = B\Theta_q = \Theta O_q$ (constr. et demonstr.). Etiam hoc problema itaque eodem redit, quo

PROPOSITIO XII. (Fig. 163.)

In triangulis obtusangulis quadratum lateris obtusum angulum subtendentis maius est quam quadrata a lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo bis contento sub uno laterum circa obtusum angulum in quod productum perpendicularis cadit, et recta intercepta extra a perpendiculari ad angulum obtusum.

II. 11., nempe ut data ΘO in directum adiiciatur alia OH, ita ut rectangulum sub adiecta OH, et sub ΘH composita ex data et adiecta aequale sit datae ΘO quadrato, vel ut describatur rectangulum $N\Theta HO$, cuius laterum NO, OH differentia ΘO sit data $B\Theta$, et cuius area aequalis sit eiusdem rectae $B\Theta$ quadrato. Unde etiam hic sequitur similis constructio. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 69. et §. 90.

PROPOSITIO XII.

Obs. 1. Austin p. 39. sq. tres ultimas libri secundi propositiones partem constituere ait ab caeteris seiunctam, pariter ac tres ultimas primi libri, sed non aequa ac has in elementis necessariam; nec omnino, praesertim quod ad II. 12. et II. 13. attineat, valde utilem: ideoque eas successorum Euclidis imprudenti gloriosove elementa suis theoriis augendi studio tribuendas esse censet. Contra quae Pfleiderer. l. c. Pars III. §. 193. quoad II. 12. et II. 13. monet, praeter nexum argumenti harum propositionum cum I. 47. pronamque ipsarum ex hac et II. 4. II. 7. consequentiam, et ad plures applicationes insignem usum (quarum exempla et ipse subiungit) re ipsa XII. propositionis 17. demonstrationem priorem supponere, et Datorum propositiones 64. et 65. (in textu graeco Claudii Hardy Paris. 1625. et Dav. Gregorii) vel 74. 75. in versionibus Rob. Simson. et Schwab. illis uti.

Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Α σημεῖον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ

Obs. 2. Perpendiculum BA cadere, ut in enunciato propositionis sumitur ad partes anguli BAA, qui deinceps est angulo obtuso $BAΓ$, patet ex I. 17. Cor. 5. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 191.

Obs. 3. Caeterum quodcunque laterum angulum obtusum comprehendentium producatur, ut in illud perpendiculum ex opposito trianguli vertice demittatur, sive illud (Fig. 164.) BA, sive $ΓA$ fuerit, rectangulum inter illud latus, et rectam interceptam extra ad perpendiculum usque, utrimque eiusdem magnitudinis erit, nempe $ΓA \times AA = BA \times AE$, quod vel ex ipsa propositione II. 12. patet (Gilbert. l. c. p. 192.) Pfleiderer. §. 198. vel ex l. 41. Cor. 4. consequitur, vel immediate sic adstruetur. Est $BA^q + ΓA^q = BE^q + ΓE^q$, quia utraque summa $= BΓ^q$ (I. 47.).

Proinde ob $ΓA^q = ΓA^q + AA^q + 2ΓA \times AA$ (II. 4.)

et $BE^q = BA^q + AE^q + 2BA \times AE$ (II. 4.)

est $BA^q + ΓA^q + AA^q + 2ΓA \times AA$

$= ΓE^q + BA^q + AE^q + 2BA \times AE$.

Sit triangulum obtusangulum $AB\Gamma$ habens angulum $BA\Gamma$ obtusum, et ducatur a B puncto ad ΓA productam perpendicularis $B\Delta$ (I. 12.); dico quadratum ex $B\Gamma$ maius esse quam quadrata ex BA, $A\Gamma$, rectangulo bis sub ΓA, $A\Delta$ contento.

Quoniam enim recta $\Gamma\Delta$ secatur utcunque in puncto A; quadratum ex $\Gamma\Delta$ aequale est quadratis ex ΓA, $A\Delta$, et rectangulo bis sub ΓA, $A\Delta$ contento (II. 4.). Commune addatur quadratum ex ΔB; quadrata igitur ex $\Gamma\Delta$, ΔB aequalia sunt quadratis ex ΓA, $A\Delta$, ΔB et rectangulo bis sub ΓA, ΔA contento. Sed quadratis ex $\Gamma\Delta$, ΔB aequale est quadratum ex ΓB (I. 47.), rectus enim est ad Δ angulus; quadratis vero ex $A\Delta$, ΔB aequale est quadratum ex AB (I. 47.);

Atqui $B\Delta^q + A\Delta^q = BA^q$, et $\Gamma B^q + AB^q = \Gamma A^q$ (I. 47.) demtis igitur utrimque aequalibus, manet $2\Gamma A \times A\Delta = 2BA \times AB$, et $\Gamma A \times A\Delta = BA \times AB$. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 199.

Obs. 4. Alii alias propositionis II. 12. demonstrationes dederunt, quo pertinet Coëtsius; vid. Pfleiderer. §§. 195. 196. Ea, quam Gregorius a St. Vincentio habet (Pfleiderer. l. c. §. 200. Gilbert. p. 296.) praemissa ea propositione, quam Obs. 3. habuimus, quam vero ille a propositionibus 31. 35. 36. libri III. repetit, rem eodem fere modo, eademque delineatione demonstrat, quae apud Euclidem in I. 47. adhibetur, nisi quod duo latera opposita quadratorum circa angulum obtusum producuntur, usquedum conveniant cum perpendiculo ex opposito trianguli vertice in ea demisso, et sane concinna est atque elegans. Simplicitate tamen superari videtur ab ea, quam dedit Ambrosius Rhodius Euclid. Elem. libri XIII. ed. 1661. p. 51. sq. et quam etiam habent Claud. Richardus Guarinus (Euclides adauctus et methodicus Aug. Taurin. 1671. p. 60. sq.) Euclidis Elementa Lond. 1678. p. 95. sq. et Coët-

τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆ
ΓΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, Α
τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχο
μένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνο
τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μεῖζόν ἐστι, τ
δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐ
ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴ
ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλατ-

sius, quae huc redit. In trianguli ad *A* obtusanguli (Fig. 165.) *BAΓ* latus alterutrum *ΓA* ex vertice opposito *B* demisso perpendiculo *BΔ*, quod (Obs. 2.) in latus *ΓA* productum ad partes anguli *BAΘ* deinceps positi obtuso *BAΓ* cadit), tum rectarum *BΔ*, *ΓΔ* descriptis quadratis *BΘ*, *ΓH*, atque hoc eodem modo, quo in Prop. II. 4. diviso, est $BΓ^q = BΔ^q + ΓΔ^q$ (I. 47.) $= BΔ^q + BZ + ΔN + ΓΔ + ΔH = BΔ^q + ΓΔ^q + ΔΔ^q + 2ΓΔ \times ΔΔ$ (II. 4.).
Atqui $BΔ^q + ΔΔ^q = BΔ^q$ (I. 47.)
itaque $BΓ^q = BΔ^q + ΔΓ^q + 2ΓΔ \times ΔΔ$. Cf. Pfleiderer. §. 197.

PROPOSITIO XIII.

Obs. 1. Propositio haec valet non tantum de triangulis acutangulis i. e. Def. I. 29. de iis, quae tres angulos acutos habent, sed de omnibus omnis generis triangulis. Quod dudum observarunt Isaacus Monachus in scholio ad hanc propositionem, Campanus, Commandinus, Peletarius, Clavius, Whiston., Robert. Simson., Austin., Pfleiderer. l. c. aliique. Nempe a) non tantum in triangulis rectangulis, et obtusangulis, quorum itaque duo reliqui anguli ad basin sunt acuti (I. 17. Cor. 1.), si e vertice anguli recti vel obtusi in oppositam basin demittatur perpendiculum, eadem prorsus demon-

ergo quadratum ex ΓB aequale est quadratis ex ΓA, AB et rectangulo bis sub ΓA, $A\Delta$ contento; quare quadratum ex ΓB maius est quam quadrata ex ΓA, AB rectangulo bis sub ΓA, $A\Delta$ contento. In obtusangulis igitur etc.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 166.)

In triangulis acutangulis quadratum lateris acutum angulum subtendentis minus est quam quadrata ex late-

arctio obtinebit, quae est apud Euclidem: verum b) quod pariter dudum monuerunt viri docti, propositio haec etiam tum locum habet, si unus angulorum ad basin rectus vel obtusus fuerit. Nempe priore casu (Fig. 167. a.) in triangulo $AB\Gamma$ ad Γ rectangulo perpendiculum ex A ad $B\Gamma$ demissum cum ipso latere $A\Gamma$: adeoque punctum A cum puncto Γ coincidit, et propositio II. 13., ex qua esse dicitur $A\Gamma^q = AB^q + B\Gamma^q - 2\Gamma B \times BA$ in hanc transit: $A\Gamma^q = AB^q + B\Gamma^q - 2\Gamma B^q$, vel ut aliter dicamus in hanc: $A\Gamma^q = AB^q - \Gamma B^q$ quod quidem patet ex I. 47. Cor. 2. Cf. Pfleiderer. §. 204. Posteriore casu (Fig. 167. b.) in triangulo $AB\Gamma$, quod angulum $A\Gamma B$ obtusum habet, perpendiculum ex A in basin $B\Gamma$ demissum cadit (I. 17. Cor. 5.) ad partes anguli acuti $A\Gamma\Delta$, qui obtuso $A\Gamma B$ deinceps est, eritque $AB^q = A\Delta^q + B\Delta^q$ (I. 47.), adeoque $AB^q + B\Gamma^q = A\Delta^q + B\Delta^q + B\Gamma^q$. At $B\Delta^q + B\Gamma^q = \Gamma\Delta^q + 2AB \times B\Gamma$ (II. 7.). Itaque $AB^q + B\Gamma^q = A\Delta^q + \Gamma\Delta^q + 2AB \times B\Gamma = A\Gamma^q + 2AB \times B\Gamma$ (I. 47.). Whiston. Demonstr. 2. Austin. p. 38. Gilbert. p. 288. sq. Idem etiam adplicatis ad hunc casum reliquis reliquorum casuum demonstrationibus consequitur. Cf. Pfleiderer. §§. 205—207.

Obs. 2. Ex iis, quae Obs. 1. dicta sunt, patet, arctioribus, quam res iubet, limitibus enunciatum propositionis

τόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

II. 13. apud Euclidem circumscriptum esse. Simul patet ex duobus postremo loco positis casibus, rectam inter alterum basis terminum, et perpendiculum interceptum nequaquam semper ἔντος intercipi, saltim si hanc vocem ad ipsum triangulum, de quo sermo est, referre velis. Suspicio itaque nascitur, non genuinum esse textum graecum propositionis II. 13., qualem nunc quidem habemus. Nec medelam illi affert, quem summis laudibus Peyrardus extollit, Codex 190., ab ipso signo a notatus. Quin vetustissimum iam esse erratum, quamvis ad ipsum elementorum auctorem haud referendum esse videatur, inde patet, quod iam Isaacus Monachus id notaverit, qui rem ita interpretatur l. c. ut statuat, hoc loco Euclidem *omnia* triangula, secus ac in Def. I. 29. appellare oxygonia, quia omnia habeant angules acutos, etsi non omnes, tamen ad minimum duos, quae tamen sententia Pfleiderero l. c. §. 210 iure parum probabilis videtur. Suspicionem textus hoc loco corrupti, eodem monente, etiam illud auget, quod in expositione eius verba: ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τὸ Β γωνίαν notante Austin. p. 37. mera fere sunt tautologia, vel potius absonam prae se ferunt determinationem (a quo tamen vitio ea liberare forte possis, si ita interpretari velis: sit triangulum acutangulum, ita nempe, ut *nominatim* angulus *B* sit acutus). Praeterea autem, ut Pflei-

terius acutum angulum continentibus rectangulo bis contento sub uno laterum circa angulum acutum in quod perpendicularis cadit, et recta intus intercepta a perpendiculari ad angulum acutum.

Sit triangulum acutangulum $AB\Gamma$, habens angulum ad B acutum, et ducatur ab A puncto ad $B\Gamma$ perpendicularis $A\Delta$ (I. 12.); dico quadratum ex $A\Gamma$ minus esse quam quadrata ex ΓB, BA, rectangulo bis sub ΓB, $B\Delta$ contento.

dem. l. c. monet, accedit, quod in propositionis 65. (75.) datorum enunciato generatim sumitur: Ἐὰν τρίγωνον ὀξεῖαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην. Expositio quidem eius adiunctam rursus habet ad triangulum acutangulum restrictionem. Sed eadem, quam magis adhuc otiosa laborat vocis ὀξεῖαν adiectione (nisi etiam hic interpretando mitigare velimus), qua propositionis II. 13. expositio, unde contra ipsius propositi tenorem translata videri potest (quamvis etiam hic codex a nullam medelam afferat). Scopus enim, quo propositiones 64. 65. (74. 75.) *datorum* tendunt, haud permittit, ut posterior ad triangula acutangula restringatur. Is quippe, ut problematibus, quibus inserviunt (cuiusmodi est in Apollonii locor. plan. vers. German. p. 439. 443.) propositiones illae reipsa sufficiant, arctior constitui nequit, quam ut trianguli cuiuslibet dato angulo obliquo, rationem trianguli ad differentiam quadrati lateris angulo dato oppositi et summae quadratorum laterum eundem angulum comprehendentium dari ostendant. Hoc autem posito, Prop. II. 13. Elementorum, qua *datorum* 65. (75.) nititur, pariter ad omnis generis triangula pertinere debet. Praeterea etiam aliae propositionis II. 13. applicationes, quarum in excursu ad II. 13. adhuc nonnullas habebimus, universum eius, omnes in Obs 1. memoratos casus complectentem, ambitum requirunt. Cf. Pfleiderer. §§. 212. 213. Quae cum ita sint,

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Δ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ΒΑ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον

variis modis viri docti propositionem hanc II. 13. generatim enunciare ac demonstrare studuerunt. Et alii quidem omissa tantum trianguli *acutanguli* mentione, reliqui propositionis 13. enunciati atque expositionis versionem ita concinnarunt, ut eo, qui Obs. 1. a. indicatur respectu in triangula rectangula et obtusangula quadrent, quo pertinent Peletarius p. 105. sq. De Chales. Cursus Mathem. Tom. I. Lugd. 1674. p. 23. Ximenes (I sei primi Elementi della geometria piana. In Venezia 1752. p. 126.). Lorenz (Euklids Elemente 3te Ausg. Halle 1809. p. 40.). Alii etiam vocem *ἔντος* expungendam et expressionem: *ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει* latius sumendam, neque ad casum intra lateris huius terminos restringendam putaverunt, ita ut etiam casum Obs. 1. b. indicatum propositio haec complecteretur. Hac ratione Tacquet. p. 67. sq. rem exprimit, qui tamen vulgarem tantum demonstrationem exhibet. Clavius, Commandinus, Rob. Simson., Austin. rem, uti Obs. 1. b. diximus, aut aliter demonstrant. Cf. Pfleiderer. §§. 211. 214., qui idem §. 216. iudicat, sufficere posse, si verba tantum *τοῖς ὀξυγωνίοις*, *ὀξυγώνιον* expungantur, dummodo demonstrationis initium (additis, quae uncis inclusa sistuntur) ad figuram textus et figuram posteriorem ad Obs. 1. a. exhibitam ita referatur: *Ἐπὶ γὰρ (ἤτοι) εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Δ (ἡ εὐθεῖα ἡ ΔΒ κατὰ τὸ Γ)*, et verba *ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντος πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ*, iisque opposita

Quoniam enim recta ΓB secta est utcunque in Δ; quadrata ex ΓB, $B\Delta$ aequalia sunt rectangulo bis sub ΓB, $B\Delta$ contento et quadrato ex $\Delta\Gamma$ (II. 7.). Commune addatur quadratum ex ΔA; ergo quadrata ex ΓB, $B\Delta$, ΔA aequalia sunt rectangulo bis sub ΓB, $B\Delta$ contento et quadratis ex $A\Delta$, $\Delta\Gamma$. Sed ipsis quidem ex $B\Delta$, ΔA aequale est quadratum ex AB (I. 47.), rectus enim est ad Δ angulus; quadratis vero ex $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ aequale est quadratum ex $A\Gamma$; quadrata igitur ex ΓB, BA aequalia sunt quadrato ex $A\Gamma$, et

propositionis 12.: ἐφ' ἣν ἐμβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, τῆς ἐπιλαμβανομένης ἔντος πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ, situm perpendiculi ac segmenti per illud abscissi diversum relate ad *angulum ipsiusque verticem*, *non ad triangulum* indicare censentur.

Obs. 3. Caeterum etiam hic pariter ac II. 12. Obs. 3. de triangulis obtusangulis dictum fuit, notari potest, in quodcunque laterum angulum acutum comprehendentium ex opposito vertice demittatur perpendiculum (Fig. 168. 169.) sive illud AB sive $B\Gamma$ fuerit, fore semper rectangulum inter illud latus et metam ab angulo acuto B inde usque ad demissum perpendiculum interceptum utrimque eiusdem magnitudinis, nempe $\Gamma B \times B\Delta = AB \times BE$, quod pariter vel ex ipsa propositione 13. ita ut Obs. 2. diximus, amplificata patet, vel ex I. 41. Cor. 4. consequitur, vel similiter ac in II. 12. ita adstruemus: Est $A\Delta^q + \Delta\Gamma^q = \Gamma E^q + \Delta E^q$, quia utraque summa $= A\Gamma^q$ (I. 47.) Proinde ob $\Gamma\Delta^q = B\Gamma^q + B\Delta^q - 2\Gamma B \times B\Delta$, et $\Delta E^q = AB^q + BE^q - 2AB \times BE$ (II. 7.)

erit $A\Delta^q + B\Gamma^q + B\Delta^q - 2\Gamma B \times B\Delta$

$= \Gamma E^q + AB^q + BE^q - 2AB \times BE$.

Atqui $A\Delta^q + B\Delta^q = AB^q$, et $\Gamma E^q + BE^q = B\Gamma^q$, itaque

$2\Gamma B \times B\Delta = 2AB \times BE$ et $\Gamma B \times B\Delta = AB \times BE$. Cf. Pfleiderer. §. 199.

Obs. 4. Similes etiam huic propositioni demonstrandae rationes adhiberi possunt, et reapse adhibitae fuerunt, ac in

ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ
ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ· καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Γ
ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔλαττόν ἐστι τ
ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΑΒ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Γ
ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνί
καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

*Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον σ
στήσασθαι.*

*Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὴ
Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.*

II. 12. Obs. 4. vidimus, e quibus pariter eam, quam prae
alios Ambrosius Rhodius dedit, simplicitate sua maxime co
mendabilem huc referemus. Nempe (Fig. 170.) in triang
ad B acutanguli ΑΒΓ latus ΒΓ, quod non minus sit utroq
reliquo, demisso perpendiculo ΑΔ (quod tum necessario in
triangulum ΑΒΓ cadet (I. 18. Cor. 3.) tum rectarum ΑΔ,
descriptis quadratis, atque hoc rursus, ut in Prop. 4. divi
denique super recta ΖΗ=ΒΔ (I. 34.) constructo quadrato Ζ
quod igitur =ΒΔq=ΒΜ (II. 4. Dem.) erit ΑΒq=ΑΔq
ΒΔq (I. 47.) =ΔΙ+ΖΟ. ΒΓq=ΝΗ+ΓΑ+ΑΗ, itaq
ΑΒq+ΒΓq=ΝΗ+ΔΙ+ΓΑ+ΑΗ+ΖΟ=ΝΗ+ΔΙ+2.Γ
quia ΑΗ=ΓΜ (I. 34.) et ΖΟ=ΔΑ (Dem.). Sed ΑΓq=Ν
+ΔΙ (I. 47.) ob ΝΗ=ΔΓq (II. 4. Dem.), ergo ΑΒq+Β
=ΑΓq+2ΓΑ
=ΑΓq+2. rectang. ΓΒ×ΒΔ, ob ΒΑ=ΒΔ (II. 4. Dem
Cf. Pfleiderer §. 197.

Obs. 5. Conversae quoque propositionum II. 12. et
13. valent, pariter ac I. 48. conversa propositionis II. 47.
monstrata fuit. Quin haec ipsa I. 48. etiam hoc loco iunct
cum reliquis inferri poterit. Nempe 1) si in triangulo aliq
quadratum unius lateris aequale fuerit summae quadratorum du
rum reliquorum laterum, angulus illi primum nominato lat

rectangulo bis sub ΓB, $B\Delta$ contento; quare solum quadratum ex $A\Gamma$ minus est quam quadrata ex ΓB, $B\Delta$ rectangulo bis sub ΓB, $B\Delta$ contento. Ergo in obtusangulis etc.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 171.)

Dato rectilineo aequale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A; oportet igitur ipsi A rectilineo aequale quadratum constituere.

oppositus rectus erit. Nam si obtusus fuerit, quadratum lateris illi oppositi maius (II. 12.) si acutus fuerit, quadratum eiusdem lateris minus (II. 13.) foret summa quadratorum duorum reliquorum laterum. 2) Si quadratum lateris alicuius maius fuerit summa quadratorum duorum reliquorum laterum, angulus ei oppositus obtusus erit. Nequit enim rectus (I. 47.) aut acutus (II. 13.) esse. Denique 3) si quadratum lateris alicuius minus fuerit summa quadratorum duorum reliquorum laterum, angulus ei oppositus acutus erit. Nequit enim rectus (I. 47.) aut obtusus (II. 12.) esse. Caeterum duo casus ultimo loco allati poterant etiam simili ratione demonstrari ac in propositione I. 48. factum est ab Euclide, quas demonstrationes dedit Clavius, et quod ultimum casum attinet, iam adhibuit Isaacus Monachus Schol. ad II. 13. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 217. 218.

Obs. 6. Triangulum scalenum igitur erit rectangulum — obtusangulum — acutangulum, prout quadratum maximi eius lateris quadratis simul reliquorum duorum laterum est aequale — aut maius — aut minus: ultimo scilicet casu maximus trianguli angulus (I. 18.) acutus erit, tantoque magis caeteri. Et triangulum aequicrurum, cuius basis utroque crurum maior est (quodsi enim singula crura basi maiora sunt, non potest

Συνίστατω γὰρ τῷ Δ εὐθυγραμμῳ ἴσον παρα
λληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἡ
ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθ
Συνίσταται γὰρ τῷ Δ εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγων
τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὔ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἐστ
Ἔστω μείζων ἡ ΒΕ [1]), καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ

1) Iure hic Rob. Simson observat, legendum esse salte
εἰ δὲ οὔ, ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Ζ, quum nihil prorsus
tersit, utrum maior an minor rectarum ΒΕ, ΕΔ producat
Noluimus tamen sine Mss. consensu aliquid mutare.

non esse acutangulum per I. 5., I. 17., I. 18., erit
ctangulum — obtusangulum — acutangulum, prout quad
tum basis duplo quadrato unius cruris est aequale — aut
maius — aut minus. Sic comparando invicem quadrata la
rum trianguli, cuius speciei sit ratione habita angulorum, e
potest: quod comparatio ipsorum laterum non praestat, n
vel omnia aequalia sint, vel duo aequalia ac singula maio
tertio. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 219. Alias adhuc observatio
et adplicationes Prop. II. 12. II. 13. vid. in excursu ad fin
huius libri.

PROPOSITIO XIV.

Obs. 1. Huic quoque problemati, pariter ac Prop.
11. praemitti potest Analysis. Nempe alterutro dati paralle
grammi rectanguli non aequilateri ΒΓΔΕ latere ΒΕ produc
donec ΒΖ=ΕΔ, ideoque rectangulum ΒΔ=ΒΕ×ΕΖ; e
recta ΒΖ puncto Ε secetur in inaequalia (hyp.); applican
propositionis II. 5. gratia, quae de rectangulo segmentor
inaequalium datae rectae praecipit, eandem ΒΖ secare et
oportet in aequalia: quo facto in puncto Η, est rectang.
×ΕΖ+ΕΗ q=ΗΖ q. Quum igitur inveniendi sit ex con
tione problematis recta aliqua Δ, cuius quadratum sit =
×ΕΖ; debet esse Δ q+ΕΗ q=ΗΖ q, vel Δ q=ΗΖ q−Ε
Invenietur autem recta Δ (ex I. 47. Cor. 10.), si rec
ΗΕ in punto Ε ad rectos angulos constituatur recta ΕΘ,

Constituatur ipsi A rectilineo aequale parallelogrammum rectangulum $B\Delta$ (I. 45.) Si igitur aequalis est BE rectae $E\Delta$, factum erit propositum; constitutum est enim ipsi A rectilineo aequale quadratum $B\Delta$ (I. Def. 30.); si autem non, una ipsarum BE, $E\Delta$ maior est. Sit maior BE, et producatur ad Z,

quod eodem redit (I. 13. Cor. 1.) si recta ΔB producatur, atque ab ea abscindatur ope circuli centro H, radio HZ descripti, segmentum $B\Theta$, eique aequalis ponatur recta A. Cf. Pfleiderer. §. 70.

Obs. 2. Pariter (Fig. 172.) proposito cuicunque parallelogrammo obliquangulo $BEIK$, utpote aequali rectangulo $BE\Delta\Gamma$ super eadem basi et inter easdem parallelas BE, ΓI (I. 35.) aequalé quadratum efficietur, lateri cuilibet BE parallelogrammi in directum adiiciendo rectam EZ aequalem distantiae $E\Delta$ lateris huius BE ab opposito KI, et reliqua perficiendo ut in constructione problematis XIV. Cf. Pfleiderer. §. 71.

Obs. 3. Quum sit $B\Theta < H\Theta$ (I. 19.) seu (constr.) $< HZ$: fit $4B\Theta < 4HZ$ seu $< 2BZ$ seu $< 2(BE+E\Delta)$, tantoque magis $< 2(BE+EI)$, ob $B\Delta < EI$ (I. 19.): h. e. perimeter quadrati ab BH minor est perimetro rectanguli $BE\Delta\Gamma$; tantoque magis minor perimetro parallelogrammi obliquanguli $BEKI$. Aequalem igitur aream quadratum sub minore perimetro quam parallelogrammum rectangulum non aequilaterum, vel parallelogrammum obliquangulum comprehendit, quod et ex II. 1. Cor. 2. facile deducitur. Cf. Pfleiderer. §§. 72. 73.

Obs. 4. Quodsi vicissim recta data BZ ita proponitur secanda, ut rectangulum sub segmentis eius aequale sit quadrato rectae datae A, seu si parallelogrammum rectangulum construi iubeatur aequale quadrato rectae datae A, et eius summa laterum contiguorum sit datae recta BZ aequalis, proinde perimeter $= 2BZ$; ut, quod requiritur, fieri possit, recta data non maior esse debet semisse

καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ Β
δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήμα
δὲ ἑνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΘΖ
καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω
ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσ
κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπ
τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τ

ΗΖ rectae secandae, seu datae laterum contiguorum rectangu
describendi summae ΒΖ: quia rectangulo sub segmentis aequa
libus ΒΗ, ΗΖ, seu quadrato semissis rectae secandae ΒΖ
maius spatium segmentis datae ΒΖ, seu parallelogrammo r
ctangulo, cuius perimeter =2ΒΖ, comprehendi nequit (I
5. Cor. 1.). Tum vero, si Δ=1/2ΒΖ, rectam ΒΖ bifariam i
Η secando, factum erit, quod iubetur: erit enim rectangu
ΒΗ×ΗΖ=ΗΖq=Δq (I. 46. Cor.) cum sit ΗΖ=Δ (hyp.
Sed si Δ<ΗΖ, ideoque Δq<ΗΖq (I. 46. Cor.) seu < rec
ΒΗ×ΗΖ; ponatur in puncto Ε facta rectae ΒΖ sectio, q
obtineatur Δq= rectang. ΒΕ×ΕΖ. Cum sit rectang. ΒΕ
ΕΖ+ΗΕq=ΗΖq (II. 5.): debebit esse Δq+ΗΕqΘ=ΗΖ
proinde (I. 47.) distantia ΗΕ puncti sectionis Ε quaesiti
puncto bisectionis Η rectae datae ΒΖ seu (II. 5. Cor. 4.) s
midifferentia laterum ΒΕ, ΕΖ rectanguli construendi, aequ
bitur lateri circa angulum rectum trianguli rectangul
cuius hypotenusa datae ΗΖ atque alterum latus circa a
gulum rectum datae Δ est aequale. Cf. Pfleiderer. §. 7
Efficietur autem illud (Fig. 173. 174.), rectae datae Β
bifariam in puncto Η sectae, in eodem puncto Η co
stituendo normalem ΗΣ= datae rectae Δ: tum vel
(Fig. 173.) perpendiculum ΣΟ, ad rectam ΗΣ in puncto
ductum, seu per punctum Σ actam rectae ΒΖ parallelam Π
circulo centro Η, intervallo ΗΖ descripto, in puncto Θ
cando; quo facto erit ΗΣΘ triangulum rectangulum, cui
hypotenusa ΗΘ=ΗΖ, atque cathetus ΗΣ=Δ: denique

t ponatur, ipsi $EΔ$ aequalis EZ (I. 3.), et secetur BZ bifariam in H (I. 10.), et centro quidem H, intervallo vero una ipsarum HB, HZ semicirculus describatur $BΘZ$, et producatur $ΔE$ in $Θ$, et iungatur $HΘ$.

Quoniam igitur BZ secta est in aequalia quidem in H, in inaequalia vero in E; ergo rectangulum sub BE, EZ contentum cum quadrato ex HE aequale

recta BZ abscindendo $HE=ΣΘ$ per rectam $ΘE$ ex puncto $Θ$ ad BZ demissam perpendicularem (I. 34.). Vel 2) (Fig. 174.) centro $Σ$ intervallo $ΣP=HZ$ describendo circulum, qui datam BZ in puncto E secet; quo immediate fit HE cathetus trianguli $ΣHE$, cuius hypothenusa $ΣE=HZ$, atque alter cathetus $ΣH=Δ$. Priore casu, ob $HΣ=Δ<HZ$ vel HT (supp. et constr.) punctum $Σ$ cadit intra circulum centro H, intervallo HZ, seu circa diametrum BZ descriptum, ideoque $ΠΩ$ rectae BZ parallela circulum hunc in duobus punctis $Θ$, $Π$ ad easdem rectae BZ partes secat; ex quibus in hanc BZ demissa perpendicula, seu ductae rectae $HΣ$ parallelae $ΘE$, $ΠΩ$ datam rectam BZ in punctis E, $Ω$ ita secant, ut sint rectangula $BE \times EZ=BΩ \times ΩZ=Δ^q$. Nempe tam $BE \times EZ+HE^q=HZ^q$, quam $BΩ \times ΩZ+HΩ^q=HB^q$ (II. 5.). Unde porro, ob $HZ^q=HΘ^q=HE^q+EΘ^q$, et $HB^q=HΠ^q=HΩ^q+ΠΩ^q$ (constr. et I. 47.) sequitur: $BE \times EZ+HE^q=HE^q+EΘ^q$, et $BΩ \times ΩZ+HΩ^q=HΩ^q+ΠΩ^q$ et hinc $BE \times EZ=EΘ^q$, $BΩ \times ΩZ=ΠΩ^q$. Cum itaque sit $ΘE=ΠΩ=HΣ$ (I. 34.) $=Δ$; fiunt rectangula $BE \times EZ$, $BΩ \times ΩZ=Δ^q$. Altero casu (Fig. 174.) ob $ΣH=Δ<HZ$ seu $ΣP$ (supp. et constr.), punctum H rectae BZ iacet intra circulum centro $Σ$ intervallo $ΣP$ descriptum; quem igitur in duobus punctis E, $Ω$ secat haec recta BZ, idque, ob $HE<ΣE$ seu HZ, $HΩ<ΣΩ$ sive HB (I. 19. et constr.) sic, ut puncta E, $Ω$ inter puncta H, Z; et H, B cadant. Atque ita rursus eodem modo, quo ante probatur, esse $BE \times EZ=BΩ \times ΩZ=Δ^q$. Caeterum $HE=$

ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Η
τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τ
ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀ
τῆς ΗΘ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τ
ΘΕ, ΕΗ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ με
τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, Ε
Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λο

ΗΩ in triangulis rectangulis ΗΕΘ, ΗΩΠ (Fig. 173.) ΗΕ
ΩΗΣ (Fig. 174.) quorum hypotenusae et catheti alteri aequal
sunt, atque ΗΒ=ΗΖ (constr.): quare etiam sunt tam ΗΒ-
ΗΕ=ΗΖ+ΗΩ, quam ΗΒ—ΗΩ=ΗΖ—ΗΕ h. e. tam ΒΕ
ΖΩ, quam ΒΩ=ΖΕ, itaque rectangula ΒΕ×ΕΖ, ΒΩ×
situ tantum, non longitudine laterum differunt. Posteriore
constructionem solvendo problemati aequipollenti: applica
datum quadratum ad rectam datam, difficiens quadrato; s
ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulu
applicare, deficiens quadrato, adhibent Halley (Schol. in Co
Apollon. P. II. p. 153. Robert. Simson. p. 380 sq. Cf. inf
ad VI. 28. Prior constructio haud necessario requirit, ut no
malis =Λ rectae ΒΖ in puncto bisectionis Η constituatu
ideoque applicatu saepe commodior est altera quamvis co
cinniore, dum problema seorsim spectatur. Cf. Pfleidere
§. 75. Prior constructio, pariterque solutio problematis ipsi
Prop. XIV. exhibent theorema: quadratum perpendicularis,
quolibet circumferentiae circuli puncto in diametrum ducta
aequatur rectangulo sub segmentis diametri, quae ab ipsa pe
pendiculari fiunt. Quod Herigonus p. 76. propositioni II.
statim subiungit, et deinde ad propositiones 6—10. ipsa
easdemve aliter enunciatas, alio modo demonstrandas adhibe
Cf. Pfleiderer. §. 76.

Obs. 5. Cum, ducta per verticem Ι (Fig. 175. 176
trianguli ΙΒΕ, ΙΚΕ parallela lateri ipsius ΒΕ, ΚΕ, atq
huic in altero extremo erecta, et ad occursum parallelae illi
continuata normali ΕΛ, ΕΒ; tum vel perpendiculo ΕΛ, v

est quadrato ex HZ (II. 5.). Aequalis autem HZ rectae $H\Theta$ (I. Def. 15.); rectangulum igitur sub BE, EZ contentum cum quadrato ex HE aequale est quadrato ex $H\Theta$. Quadrato autem ex $H\Theta$ aequalia sunt quadrata ex ΘE, EH (I. 47.); rectangulum igitur sub BE, EZ cum quadrato ex HE aequale est quadratis ex ΘE, EH. Commune auferatur quadratum

tum KE in puncto Δ bifariam secto, triangulum aequale sit parallelogrammo rectangulo $B\Gamma\Delta E$ (I. 41. sq.) quodsi hoc aequilaterum non est; construetur quadratum aequale triangulo proposito, vel (Fig. 175.) latus BE continuando, donec sit $EZ=EA=1/2E\Delta$; vel (Fig. 176.) perpendiculum BE producendo, donec sit $EZ=E\Delta=1/2KE$, et tum (utraque Fig.) latus EH quadrati rectangulo $BE\times EZ$ aequalis iuxta Obs. 1. determinando (Campanus, Clavius). Cf. Pfleiderer. §. 77.

Obs. 6. Hinc iam etiam patet, qua ratione solvi possit problema: propositae figurae rectilineae aequale quadratum efficere. Nempe 1) triangulum rectilineo dato aequale construendo methodis variis, quibus id iuxta I. 37. fieri potest: tum huic triangulo aequale quadratum describendo iuxta Obs. 4. 2) vel singulis triangulis, in quae figura proposita per diagonales dividitur, aequalia quadrata iuxta Obs. 4. determinando; tum per I. 47. iteratamque, si figura multilatera est, eius applicationem, quadratum datis illis quadratis simul aequale construendo. Atque hanc postetiorem methodum indicant Campanus, Clavius, Peletarius, Taequet. et priore expeditiorem esse iudicant. Cf. Pfleiderer. §. 78.

Obs. 7. Austin. p. 39. sq. propositionem II. 14. nusquam a primis sex elementorum libris citari, et planam esse per VI. 13. et VI. 17. praeterea ab obiecto libri II. secedere, et in expositione constructionis vitio ab Rob. Simson. notato (vid. quae ad textum prop. huius notavimus) laborare observat, ideoque interpolatam censet. Quibus Pfleiderer. §. 79. subiungit: suspectam quoque pari iure ac X. 117. (vid. Sa-

πὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΔ ἐστὶν ἴση γὰρ ΖΕ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. Ἴσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ· τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνίσταται, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

vilii Praelect. Oxon. 1621. p. 13.) reddere posset locus, qui ponitur, tum ad calcem libri II. tum seiunctim ab Prop. 11. cuius ad Prop 6. similis ratio est, ac 14. ad quintam: nisi alia turbati propositionum ordinis exempla exsturent in elementis, v. gr. III. 25. III. 31. VI. 28. VI. 25. VI. 31. VI 32. Pariter rationes duae posteriores Austini contra plures elementorum propositiones sine dubio genuinas valiturae esset; ipsemetque priorem earum instantia trium ultimarum libri I. propositionum (quas nempe pariter ab argumento reliquarum libr. I. contentarum recedere, at prorsus necessaria esse dicit) infringit. Propositio 14. argumentum propositionibus I. 42. 44. 45. coeptum complere censeri potest; parite ac propositiones II. 12. 13. id quod in I. 47. sq. fuit inchoatum. Porro, quod ad reliquas duas Austini animadversione attinet, problematis I. 44. ideoque etiam sequentis I. 45 (quae, exclusa elementis propositione II. 14. nullibi in illis ante VI. 25. supponuntur) solutio non modo aeque plana es per VI. 14. VI. 12. ac problematis II. 14. por VI. 17. VI 13., sed magis etiam expedita ea, quae in I. 44. traditur Problema VI. 30. expresse solvitur, quamvis eius effectio ex

ex HE; reliquum igitur rectangulum sub BE, EZ contentum aequale est quadrato ex $E\Theta$. Sed rectangulum sub BE, EZ est rectangulum sub BE, $E\Delta$, aequalis enim est EZ rectae $E\Delta$; ergo $B\Delta$ parallelogrammum aequale est quadrato ex ΘE. Aequale autem est $B\Delta$ rectilineo A; rectilineum igitur A aequale est quadrato ex $E\Theta$ descripto.

Ergo dato rectilineo A aequale quadratum ex ΘE descriptum constituitur. Quod oportebat facere.

propositionibus II. 11. VI. 17. aeque ultro consequatur, ac propositio VI. 14. per eandem VI. 17. ad VI. 13. reducitur: quod et in primis quinque libri XIII. propositionibus supponitur; ipsaque propositionis VI. 30. solutione altera, ac prioris demonstratione docetur. Propositionum 28. 29. 32. 33. libri X. constructiones, concinnitatis demonstrationum gratia, immediate per VI. 13. VI. 12. in duabus prioribus et per II. 14. I. 25. in posterioribus peragi iubentur. Caeterum propositio II. 14. sub generaliori VI. 25. tanquam casus particularis comprehenditur: pariter atque eius conversum Obs. 3. sub problemate VI. 28., quod enunciatio eius ex Halleyo et Rob. Simson, ad finem Obs. 3. allata, et Lemma praemissum propositioni X. 18. indicant. Eodemque modo ad VI. 29. se habet problema ad Obs. 5. II. 11., cuius casum specialem usur II. 11. prouti etiam ex problematis VI. 30. solutione priori adparet. Denique observat Pfleiderer. l. c. §. 80. Claudium Richardum (Euclid. Elementor. libr. XIII. Antwerp. 1645.) incongrue prorsus demonstrationes propositionum II. 11. II. 14. in apagogicas transformare.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Ὅροι.

α. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσὶν ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

DEFIN. I.

Ea, quae hic enunciantur, non pro definitione habenda, aut certe, si quo sensu definitionis loco haberi possint, antequam applicentur, demonstranda esse, passim monuerunt viri docti. Et Tartalea quidem (Euclide tradotto fol. 37. a.) suppositum per se satis manifestum, seu postulatum potius quam definitionem esse pronunciat: Borelli (Euclid restit. p. 63.) Angel. de Marchettis (Euclid. reform. p. 10.) König (Elem. d'Euclide p. 98.) Playfair (Elem. of Geom. p. 374.) ex definitionum serie plane hanc propositionem expungunt, atque inter axiomata simpliciter, vel adiuncta qualicunque declaratione aut demonstratione referunt: aiii v. c. Billingsley (the Elem. of Euclide fol. 10. b.) Giordano da Bitonto (Euclide restituto Rom. 1680. p. 101.) Candalla (Euclid. Elem. fol. 19. b.) Clavius ad h. l. inter definitiones quidem retitinent, at e generatione circuli veritatem enunciati aliquatenus demonstrare tentant; Rob. Simson. (Elem. of Eucl. 2. Ed. p. 95.) omnino hanc definitionem non esse, sed theorema iudicat, in quo consentientem habet Pfleiderer. (Thes. inaug. 1782. Th. 3.) qui Thes. inaug. 1789. Th. 1—3) rem ita accuratius diiudicandam cen-

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

1. Aequales circuli sunt, quorum diametri sunt aequales, vel quorum quae ex centris aequales sunt.

set, demonstrandum quidem esse, circulorum areas et peripherias aequales esse, quorum radii aut diametri aequales sint, quod etiam facile fieri possit, re ad Ax. 8. libri I. demonstratione directa vel indirecta, priore simili ei, quae in I. 4. posteriore analoga iis, quae in III. 5. III. 6. adhibentur, reducta, errasque itaque hanc propositionem ut theorema omissam esse in elementis, eam ipsam autem iam demonstratam in nostra definitione, certe antequam ipsa applicetur, supponi, ac tum definitionem breviorem tantum denominationem, loco expressionis: *circuli, quorum diametri, vel quorum, quae ex centris, aequales sunt*, suppeditare, (quo sensu etiam circuli aequales sumuntur III. 26—29. et VI. 33.) atque ita demum absque vitio subreptionis demonstrationibus alias metuendo adhiberi posse. Atque est quidem haec demonstratio facillima. Nempe, si fig. 204. circulum centro Γ radio ΓA, et centro Z radio ZA descriptorum diametri AB, AE, adeoque etiam semidiametri $A\Gamma$, AZ aequales fuerint, applicato centro unius Γ super centrum alterius Z, recta ΓA ponatur super recta ZA, puncta quoque A, A, pariterque B, E coincident (Obs. ad I. 8. Ax.). Iam, si sumatur punctum quodcunque H in

β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον [1]).

γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

1) Cod. a. et ex eo Peyrard. addunt: ἐπὶ μηδέτερα μέρη quod quum nec necessarium, nec satis aptum, et in definitione quoque 3. non additum sit, nec in edit. Oxoniensi aut Basil. legatur, omisimus. Recipienda tamen haec verba putant De Lambre et Prony.

peripheria unius circuli, ducaturque recta ΓH, et fiat (I. 23.) angulus $EZ\Theta = B\Gamma H$, hi quoque anguli aequales, et rectae aequales ΓH, $Z\Theta$ coincident (Obs. ad I. 8. Ax.), adeoque puncta H, Θ coincident. Omnia igitur puncta utriusque peripheriae, adeoque totae peripheriae, et areae circulorum congruunt, ac proinde (I. 8. Ax.) aequales sunt. Cf. Pfleiderer. de dimens. circul. P. II. Tub. 1790. p. 4. Aliter ita: si positis iisdem ac ante, circulisque sibi eodem modo aptatis, sumere velis, punctum H non congruere cum puncto Θ in peripheria, cadet igitur vel extra vel intra circulum, centro Z radio $ZA = \Gamma A$ descriptum, adeoque erit vel $\Gamma H > Z\Theta$, vel $\Gamma H < Z\Theta$, quod utrumque fieri nequit, quum etiam ponatur $\Gamma H = Z\Theta$. Cf. Pfleiderer. l. c. Caeterum Campanus in ipsa definitione addit: maiores circuli sunt, quorum diametri sunt maiores, minores, quorum diametri minores. Quod ipsum definitioni etiam subiungunt Clavius, Orontius Trineus, Billingsley, Borellius. Atque id quidem simili ratione probari poterit. Ex conversa quoque huius propositionis valet: nempe circuli aequales diametros quoque et semidiametros invicem habent aequales; et prout quis circulus maior, minor sit altero, illius etiam diameter maior, minor erit diametro huius quod facile per indirectum demonstrabitur, et notatum est a Borellio, et, quoad circulos aequales, a Giordano da Bitonto

2. Recta circulum contingere dicitur, quae tangens circulum et producta circulum non secat.

3. Circuli contingere sese dicuntur, qui se tangentes sese non secant.

DEFIN. II.

Robert. Simson. ad definitiones libri quarti notat, quod iam hic observari meretur, Euclidem non promiscue uti vocibus ἅπτεσθαι et ἐφάπτεσθαι. Nempe, quando punctum aliquod positum est in recta, aut alia quavis linea, tum punctum illud apud geometras graecos ἅπτεσθαι tangere dicitur eam lineam: et quando recta, aut circulus circulo quoque modo occurrit, alter alterum ἅπτεσθαι dicitur. Quando vero recta et circulus occurrit circulo ita, ut ipsum non secet, dicitur ἐφάπτεσθαι, contingere circulum. Paucis tantum locis, nempe in Defin. IV. 5. et in III. 18. et III. 19. in textu graeco verbum simplex mutandum esse in compositum monet Rob. Simson. Quod ipsum etiam fieri debet in expositione propositionum III. 11. III. 12. Et reapse in Prop. III. 11. III. 12. et III. 18. Codex a Peyrardi habet verbum compositum, quo ipso confirmatur Simsonis observatio. Caeterum recta circulum, quod praemittendum erat, in puncto aliquo *secare* dicitur, si recta et circulus illud quidem punctum commune habeant, at puncta rectae, quae huic puncto communi adiacent, ex una parte puncti istius communis intra -- ex altera extra circulum posita sint. Et recta circulum *contingere* dicitur, quae circulo in aliquo puncto occurrens eum *in hoc puncto* non secet: *nusquam* enim secare, demum III. 18. coll. III. 16. probatur.

DEFIN. III.

Similiter iis, quae sub finem definitionis praecedentis diximus, addi potest: a) Si duo circuli punctum aliquod commune habeant, ea vero puncta unius circuli, quae isti puncto communi proxima sunt, ex una puncti communis parte extra

δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρ εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτ κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν.

ε. Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζ κάθετος πίπτει.

ς'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμ ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τ περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀ αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἥτις ἐστὶ βάσις τ τμήματος ἐπεζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γων ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖ ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγετ βεβηκέναι ἡ γωνία.

alterum circulum, ex altera vero eius parte intra alterum c culum posita sint; tum duo isti circuli in puncto hoc co muni se invicem secare dicuntur. b) Et duo circuli se puncto aliquo contingere dicuntur, si punctum illud commu habeant, neque *in eo* se secent i. e. si ea puncta unius c culi, quae ex utraque parte isti puncto proxima sunt, vel utraque parte extra alterum circulum, vel ex utraque pa intra alterum circulum posita sint: (*nusquam* enim seca quod hic Euclides sumit, probandum demum erit). c) quidem duo circuli *extra* se in puncto aliquo contingere cuntur, si illud quidem punctum commune habent, ea ve puncta *utriusvis* circuli, quae illi puncto proxima sunt, utraque parte posita sint *extra* alterum circulum. d) D contra circuli *intra* se in puncto aliquo contingere dicunt si illud punctum commune habeant, ea vero puncta uni circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte p

4. In circulo aequaliter distare a centro rectae dicitur, quando perpendiculares ex centro ad ipsas ductae aequales sunt.

5. Magis autem distare dicitur ea in quam maior perpendicularis incidit.

6. Segmentum circuli est figura contenta recta et circuli circumferentia.

7. Angulus autem segmenti est, qui continetur recta et circuli circumferentia.

8. Angulus autem in segmento est, quando in circumferentia segmenti sumitur aliquod punctum, et a ipso ad terminos rectae, quae est basis segmenti, coniunguntur rectae, angulus ab iunctis rectis contentus.

9. Quando autem rectae angulum continentes abscindunt aliquam circumferentiam, illi dicitur insistere angulus.

ium sint *intra* alterum circulum (adeoque ea puncta alterius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint *extra* alterum circulum). Cf. Apollonii de Tactionum quae supersunt. Gothae 1795. p. 34. 35.

DEFIN. IV.

Quas hic et in sequentibus Euclides rectas in circulo vocat, alii etiam rectas circulo inscriptas, vel chordas circuli appellare solent.

DEFIN. VI.

Conferantur, quae diximus ad Def. I. 19.

DEFIN. VII.

Hanc definitionem pariter ac propositionum III. 16. et III. 31. additamenta ad angulos semicirculi et segmentorum

ί. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

ιά. Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ά.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Διήχθω τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν

spectantia, adulterina esse, non temere quem suspicari, i Vieta pronunciavit (Opp. p. 386,) Pfleiderer. Thes. ins Tub. 1783. Th. 7. Et expungi omnino poterant ex Eleme tis, quod etiam fecit Playfair (Elem. of Geom. contain. t first 6. Books of Euclid. 1795. p. 374.), nisi variae, quib ortum dedere, disputationes historicam eorum notitiam n cessariam redderent. Plura vide in excursu ad finem hui libri.

DEFIN. XI.

Haec definitio demum post III. 21. plenius intelligetu ubi ostensum fuerit, angulos in eodem circuli segmento es inter se aequales.

PROPOSITIO I.

Obs. Rob. Simson. ad hanc propositionem monet, ess qui contra demonstrationes apagogicas, seu indirectas nim

10. Sector circuli est, quando ad centrum circuli ...s est angulus, figura contenta rectis angulum ...entibus et circumferentia ab ipsis intercepta.

11. Similia segmenta circuli sunt, quae capiunt ...les angulos; vel in quibus anguli aequales inter ...unt.

PROPOSITIO I. (Fig. 205.)

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus $AB\Gamma$; oportet igitur $AB\Gamma$ circuli centrum invenire.

Ducatur in ipso utcunque recta aliqua AB, et secetur bifariam in puncto Δ (I. 10.), et a Δ rectae AB ad rectos ducatur $\Gamma\Delta$ (I. 11.), et producatur in E, et secetur ΓE bifariam in Z (I. 10.); dico Z centrum esse circuli $AB\Gamma$.

Non enim, sed, si fieri potest, sit H, et iungantur HA, $H\Delta$, HB. Et quoniam aequalis est $A\Delta$

...ere, et quidem imperite disputent (Ramum potissimum ...ere videtur), non animadvertentes, quaedam nulla alia ...ratione demonstrari posse. Cuius rei exemplum esse putat hanc propositionem, cuius directa demonstratio afferri nequeat. Nempe praeter circuli definitionem nullum esse principium de circulo, ex quo demonstrationem directam sive indirectam conficere liceat. Ex hac itaque definitione et propositionibus ante demonstratis necesse esse demonstrationem derivare. Quum igitur non liceat assumere, punctum in constructione inventum esse centrum (hoc quippe demonstrandum demum esse) manifestum esse, punctum aliud tanquam centrum assumendum esse, et, si ex hoc assumto absurdum aliquod sequatur, tum assumtum utcunque punctum non esse centrum: atque ita patere necessitatem demonstrationis indirectae. At, quamvis in eo Rob. Simsoni facile consentiamus, nihil in

ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΗ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γὰρ τοῦ Η· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΔΒ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΔΒ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλό τι πλὴν τοῦ Ζ.

Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

demonstratione indirecta reprehendi posse, quae potius directam eo adhuc superare videtur, quod directa plerumque tantum evincat, rem aliquam ita esse, indirecta etiam rem *aliter esse non posse*, et quamvis etiam in hac propositione demonstrationem indirectam maxime convenire largiamur, (quippe eius pars prior est fere negativa, nempe: centrum circuli non esse potest nisi in recta e media basi ad angulos rectos basi erecta), id tamen Rob. Simson. non evicisse videtur, nullam esse *posse* directam huius propositionis demonstrationem. Quin collatis iis, quae I. 26. Cor. 5. et 6. dicta sunt, omnino directa nostrae propositionis demonstratio exhiberi posse videtur. Ducta nempe in circulo recta quacunque ΔB, quum rectae e centro ad A et B ductae aequales sint I. Def. 15. et 16.

rectae ΔB, communis autem ΔH, duae utique $\Delta\Delta$, ΔH duabus $H\Delta$, ΔB aequales sunt, utraque utrique, et basis $H\Delta$ basi HB est aequalis (I. Def. 15. et 16.), sunt enim ex centro H; angulus igitur $\Delta\Delta H$ angulo $H\Delta B$ aequalis est (I. 8.). Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos aequales inter se facit, rectus uterque aequalium est (I. Def. 10.); rectus igitur est $H\Delta B$. Est autem et $Z\Delta B$ rectus; aequalis igitur est $Z\Delta B$ angulo $H\Delta B$, maior minori, quod fieri non potest (I. Ax. 9.). Igitur H non est centrum circuli $AB\Gamma$. Similiter autem ostendemus, neque aliud quoddam praeter Z.

Ergo punctum Z est centrum $AB\Gamma$ circuli. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Ex hoc evidens est, si in circulo recta quaedam rectam quandam bifariam et ad rectos secet, in secante esse centrum circuli.

triangulum his rectis et basi AB contentum aequicrurum, adeoque eius vertex i. e. centrum circuli necessario erit in recta $E\Delta\Gamma$, quae e media basi ad angulos rectos basi erigitur (I. 26. Cor. 6.). Quae cum circulo necessario occurrere debeat in duobus saltim punctis (I. Ax. 13.) occurrat ei in punctis E, Γ: et quum centrum circuli ab his punctis aequaliter abesse debeat (I. Def. 15. et 16.) situm illud erit necessario in media $E\Gamma$. (Hoc ipsum, nempe centrum circuli (postquam demonstratum fuit esse illud in recta $E\Gamma$) esse debere in media $E\Gamma$, in demonstratione textus graeci supponitur magis quam ostenditur. Expresse tamen id addidit Campanus, Coëtsius, Boermannus, aliique.) Si tamen quis acrius insistere, et contendere velit, ita τὸ indirectum demonstrationis reiectum tan-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ ΑΕΒ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΑΒΕ. Ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. Ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς

tum esse ad I. 26. Cor. 6. nolim equidem pertinacius disputare, quamvis certum sit, *immediatam* certe *nostrae* propositionis demonstrationem esse directam. Poterat etiam res sine I. 26. Cor. 6. ita absolvi. Quum triangula, quae efficiuntur, si e centro circuli ducantur rectae ad duo quaecunque puncta *A*, *B* in circulo, et ad punctum *Δ*, quod ductam *AB* bisecat, sint aequalia, et nominatim angulos ad *Δ* habeant aequales (I. 8.), uterque angulorum ad *Δ*, i. e. angulorum, quem recta ex centro ad *Δ* ducta cum *AB* efficit, rectus erit (I. 13.), vel centrum circuli necessario positum erit, in recta per *Δ* perpendiculariter ad *AB* ducta: unde reliqua ut supra consequentur. Cf. Thom. Simpson. Elem. of Geom. Lond. 1809. III.

PROPOSITIO II. (Fig. 206.)

Si in circuli circumferentia sumantur duo quaelibet puncta, recta haec puncta coniungens cadet intra circulum.

Sit circulus $ABΓ$, et in circumferentia ipsius sumantur duo quaelibet puncta A, B; dico rectam a puncto A ad B ductam cadere intra circulum.

Non enim, sed si fieri potest, cadat extra ut AEB, et sumatur (III. 1.) centrum circuli $ABΓ$, et sit $Δ$, iungaturque $ΔA$, $ΔB$, et ducatur $ΔZE$.

Et quoniam $ΔA$ aequalis est $ΔB$, aequalis igitur et angulus $ΔAE$ angulo $ΔBE$ (I. 5.); et quoniam trianguli $ΔAE$ unum latus AEB producitur, maior igitur est angulus $ΔEB$ angulo $ΔAE$ (I. 16.). Aequalis autem $ΔAE$ angulo $ΔBE$; maior igitur est $ΔEB$ angulo $ΔBE$. Maiorem autem angulum maius latus subtendit (I. 18.); maior igitur est $ΔB$ recta $ΔE$. Aequalis autem $ΔB$ rectae $ΔZ$ (I. Def. 15.);

Prop. 2. Cor. Siquis autem dicat, hanc demonstrationem analyticam potius esse, quam syntheticam, contra monuerim, quum centrum in quovis circulo esse debere, ex ipsa circuli definitione pateat, et analysis iam ostenderit, illud nuspiam esse posse, quam in perpendiculo ex $Δ$ ad AB erecto, synthesin, quae ex hac analysi immediate fluit, et nihil sumit, quod non ante probatum fuerit fieri posse, hoc casu nova *ulteriore* demonstratione haud egere.

Praeter Cor. 1. in ipsis elementis exhibitum, addi adhuc potest hoc Cor. 2. In circulo non nisi unum centrum esse potest. Si enim praeter centrum Z fuerit aliud H, erit $HΔ$ pariter ac $ZΔ$ ad AB perpendicularis, quod fieri nequit I. 11.

ΔΕ, η ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ὑπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα πεσεῖται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ δυσὶν ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΖΒ ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΒΖΕ. Ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα τὴν ΑΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Cor. 2. sin autem in ipsa ΕΓ praeter Z aliud punctum centrum esse posse statueris, recta ΕΓ in duobus punctis bisecabitur, quod fieri nequit I. Ax. 7. et 9.

PROPOSITIO II.

Obs. Generalius haec propositio ita exprimi et directe

maior igitur est ΔZ recta ΔE, minor maiore, quod fieri nequit. Itaque recta ab A ad B ducta non cadet extra circulum. Similiter ostendemus, neque in ipsam circumferentiam cadere; intus igitur cadet. Si igitur circuli etc.

PROPOSITIO III. (Fig. 208.)

Si in circulo recta aliqua per centrum ducta rectam aliquam non per centrum ductam bifariam secet, et ad angulos rectos ipsam secat; et si eam ad angulos rectos secet, et bifariam ipsam secat.

Sit circulus $AB\Gamma$, et in ipso recta aliqua $\Gamma\Delta$ per centrum ducta, rectam aliquam AB non per centrum ductam bifariam secet in puncto Z; dico et ad angulos rectos ipsam secare.

Sumatur enim centrum circuli $AB\Gamma$, et sit E, et iungantur EA, EB.

Et quoniam AZ aequalis est ZB, communis autem ZE, duae utique duabus aequales sunt, et basis EA basi EB aequalis; angulus igitur AZE angulo EZB aequalis est (I. 8.). Quando autem recta super rectam insistens angulos deinceps aequales inter se facit, rectus uterque aequalium angulorum est (I. Def. 10.); rectus igitur est uterque angulorum AZE, BZE. Ergo $\Gamma\Delta$ per centrum ducta rectam AB non per centrum ductam bifariam secans, et ad angulos rectos ipsam secat.

demonstrari poterit: si recta aliqua per duo puncta A, B fig. 207. in circuli circumferentia posita transeat, omnia huius rectae puncta inter A et B posita intra circulum: omnia autem puncta in recta producta sumta extra circulum erunt. Sit enim E punctum huius rectae quodcunque inter A et B, et

Ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτ
λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτ' ἔστιν, ὅτι ἴ
ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστ
ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΖ
ὑπὸ ΕΒΖ. Ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ ὀρθ
τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΑ
ΕΖΒ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, κ
μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τ
ΕΖ, ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· κ
τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσ
ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλ
καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλα
μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλα
δίχα.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖ
αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖο
μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσι
ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὥστ
ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ

occurrat ΔΕ circulo in puncto Η, ductisque e centro Δ rect
ΔΑ, ΔΒ, ΔΕ erunt ΔΑ, ΔΒ aequales (I. Def. 15.) adeoqu
ΔΑΒ=ΔΒΑ (I. 5.). At ΔΕΑ>ΔΒΑ (I. 16.). Itaque etia
ΔΕΑ>ΔΑΒ, adeoque ΔΑ>ΔΕ (I. 18.). Et quum ΔΑ=Δ
(I. Def. 15.), erit etiam ΔΗ>ΔΕ, adeoque Ε intra circu
lum. Eodem modo si sumatur in recta ΑΒ producta punctu
quodcunque Ζ, et ducatur recta ΔΖ, quae circulo occurrat i
Θ, erit ang. ΔΖΒ<ΔΒΑ (I. 16.) i. e. <ΔΑΖ, adeoque (

Quodsi autem $\Gamma\Delta$ rectam AB ad angulos rectos secet; dico et bifariam ipsam secare, hoc est, aequalem esse AZ rectae ZB.

Iisdem enim constructis, quoniam aequalis est EA rectae EB (I. Def. 15.), aequalis est et angulus EAZ angulo EBZ (I. 5.). Est autem et angulus rectus AZE recto BZE aequalis; duo igitur triangula sunt EAZ, EZB duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus uni lateri aequale, commune ipsis EZ, subtendens unum aequalium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt (I. 26.); aequalis igitur est AZ ipsi ZB. Si igitur in circulo etc.

PROPOSITIO IV. (Fig. 210.)

Si in circulo duae rectae sese secent, non per centrum ductae, sese non secabunt bifariam.

Sit circulus $AB\Gamma\Delta$, et in ipso duae rectae $A\Gamma$, $B\Delta$ sese secent in E puncto, non per centrum ductae, dico eas sese non secare bifariam.

Si enim fieri potest, sese secent bifariam, ita ut AE quidem aequalis sit $E\Gamma$, et BE rectae $E\Delta$; et

18.) $\Delta A < \Delta Z$, vel $\Delta\Theta < \Delta Z$, ac proinde punctum Z extra circulum. Cf. Clavius ad h. l. Quodsi recta per centrum transeat, res per se patet.

Cor. 1. Recta circulum in pluribus quam duobus punctis secare, vel generalius plura quam duo puncta cum circulo communia habere nequit: per tria itaque puncta in eadem recta posita circulus non potest transire, aut describi. Cf. I. 16. Cor.

καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΑ. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΑ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΑ τῇ ὑπὸ ΖΕΒ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΗ ὡς ἔτυχεν.

Cor. 2. Circuli circumferentia est linea curva, i. e. ne minima quidem eius pars recta est.

Cor. 3. Recta, quae per punctum aliquod intra circulum ducitur, si opus est producta, circulum necessario in duóbus punctis (I. Ax. 13.) nec pluribus secabit. (Haec quoque Corollaria e schedis Pfleidereri.)

PROPOSITIO III.

Obs. Haec propositio est conversa III. 1. Cor. 1. idemque pronunciat, quod I. 26. Cor. 1. et 2.

Cor. Si duo circuli (Fig. 209.) ex eodem centro *A* de-

sumatur centrum $\Delta B\Gamma\Delta$ circuli (III. 1.), et sit Z, et jungatur ZE.

Quoniam igitur recta aliqua ZE per centrum rectam aliquam $A\Gamma$ non per centrum ductam bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secabit (III. 3.); rectus igitur est ZEA. Rursus, quoniam recta aliqua ZB rectam aliquam $B\Delta$ non per centrum ductam bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secat (III. 3.); rectus igitur est ZEB. Ostensus est autem et ZEA rectus; aequalis igitur ZEA angulo ZEB, minor maiori, quod fieri nequit. $A\Gamma$, $B\Delta$ igitur sese non secant bifariam. Si igitur in circulo etc.

PROPOSITIO V. (Fig. 211.)

Si duo circuli sese secent, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta H$ sese secent in punctis B, Γ; dico non esse ipsorum idem centrum.

Si enim fieri potest, sit E, et iungatur $E\Gamma$, et ducatur EZH utcunque.

scipti sint, et recta aliqua $B\Gamma$ interiorem circulum in punctis $B\Gamma$, adeoque (III. 2. Cor. 3.) producta etiam exteriorem circulum in duobus punctis Δ, E secet, erunt eius segmenta $B\Delta$, ΓE inter utrumque circulum intercepta aequalia. Quodsi ΔE per centrum utriusque circuli transeat, adeoque ΔE diameter unius, $B\Gamma$ alterius circuli sit, patet, ob $\Delta A = AE$, et $BA = A\Gamma$ (I. Def. 15.), esse etiam $\Delta A - BA = AE - A\Gamma$ (I. Ax. 3.) i. e. $\Delta B = \Gamma E$. Sin autem ΔE non per centrum transeat, demittatur ex centro A in $B\Gamma$ perpendiculum AZ (I. 12.), eritque ex nostra propositione $\Delta Z = EZ$, et $BZ = \Gamma Z$, adeoque $\Delta Z - BZ = EZ - \Gamma Z$ (I. Ax. 3.) i. e. $\Delta B = E\Gamma$. Clavius ad h. l. Gilbert. p. 115.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶ ἡ ΓΕ τῇ ΕΗ. Ἐδείχθη δὲ ἡ ΕΓ καὶ τῇ ΕΖ ἴσ καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ε ση μεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΗ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ΖΕΒ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΒΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ΖΓ τῇ ΖΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ζ σημεῖον κέν- τρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

PROPOSITIO IV.

Obs. Haec propositio ita intelligenda est: si non utraque per centrum transeat, nec utraque ab altera bisecabitur. Cf. Pfleiderer.

PROPOSITIO VI.

Obs. Demonstratio huius propositionis tacite sumere vi-

Et quoniam punctum E centrum est circuli $AB\Gamma$, $E\Gamma$ aequalis est EZ (I. Def. 15.). Rursus quoniam punctum E centrum est circuli $\Gamma\Delta H$, ΓE aequalis est EH (I. Def. 15.). Ostensa est autem et $E\Gamma$ aequalis EZ; et ZE igitur aequalis est EH, minor maiori, quod fieri nequit. Punctum igitur E non est centrum circulorum $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta H$. Si igitur duo etc.

PROPOSITIO VI. (Fig. 212.)

Si duo circuli sese intra contingant, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$ se contingant in puncto Γ; dico non esse ipsorum idem centrum.

Si enim fieri potest, sit Z, et iungatur $Z\Gamma$, et ducatur utcumque ZEB.

Quoniam igitur punctum Z centrum est circuli $AB\Gamma$, aequalis est $Z\Gamma$ rectae BZ (I. Def. 15.). Rursus, quoniam punctum Z centrum est circuli $\Gamma\Delta E$, aequalis est $Z\Gamma$ rectae ZE (I. Def. 15.). Ostensa est autem et $Z\Gamma$ ipsi ZB aequalis; et ZE igitur rectae ZB est aequalis, minor maiori, quod fieri nequit. Punctum igitur Z non est centrum circulorum $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$. Si igitur duo etc.

detur, puncta E et B non posse coincidere, vel circulos se invicem in Γ intus contingentes in nullo alio puncto convenire posse. Quod quamvis verissimum sit, tamen ab Euclide infra demum III. 13. demonstratum est. Utraque autem propositio III. 5. et III. 6. iunctim et generalius ita demonstrari posse videntur: si duo circuli ex eodem centro descripti sunt, nullum punctum inter se commune habebunt. Quodsi enim punctum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου[1]) ληφθῇ τι σημεῖον ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες· μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ΕΒ, ΕΖ, ἄρα τῆς ΒΖ μείζονές εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ, αἱ ἄρα ΒΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΖ· μείζων ἄρα ἡ ΑΖ τῆς ΒΖ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ΖΕ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΕΖ

1) Verba: ἐπὶ τῆς διαμέτρου, nisi otiosa iudicare velis, nihil aliud significare possunt, quam ἐντὸς τοῦ κύκλου. Quodvis nempe punctum, quod in *ipsa* diametro haud saltim in puncto eius extremo situm est, est etiam intra circulum et vice versa.

aliquod ipsis commune sit, punctum istud in utroque circulo a centro communi aequaliter distabit. At vero omnia puncta

PROPOSITIO VII. (Fig. 213.)

Si in diametro circuli sumatur aliquod punctum, quod non sit centrum circuli, atque ab eo in circulum cadant rectae quaedam, maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; reliquarum autem, semper propinquior ei, quae per centrum remotiore maior est; binaeque tantum aequales ab eodem puncto cadent in circulum ex utraque parte minimae.

Sit circulus $AB\Gamma\Delta$, diameter autem ipsius sit $A\Delta$, et in ipsa $A\Delta$ sumatur aliquod punctum Z, quod non sit centrum circuli, centrum autem circuli sit E, et a Z in $AB\Gamma\Delta$ circulum cadant rectae quaedam ZB, $Z\Gamma$, ZH; dico maximam quidem esse ZA, minimam vero $Z\Delta$; reliquarum autem ZB quidem maiorem quam $Z\Gamma$; et $Z\Gamma$ quam ZH.

Iungantur enim BE, ΓE, HE.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt (I. 20.) erunt EB, EZ maiores, quam BZ. Est autem AE aequalis BE (I. Def. 15.); ergo BE, EZ aequales sunt ipsi AZ; maior igitur est AZ quam BZ. Rursus, quoniam BE aequalis est ΓE, communis autem ZE, duae BE; EZ duabus ΓE, EZ aequales sunt. Sed et angulus BEZ angulo ΓEZ

utriusque circuli a centro aequaliter distant ac punctum illud commune (I. Def. 15.). Quare omnia puncta communia erunt utrique circulo, neque iam duo, sed unus circulus descriptus erit, quod est contra hypothesin. Hinc consequitur, si duo circuli se invicem secent, vel contingant, vel, ut generalius enunciemus, punctum aliquod commune habeant, ipsorum idem centrum non esse. (Apollonii de Taction. quae super-

μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΗΖ μείζων ἐστίν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΕΔ· αἱ ἄρα ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσιν. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ λοιπῆς τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· μείζων δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόνον ἴσαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε, τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστίν. Λέγω δὴ ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ· καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΘΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἢ καὶ οὕτως. Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, καὶ βάσις ἡ

sunt. Gothae 1795. Lemm. A. p. 39.) Austin. observat, propositionem III. 6. manifesto etiam locum habere, quum duo circuli se extra contingant, neque itaque restringendam fuisse ad eum casum, quo se intus contingant, et deinde Prop. 5. et 6. una demonstratione comprehendit. Quod tamen observationem illam attinet, iam Clavius monuit, Euclidem proposuisse

maior; basis igitur BZ basi ΓZ maior est (I. 24.). Ex eadem ratione et ΓZ maior est quam HZ.

Rursus quoniam HZ, ZE maiores sunt quam EH, aequalis autem EH ipsi $E\Delta$; erunt HZ, ZE maiores quam $E\Delta$. Communis auferatur EZ; reliqua igitur HZ reliqua $Z\Delta$ maior est. Maxima igitur ZA, minima vero $Z\Delta$; maior autem ZB quam $Z\Gamma$, et $Z\Gamma$ quam ZH.

Dico et a puncto Z duas tantum aequales cadere in circulum $AB\Gamma\Delta$, ex utraque parte minimae $Z\Delta$. Constituatur enim (I. 23.) ad rectam EZ, et ad punctum in ea E, angulo HEZ aequalis $ZE\Theta$, et iungatur $Z\Theta$. Quoniam igitur HE aequalis est $E\Theta$, communis autem EZ, duae HE, EZ duabus ΘE, EZ aequales sunt; et angulus HEZ angulo ΘEZ aequalis; basis igitur ZH basi $Z\Theta$ aequalis est (I. 4.). Dico autem ipsi ZH aliam aequalem non cadere in circulum a puncto Z. Si enim fieri potest, cadat ZK. Et quoniam ZK aequalis est ZH, sed et $Z\Theta$ ipsi ZH; et ZK igitur ipsi ΘZ est aequalis, videlicet propinquior ei quae per centrum remotiori, quod fieri nequit.

Vel et hoc modo. Iungatur EK. Et quoniam HE aequalis est EK, communis autem EZ, et basis ZH

hoc theorema de circulis duntaxat intus se contingentibus, quoniam circulorum extra se contingentium idem centrum esse non posse manifestum sit.

PROPOSITIO VII.

Obs. Duas, ex utraque parte minimae, aequales esse, Euclides ait, eas nempe, quae aequales angulos efficiunt cum

ΖΗ βάσει τῇ ΖΚ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΖΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἡ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον [1]) αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν

1) Verba: πρὸς τὸν κύκλον, quas Peyrard. cum Cod. a. omittit, ex edd. Oxon. et Basil. restituimus.

minima. Nempe in △△ ΕΖΘ, ΕΖΗ est (I. 14.) angulus ΕΖΘ=ΕΖΗ, adeoque et ΔΖΘ=ΔΖΗ (I. 13.). Caeterum ex hac etiam propositione consequitur, quod iam III. 1. Cor. 2. deduximus, circulum non nisi unum centrum habere.

basi *ZK* aequalis; angulus igitur *HEZ* angulo *KEZ* aequalis est (I. 8.). Sed *HEZ* angulo *ZEΘ* est aequalis; et *ZEΘ* igitur angulo *KEZ* est aequalis, minor maiori, quod fieri non potest. Quare a puncto *Z* non cadet alia recta in circulum aequalis ipsi *HZ*; una igitur sola. Si igitur circuli etc.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 214.)

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ab ipso autem puncto ad circulum ducantur rectae quaedam, quarum una per centrum, reliquae autem utcunque; earum quidem, quae ad concavam circumferentiam cadunt, rectarum maxima est quae per centrum; reliquarum autem, semper propinquior ei quae per centrum remotiore maior erit; earum vero, quae in in convexam circumferentiam cadunt, rectarum, minima est quae inter punctum et diametrum; reliquarum autem, semper propinquior minimae remotiore est minor. Binae autem tantum aequales a puncto cadent in circulum, ex utraque parte minimae.

Sit circulus *ABΓ*, et extra ipsum sumatur punctum aliquod *Δ*, et ab eo ducantur ad circulum rectae quaedam *ΔA*, *ΔE*, *ΔZ*, *ΔΓ*, sit autem *ΔA* per centrum; dico earum quidem, quae in *AEZΓ* conca-

Cor. Nullum itaque intra circulum punctum est, praeter centrum, a quo plures, quam binae rectae aequales ad circumferentiam circuli duci possunt.

PROPOSITIO VIII.

Obs. 1. Quaenam circumferentiae pars concava, quaenam convexa sit, hic ut vulgo notum supponitur, et definitus

πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶ
εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ
ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερο
μείζων ἔσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΙ
τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προς
πιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξ
τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· ἀεὶ δὲ
ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερο
ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, κα
ἔστω τὸ Μ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΙ
ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προς
κείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ, ΜΔ
Αἱ δὲ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ΑΔ
ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστίν. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν
ΕΜ τῇ ΖΜ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, Μ
ἄρα ταῖς ΖΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜ
γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστίν. Βάσις ἄρα
ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δεί
ζομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστί· μεγίστ
μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δ
ΔΖ τῆς ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν
ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῇ
ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε ταὶ ἡ ΔΗ τῆς ΔΚ ἐλάσσω
ἐστὶν, ἐλαχίστη ἄρα ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου το
ΜΛΔ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ, δύο εὐθεῖα
ἐντὸς συνεστάθησαν, αἱ ΜΚ, ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ

utriusque terminus demum post III. 17. exhiberi potest. Ca
terum omnis mentio concavae aut convexae circumferenti
partis evitari poterat in hunc fere modum: Si e puncto aliqu

vam circumferentiam cadunt, rectarum maximam esse ΔA, quae per centrum; semper autem propinquior ei quae per centrum remotiore maior erit, nempe ΔE maior quam ΔZ, et ΔZ quam $\Delta \Gamma$; earum autem, quae in $\Theta \Lambda KH$ convexam circumferentiam cadunt, rectarum, minima quidem ΔH, quae inter punctum Δ et diametrum AH; semper autem propinquior ipsi ΔH minimae minor est remotiore, ΔK quidem minor quam ΔA, et $\Delta \Lambda$ quam $\Delta \Theta$.

Sumatur enim centrum circuli $AB\Gamma$ (III. 1.), et sit M; et iungantur ME, MZ, $M\Gamma$, MK, $M\Lambda$, $M\Theta$.

Et quoniam aequalis est AM ipsi EM (I. Def. 15.), communis addatur $M\Delta$; ergo $A\Delta$ aequalis est ipsis EM, $M\Delta$. Sed EM, $M\Delta$ ipsa $E\Delta$ maiores sunt (I. 20.); et $A\Delta$ igitur ipsa $E\Delta$ maior est. Rursus, quoniam aequalis est EM ipsi ZM, communis addatur $M\Delta$; ergo EM, $M\Delta$ ipsis ZM, $M\Delta$ aequales sunt, et angulus $EM\Delta$ angulo $ZM\Delta$ maior est. Basis igitur $E\Delta$ basi $Z\Delta$ maior est (I. 24.). Similiter autem ostendemus, et $Z\Delta$ ipsa $\Gamma\Delta$ maiorem esse; maxima igitur est ΔA, maior vero ΔE quam ΔZ, et ΔZ quam $\Delta \Gamma$.

Et quoniam MK, $K\Delta$ maiores sunt quam $M\Delta$ (I. 20.), et MH aequalis MK, reliqua igitur $K\Delta$ reliqua $H\Delta$ maior est; quare et ΔH minor est quam ΔK; minima igitur est. Et quoniam super trianguli $M\Lambda\Delta$ uno latere $M\Delta$, duae rectae intus constituuntur; MK, $K\Delta$ igitur ipsis $M\Lambda$, $\Lambda\Delta$ minores sunt (I.

Δ extra circulum posito plures rectae in circulum ducantur, quarum una $M\Delta$ per centrum; ea, quae per centrum producta est, usquedum iterum cum circulo conveniat, nempe

ΚΔ [1]) τῶν ΜΔ, ΛΔ ἐλάττονές εἰσιν· ἴση δὲ ἡ ΜΒ τῇ ΜΛ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΛ ἐλάττων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείζομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΕ ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ; ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προςπεσοῦνται [2]) πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ τῇ ΔΗ ἐλαχίστης. Συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ, τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΔ, δυσὶ ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. Λέγω δὴ ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προςπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προςπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ

1) Pro: αἱ ἄρα ΜΚ, ΚΔ Peyrard. e Cod. a habet tantum ἄρα. Nos ea verba ex edd. Oxon. et Basil. restituimus, et etiam Peyrard. in versione latina et gallica habet.

2) Lectio haec προςπεσοῦνται, quam e Cod. a habet Peyrardus, praeferenda omnino videtur alteri συμπεσοῦνται, quam habent edd. Oxon. et Basil.

ΔΛ, erit omnium maxima, ea autem eius pars ΔΗ, quae a punctum Η inter Δ et centrum intermedium ducitur, omnium minima; reliquarum autem semper ea maior erit, ad cuius intersectionem cum circulo recta e centro Μ ducta angulum cum recta ΜΔ maiorem efficit, quam ea, ad cuius intersectionis punctum recta e centro ducta minorem cum ΜΔ angulum efficit, et ad utrasque rectae ΜΔ partes binae tantum aequales erunt.

Cor. Neque extra circulum igitur ullum punctum et

21.); aequalis autem MK ipsi $M\Delta$; reliqua igitur ΔK reliqua $\Delta\Lambda$ minor est. Similiter autem ostendemus et $\Delta\Lambda$ minorem esse quam $\Delta\Theta$; minima igitur est ΔH, minor vero ΔK quam $\Delta\Lambda$, et $\Delta\Lambda$ quam $\Delta\Theta$.

Dico et duas tantum aequales a puncto Δ cadere in circulum, ex utraque parte ipsius ΔH minimae. Constituatur ad $M\Delta$ rectam, et ad punctum in ea M, ipsi $KM\Delta$ angulo aequalis angulus ΔMB (I. 23.), et iungatur ΔB. Et quoniam aequalis est MK ipsi MB, communis autem $M\Delta$, duae KM, $M\Delta$ duabus BM, $M\Delta$ aequales sunt, utraque utrique, et angulus $KM\Delta$ angulo $BM\Delta$ aequalis; basis igitur ΔK basi ΔB aequalis est (I. 4.). Dico autem ipsi ΔK rectae aliam aequalem non cadere in circulum a puncto Δ. Si enim fieri potest, cadat, et sit ΔN. Quoniam igitur ΔK ipsi ΔN est aequalis, sed ΔK ipsi ΔB est aequalis; et ΔB igitur ipsi ΔN, propinquior minimae ΔH

a quo plures quam binae rectae aequales ad circumferentiam circuli duci possunt.

Obs. 2. Consideratis hac ratione in Prop. 7. 8. punctis, quae vel extra vel intra circulum posita sunt, necessario occurrunt etiam puncta, quae in ipsa circumferentia sita sunt. In his idem fere obtinet, quod in Prop. 8. et 7. Nempe, si e puncto aliquo in ipsa circuli circumferentia posito plures rectae in circulum ducantur, quarum una per centrum transeat, haec quidem omnium maxima erit; reliquarum autem ea, ad cuius intersectionem cum circulo ducta recta e centro maiorem angulum efficit cum ea, quae a dato puncto ad centrum ducta est, maior semper erit, quam ea, ad cuius intersectionem cum circulo ducta recta e centro minorem angulum efficit cum ea, quae a dato puncto ad centrum ducta est. Et e duabus puncti dati partibus binae tantum rectae aequales ad circulum duci possunt.

ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἐστὶν ἴση, ἡ ἔγγιο τῆς ΔΗ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερόν ἐστιν ἴση, ὅπερ ἀδι νατον ἐδείχθη.

Ἢ καὶ ἄλλως. Ἐπεζεύχθω ἡ ΜΝ. Καὶ ἐπε ἴση ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΜΝ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, καὶ βάσι ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ἀπὸ ΚΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΚΜ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΔ ἄρα τ ὑπὸ ΝΜΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπε ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸ τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκατέρ τῆς ΔΗ ἐλαχίστης προσπεσοῦνται. Ἐὰν ἄρα κύκλο καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύ ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Quod eodem modo demonstratur ac III. 8. Hanc propositionem septimae huius libri subiungit Commandinus, qui eam quoque demonstravit in commentario in propositionem octavam libri Archimedis de spiralibus, pariterque eam affert va Swinden Anfangsgründe der Meſskunde.

Cor. Nec in ipsa igitur circumferentia, adeoque generatim nusquam in eo plano, in quo circulus descriptus est praeter centrum, datur punctum, e quo plures, quam bina rectae aequales ad circulum duci possunt. Binas autem i omnibus his propositionibus dicere maluimus, quam dua quod ut Candalla monuit, sensus enunciati ita iustius expr mitur. Caeterum, quod modo de puncto in ipsa circuli ci cumferentia posito diximus, ad idem fere redit, quod in

remotiore est aequalis, quod fieri non posse ostensum est.

Vel et aliter. Iungatur MN. Quoniam aequalis est KM ipsi MN, communis autem $M\Delta$, et basis ΔK basi ΔN aequalis; angulus igitur $KM\Delta$ angulo $NM\Delta$ aequalis est (I. 8.). Sed $KM\Delta$ ipsi $BM\Delta$ est aequalis; et $BM\Delta$ igitur ipsi $NM\Delta$ est aequalis, minor maiori, quod fieri nequit. Non igitur plures quam duae aequales in circulum $AB\Gamma$ a puncto Δ ex utraque parte minimae ΔH cadent. Si igitur extra circulum etc.

PROPOSITIO IX. (Fig. 215.)

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, ab eo autem puncto in circulum cadant plures quam duae rectae aequales, sumptum punctum centrum est circuli.

III. 15. dicetur, nisi quod in III. 15. non de rectis tantum sermo est, quae ex eodem omnes puncto exeunt. Omnes tres propositiones, nempe III. 7. III. 8. eamque, quam Obs. 2. subiunximus, uno enunciato complectitur (quod facile fieri posse perspicuum est). Thom. Simpson. Elem. of Geometry Lond. 1800. p. 45. et Gilbert. p. 133. Quae porro Austin. de his propositionibus monet, dicemus ad Prop. 9.

Obs. 3. Facile patet, conversam quoque propositionum 7. 8. eiusque, quam Obs. 2. habuimus, locum habere. Nempe, si e puncto aliquo in circuli plano posito, quod non sit centrum, ducantur plures rectae ad circulum, sitque una omnium maxima, erit in hac circuli centrum: ea vero, quae omnium minima est, erit, si punctum illud intra circulum fuerit, in

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΖΔ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Κ, Η, Λ, Θ σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ἴση ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσί· καὶ βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν· ἡ ΗΚ ἄρα τὴν ΑΒ δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. Καὶ ἐπεί, ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς ΗΚ ἄρα ἐστὶ τὸ κέν-

directum sei, quae per centrum transit, ex parte puncti opposita; si vero punctum extra circulum fuerit, ea, quae omnium minima est, erit pars eius, quae per centrum transit, extra circulum sita (si punctum in ipsa circuli circumferentia fuerit, nulla dabitur omnium minima): omnibus porro casibus ea, quae maior est altera, circulum ita secabit, ut recta e centro ad punctum intersectionis maioris illius rectae et circuli ducta maiorem efficiat angulum cum recta e puncto ad centrum ducta, quam ea, quae e centro ad punctum intersectionis minoris cum circulo ducitur, efficit cum recta e puncto ad centrum ducta: denique binae rectae aequales e puncto ad circulum ductae puncta intersectionis cum circulo ita posita habebunt, ut rectae ad haec puncta e centro ductae aequales utrimque angulos efficiant cum ea, quae a puncto ad centrum ducitur. Quod facile sumto contrario evincitur. Conversam hanc, quatenus respicit III. 7., habet Clavius.

Sit circulus $ABΓ$, intra autem ipsum punctum $Δ$, et a $Δ$ in circulum $ABΓ$ cadant plures quam duae rectae aequales $ΔA$, $ΔB$, $ΔΓ$; dico punctum $Δ$ centrum esse circuli $ABΓ$.

Iungantur enim AB, $BΓ$, et secentur bifariam in punctis E, Z (I. 10.), et iunctae $EΔ$, $ZΔ$ producantur ad K, H, $Λ$, $Θ$ puncta.

Quoniam igitur AE est aequalis EB, communis autem $EΔ$, duae AE, $EΔ$ duabus BE, $EΔ$ aequales sunt; et basis $ΔA$ basi $ΔB$ aequalis; angulus igitur $AEΔ$ angulo $BEΔ$ aequalis est (I. 8.); rectus igitur uterque angulorum $AEΔ$, $BEΔ$ (I. Def. 10.). HK igitur AB bifariam secans et ad angulos rectos ipsam secat. Et quoniam, si in circulo aliqua recta rectam aliquam bifariam et ad rectos angulos secet, centrum circuli est in secante (III. 1. Cor.); erit in HK cen-

PROPOSITIO IX.

Obs. Haec propositio facillime consequitur ex III. 7. Cor. vel generalius etiam, nulla positionis puncti intra circulum mentione facta, ope III. 8. Obs. 2. Cor. ita, ut nulla alia demonstratione opus foret. Atque ita Borellius rem expedit (Euclid. restitut. 1658. p. 72.). Caeterum debebat in demonstratione priore hic allata, si omnia iusto rigore persequi velis, distingui is casus, quo rectarum AB, $BΓ$ (Fig. 215.) alterutra per punctum $Δ$ transit. Et, quum praeterea in hac demonstratione sumatur, quod apud Euclidem neque inter axiomata deprehendimus, nec alias demonstratum videmus (quo tamen etiam utitur in demonstratione priore Prop. 10.) duas rectas nonnisi unum punctum commune habere, suspicari forte liceat, spuriam esse, quae primo loco habetur, demonstrationem. Editorum nonnulli priorem, nonnulli posteriorem demonstrationem omittunt. Priorem omittunt Tacquet,

τρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ εὐθεῖαι, ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η σημεῖα, ἡ ΖΗ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΖΗ διαμέτρου εἴληπταί τι σημεῖον τὸ Δ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, μεγίστη μὲν ἔσται ἡ ΔΗ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΔΒ τῆς ΔΑ. Ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ

Rob. Simson., Playfair., posteriorem Campanus, Ambros. Rhodius, Orontius Fineus, Candalla, Giordano da Bitonto, Fournier, Hauff in Vers. German. Austin. monet, propositionem 9. adeo facile deduci e septima, ut credi vix possit, Euclidem id non animadvertisse. Recentiores quosdam geometras reapse in posteriore 9. demonstratione, quae priori omnino praeferenda videatur, usos esse 7. At quum Euclides ipse, ad quem nempe priorem demonstrationem 9. referendam putat, 7. neque hic, neque alibi unquam utatur, nec 8. ullus usus sit apud Euclidem, quum praeterea theoria circuli etiam sine 7. et 8. perfectus esse videatur, quoad rectas ad circulum ductas propositionibus III. 14. III. 15. III. 35. et III. 36.

trum circuli $AB\Gamma$. Ex eadem ratione et in $\Theta\Delta$ est centrum circuli $AB\Gamma$. Et nullum aliud commune habent rectae HK, $\Theta\Delta$ quam punctum Δ; circuli $AB\Gamma$ punctum igitur Δ centrum est. Si igitur circuli etc.

ALITER. (Fig. 216.)

Intra enim circulum $AB\Gamma$ sumatur aliquod punctum Δ, a Δ autem in $AB\Gamma$ circulum cadant plures quam duae rectae aequales, ΔA, ΔB, $\Delta\Gamma$; dico sumptum punctum Δ centrum esse circuli $AB\Gamma$.

Non enim, sed si fieri possit, sit E, et iuncta ΔE producatur in puncta Z, H; ergo ZH diameter est circuli $AB\Gamma$. Quoniam igitur in diametro ZH circuli $AB\Gamma$ sumptum est aliquod punctum Δ, quod non est centrum circuli, maxima quidem erit ΔH, maior vero $\Delta\Gamma$ quam ΔB, et ΔB quam ΔA (III. 7.). Sed et aequalis, quod fieri nequit; non est igitur E centrum circuli $AB\Gamma$. Similiter autem ostendemus,

7. et 8. serius saltim inventum eius auctoris videri, qui propositionis 9. demonstrationem posteriorem addiderit. Obiici quidem posse, in Theodosii Sphaericis adhiberi has propositiones, et similia nonnulla de sphaeris demonstrari, at quum Theodosium tribus fere seculis post Euclidem vixisse perhibeant, ab illo quippe ab auctoris elementorum aevo nimis alieno non addisci posse, quaenam ab initio huius operis forma fuerit. Quae quamvis satis speciose dicta sint, pro certis tamen et indubitatis sumi posse non videntur, quum nondum evictum sit, posteriorem Prop. 9. demonstrationem non esse Euclidis, et propositiones 7. et 8., si non ad demonstrandas propositiones sequentes, certe tamen ad pleniorem

κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείζομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Δ τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Β, Η, Θ[1]) καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΒΘ, ΒΗ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ σημεῖα· καὶ ἀπὸ τῶν Κ, Λ ταῖς ΒΘ, ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΛΜ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΘ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΑΓ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΝΞ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΗ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΝΞ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ, καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ ΑΓ, ΝΞ εὐθεῖαι ἀλλήλαις

1) Editio Parisiensis, nulla exhibita Cod. auctoritate, ad exemplum tamen ed. Basil. ponit Β, Η, Ζ, Θ. At, quum ostendendum sit, ne tria quidem puncta duobus circulis posse esse communia, restituendam omnino putavimus lectionem ed. Oxon.

accuratioremque circuli theoriam omnino pertinere videantur, cuius rei exempla etiam infra ad Prop. 11. videbimus.

PROPOSITIO X.

Huius quoque propositionis, quae generalius adhuc ita exprimi, et eadem ratione demonstrari poterat: circulus cum alio circulo non plures quam duo puncta communia habet

neque aliud praeter Δ; ergo punctum Δ centrum est circuli $AB\Gamma$.

PROPOSITIO X. (Fig. 217.)

Circulus circulum non secat in pluribus punctis quam duobus.

Si enim fieri potest, circulus $AB\Gamma$ circulum ΔEZ secet in pluribus punctis quam duobus, B, H, Θ, et iunctae $B\Theta$, BH bifariam secentur in punctis K, Λ (I. 10.); et ab ipsis K, Λ ipsis $B\Theta$, BH ad rectos angulos ductae $K\Gamma$, ΛM (I. 11.) producantur in puncta A, E.

Quoniam igitur in circulo $AB\Gamma$ recta aliqua $A\Gamma$ rectam aliquam $B\Theta$ bifariam et ad rectos secat, in $A\Gamma$ erit centrum circuli $AB\Gamma$ (III. 1. Cor. 1.). Rursus, quoniam in eodem circulo $AB\Gamma$ recta aliqua $N\Xi$ rectam aliquam BH bifariam et ad rectos secat, in $N\Xi$ centrum est circuli $AB\Gamma$ (III. 1. Cor. 1.). Ostensum autem ipsum esse et in $A\Gamma$, et in nullo puncto conveniunt rectae $A\Gamma$, $N\Xi$ inter se praeterquam in

potest (in quo enunciato illud etiam continetur, circulos se invicem contingentes certe non plura quam duo puncta communia habere) in textu graeco duae sunt demonstrationes. In priore illud desiderari possit, quod non satis accurate demonstratum sit, rectas, quae in punctis bisectionis rectis ex hyp. utrique circulo inscriptis ad angulos rectos ducantur, sibi invicem in puncto aliquo et quidem unico occurrere, qui defectus tamen facile expleri potest ope I. Ax. 11. et I. Ax. 10. a et I. Ax. 12. Demonstratio posterior sumit sine ratione, punctum, quod pro centro unius circuli sumtum fuit, esse intra alterum circulum. Neque tamen necesse est hoc sumere,

ἢ κατὰ τὸ Ο· τὸ Ο ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείζομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ Ο· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ Ο, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Β, Η, Ζ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔΕΖ εἴληπταί τι σημεῖον ἐντὸς], τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς τὸν ΔΕΖ κύκλον προςπεπτώκασι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ· τὸ Κ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου. Ἔστι δὲ καὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ Κ, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἑξῆς.

si praemissis propositionibus III. 7. III. 8. et ea, quae Obs. 2. ad III. 8. continetur, propositionem III. 9. generalius exprimas de puncto quocunque etiam non intra circulum posito. Atque ita propositiones III. 7. III. 8. et III. 8. Obs. 2. necessariae forent ad demonstrationem posteriorem III. propositionis 10. perficiendam. Etiam hic alii editores omittunt demonstrationem priorem v. c. Orontius Fineus, Borellius, Tacquet, Coëtsius, Giordano da Bitonto, Fournier, Rob. Simson., Playfair., alii posteriorem, v. c. Campanus, Candalla, Tartalea, Ambros. Rhodius, Hauff deutsche Uebersetz., Lorenz deutsche Uebersetz. 3te Ausg. 1809. Caeterum sequentia adhuc ex hac propositione et maxime ex demonstratione priore perficienda ante ut diximus, corollaria derivari possunt;

O; ergo O punctum centrum est circuli $ABΓ$. Similiter autem ostendemus, et circuli $ΔEZ$ centrum esse O; duorum igitur circulorum sese secantium $ABΓ$, $ΔEZ$, idem erit centrum O, quod fieri nequit (III. 5.). Circulus igitur non etc.

ALITER. (Fig. 218.)

Circulus enim rursus $ABΓ$ circulum $ΔEZ$ secet in pluribus punctis quam duobus, B, H, Z, et sumatur centrum circuli $ABΓ$, K, et iungantur KB, KH, KZ.

Quoniam igitur intra circulum $ΔEZ$ sumptum est aliquod punctum K, et a K in circulum $ΔEZ$ incidunt plures quam duae rectae aequales, KB, KZ, KH; ergo punctum K centrum est circuli $ΔEZ$ (III. 9.). Est autem K et circuli $ABΓ$ centrum; duorum igitur circulorum sese secantium idem centrum est K, quod fieri nequit (III. 5.). Non igitur circulus etc.

Cor. 1. Per tria puncta non in eadem recta posita circulus describi potest, invento nempe illius centro eadem, qua poor demonstratio utitur, ratione, et tribus itaque punctis datis omnimode determinatur circulus, qui per ea transit.

Cor. 2. Recta, quae duo puncta, quibus duo circuli se secant, iungit, non per utriusque circuli centrum transit, vel non est utriusque circuli diameter. Quodsi enim esset diameter utriusque circuli, vel idem centrum esset utrique circulo, quod fieri nequit (III. 5.) vel recta haec in duobus punctis bisecaretur, quod pariter fieri non potest (I. Ax. 9.) Cf. Pfleiderer.

Cor. 3. Quae rectam puncta intersectionis circulorum se secantium iungentem, sive haec per centrum unius circuli

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν [1]) ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α σημεῖον πεσεῖται.

1) ἐφαπτέσθωσαν e Cod. a. ponit Peyrardus pro simplici ἁπτέσθωσαν, quod est in edd. Oxon. et Basil. Cf. quae diximus ad Def. 2. huius libri.

transeat, sive non, bifariam secat recta, eique ad angulos rectos insistit, per centra duorum circulorum transit, et vice versa. Cf. Pfleiderer.

Cor. 4. Distantia centrorum duorum circulorum, qui se intersecant, minor est summa radiorum eorum (I. 20.); et quod pariter ex I. 20. consequitur, si radii inaequales sint, distantia centrorum maior est differentia radiorum eorum; et is radius, qui altero maior est, minor est summa alterius radii et distantiae centrorum. Semper nempe triangulum effici debet inter utrumque centrum et punctum sectionis circulorum. Cf. Pfleiderer.

PROPOSITIO XI.

Obs. 1. In huius propositionis enunciatione distinctius dicendum erat, quo sensu vox ἐκβαλλομένη sumta sit. Illud nempe volebat auctor, ut e demonstratione utraque patet, rectam, quae centra utriusque circuli coniungit, productam *ad eam partem, ad quam est centrum circuli interioris*, in contactum, vel potius in illud ipsum punctum cadere, in quo duo circuli se contingere sumebantur. Hac demum ratione, accu-

PROPOSITIO XI. (Fig. 219.)

Si duo circuli sese intus contingant, et sumantur eorum centra, recta centra eorum coniungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli $AB\Gamma$, $A\Delta E$ sese contingant intus in puncto A, et sumatur circuli quidem $AB\Gamma$ centrum Z, circuli autem $A\Delta E$ centrum H; dico rectam ab H ad Z ductam, si producatur in punctum A cadere.

ratius sensu enunciari determinato, patet, cur in figura punctum H centrum nempe circuli minoris vel interioris sumtum sit ex ea parte puncti Z centri circuli maioris, vel alterum comprehendentis, e qua sunt puncta Δ, Θ, in quibus recta ZH circulos in demonstratione secare sumitur. Dixi, unum circulorum necessario alterum comprehendere, adeoque maiorem esse altero. Quamvis enim in iis, quae ad III. 3. Def. observata sunt, duos circulos intus se in puncto aliquo contingere dixerimus, si ea saltim puncta unius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint intra alterum circulum (adeoque ea puncta alterius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint extra alterum) ex iis tamen, quae hactenus demonstrata sunt, colligere iam licebit, unum eorum circulorum necessario integrum intra alterum positum esse. Quodsi enim imaginari velis, duos circulos intus se in puncto aliquo contingentes, quorum tamen neuter intra alterum comprehendatur, necessario is, cuius puncta puncto A proxima intra alterum posita sint, extra hunc exire, et deinde per aliud eius punctum, vel per idem punctum iterum intra circulum redire deberet. At, si sumere velis, posse esse (Fig. 220.) circulum $AB\Delta\Gamma$, qui alterum $AB\Gamma E$ intus contingat, et in B extra hunc exeat versus Δ, in Γ vero intra eum redeat, duo hi circuli plura

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, πιπτέτω ὡς ἡ ΖΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ τοῦτ' ἔστι τῆς ΖΘ, (ἴση γὰρ ἡ ΖΑ τῇ ΖΘ, ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω [1]) μείζονές εἰσι, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ· καὶ ἡ ΗΔ ἄρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ Α συναφῆς πεσεῖται· ἐπ' αὐτὴν ἄρα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι καὶ τὰ ἑξῆς.

ΑΛΛΩΣ.

Ἀλλὰ δὲ πιπτέτω ὡς ἡ ΗΖΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΗΖΓ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΖ.

1) Verba uncis inclusa, quae Peyrardus cum Cod. a omittit, ex edd. Basil. et Oxon. restituimus.

quam duo puncta communia habebunt, quod fieri nequit, ut in Obs. ad III. 10. monuimus. Sin autem imaginari velis circulum *ABΔBA* (Fig. 221.), qui alterum *ABE* intus contingat, et tamen extra eum in puncto *B* egrediatur, per idem puntum *B* autem intra illum regrediatur, necessario ille nodiformis erit, et e duabus figuris vel gyris, una *AB*, altera *BΔ* undequaque clausis, et in puncto *B* cohaerentibus constabit, in quarum altera v. g. in *AB* centrum circuli *Γ* positum erit. Ex centro *Γ* ducatur ad punctum aliquod *Z* alterius gyri recta *ΓZ*, quae, quum necessario e gyro *AB* exire debeat, hunc secabit in puncto aliquo *Θ* (I. Ax. 13.), eruntque tam *ΓΘ* quam *ΓZ* radii circuli, adeoque *ΓΘ=ΓZ* (Def. I. 15.) pars itaque aequalis toti, quod est absurdum. Quum igitur circulus, qui alterum intus contingit, et cuius itaque

Non enim, sed si fieri potest, cadat ut $ZH\Theta$, et iungantur AZ, AH.

Quoniam igitur AH, HZ recta ZA (I. 20.), hoc est recta $Z\Theta$ maiores sunt (est enim ZA aequalis $Z\Theta$, ambae quippe ex eodem centro), communis auferatur ZH; reliqua igitur AH reliqua $H\Theta$ maior est. Est autem AH aequalis ΔH; $H\Delta$ igitur ipsa $H\Theta$ maior est, minor maiore, quod fieri nequit. Non igitur a Z ad H ducta recta extr contactum A cadet. Ergo in contactum cadet. Si igitur duo circuli etc.

ALITER.

Sed cadat ut $HZ\Gamma$, et producatur in directum $H\Gamma Z$ ad punctum Θ, et iungantur AH, AZ.

puncta contactui proxima intra hunc continentur, nulla sui parte extra hunc egredi vel eum secare possit, consequitur, illum circulum prorsus ab hoc comprehendi, vel integrum intra eum situm esse, adeoque minorem esse circulo comprehendente. Unde et radius circuli comprehensi minor erit radio circuli comprehendentis. (Vid. Obs. ad III. 1. Def. sub finem) Et illum quidem, qui e duobus se invicem contingentibus circulis radium minorem habet, intra *contingere*, alterum, qui radium maiorem habet, *contingi* dicimus. His praemissis, quae ad omnes scrupulos penitus eximendos necessaria visa sunt, reliqua etiam plenius et accuratius ita expedientur. Si duo circuli $AB\Gamma$, $A\Delta E$ (Fig. 222.) se intus contingant in puncto A (adeoque ex III. 6. centra eorum diversa sint), recta, quae centra utriusque circuli coniungit producta ad eam partem, ad quam est centrum circuli interioris, in illud ipsum punctum A cadet, in quo duo illi circuli se contingunt. Sit enim H centrum circuli interioris

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ μείζους εἰσὶ τῆς ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΖΑ ἴση ἐστὶ τῇ ΖΓ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΖΘ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΗΔ τῆς ΗΘ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ὁμοίως, κἂν ἐκτὸς ἦ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται [1]) ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

1) ἐφάπτωνται e Cod. a. ponit Peyrardus pro simplici ἅπτωνται, quod est in edd. Oxon. et Basil. Cf. III. 11. Prop.

(minoris), Z centrum circuli exterioris vel maioris. Iam, si punctum contactus A non sit in recta ZH ultra H producta, erit aut in recta ZH ultra Z producta, aut extra rectam ZH. Sit 1) si fieri potest, punctum A in recta ZH ultra centrum circuli maioris Z producta, eritque $HA = HZ + ZA$, adeoque $HA > ZA$. At ex hypoth. Z est centrum circuli maioris, vel (vid. Obs. ad III. 1. Def.) est $ZA > HA$. Absurdum igitur est, esse simul $HA > ZA$. Sit 2) punctum A extra rectam ZH positum. Recta ZH ultra H producta necessario cum utroque circulo conveniet (I. Ax. 13.). Conveniet autem cum utroque circulo vel in puncto utrique communi, vel in duobus diversis punctis. Conveniat a) si fieri potest (Fig. 223.) in puncto Θ utrique circulo communi, ductisque ad punctum contactus A rectis HA, ZA, constituetur triangulum HAZ, in quo $AH + HZ > ZA$ (I. 20.) i. e. $> Z\Theta$ (I. Def. 15.), adeoque, demta communi ZH, $AH > H\Theta$. At etiam $AH = H\Theta$ (I. Def. 15.), quod est absurdum. Conveniat b) recta ZH cum circulo exteriore in puncto Θ (Fig. 219.) cum circulo interiore in puncto

Quoniam igitur AH, HZ maiores sunt ipsa AZ (I. 20.), sed ZA aequalis est $Z\Gamma$, hoc est ipsi $Z\Theta$, communis auferatur ZH; reliqua igitur AH reliqua $H\Theta$ maior est, hoc est $H\Delta$ ipsa $H\Theta$, minor maiore, quod fieri nequit. Similiter, et si extra circulum parvum sit centrum maioris circuli, ostendemus idem absurdum sequi.

PROPOSITIO XII. (Fig. 225.)

Si duo circuli sese extra contingant, recta centra ipsorum coniungens per contactum transibit.

d, et evincetur alterutra earum demonstrationum, quae sunt apud Euclidem, id fieri non posse. (Haec autem consequentia non valeret, nisi ante ostensum fuerit, circulos se intus contingentes non simul se invicem secare posse vel punctum Θ non intra circulum minorem esse posse.) Nequaquam igitur punctum A extra rectam ZH, nec in ipsa recta ZH ex ea huius rectae parte esse potest, qua ultra punctum Z producta est: itaque (quum centra Z, H intra suos quodque circulos, adeoque punctum A, in circumferentia quippe circulorum positum, nec in ipsa ZH inter haec puncta situm esse possit), erit necessario in recta ZH ultra H centrum circuli interioris producta, vel, quod eodem redit, puncta Z, H, A centra nempe et punctum contactus in eadem recta, et quidem eo, quo nominavimus, ordine posita erunt. Aliam casus 2. b. demonstrationem ex III. 7. derivatam habent Peletarius, Billingsley, Borellius, Henrion. Alia porro, quam Coëtsius habet, demonstratio, dubito an efficiat id, quod probandum erat.

Cor. Et quum recta ZH necessario ex *utraque* parte producta circulos secet (I. Ax. 13.), neutrum autem in pluribus quam duobus punctis secare possit (III. 2. Cor. 1.) ex ea parte, qua ultra H producitur, in *uno* tantum puncto A eos secare

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον, τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἐρχέσθω ὡς αἱ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΑΗ.

poterit. Quum igitur punctum contactus duorum circulorum intus se contingentium positum sit in recta centra eorum coniungente, qua ultra centrum circuli interioris *producta* circulis occurrit, illa autem occurrere circulis ex hac parte non nisi in uno puncto possit, circuli, qui se intus contingunt, non nisi in uno puncto se contingent. Et quum circuli, qui se intus in puncto aliquo contingunt, nec in alio puncto se secare possint, ut supra vidimus, generalius adhuc dici potest, eos non nisi unum punctum commune habere. (Est haec pars propositionis III. 13. facile ita stabilienda, quamvis generalius expressa).

Obs. 2. Ex hac propositione, adiectoque corollario immediate haec etiam eius conversa sequitur: si duo circuli se invicem intus contingunt, recta ex centro unius circuli ad punctum contactus ducta per centrum alterius quoque transit. (Est haec Pappi Lemm. V. ad Apollon. de Taction vel Collect. Mathem. L. VII. Prop. C. Habet eam quoque Coëtsius in Schol. ad III. 11.)

Obs. 3. Alia porro huius propositionis conversa locum habet: nempe, si duo circuli punctum aliquod *A* (Fig. 224.) commune habeant, sintque radii eorum ad punctum *A* vergentes in eadem recta, ex *eadem* parte puncti illius communis positi: circuli in puncto isto communi intus se contingent. Sint enim centra duorum circulorum *H*, *Z*, quae non coincident (III. 6. Obs.), sitque *Z* punctum a puncto *A* remotius. Ex puncto *Z* ad punctum aliquod *Δ* circuli radio *HA* descripti ducatur recta *ZΔ*, eritque haec recta minor recta *ZA* (III. 7. III. 8. et Obs. 2. ad III. 8.), adeoque ex Def. 15. punctum *Δ* situm

Duo enim circuli $AB\Gamma$, $A\Delta E$ sese contingant extra in puncto A, et sumatur circuli quidem $AB\Gamma$ centrum Z, circuli vero $A\Delta E$ centrum H; dico rectam a Z ad H ductam per contactum A transire.

Si enim non, cadat, si fieri potest, ut $Z\Gamma\Delta H$, et iungantur ZA, AH.

erit intra circulum centro Z, radio ZA descriptum. Idem demonstrabitur de puncto quocunque circuli radio HA descripti ex alterutra parte rectae Z, A sumto. Itaque duo isti circuli in puncto A se intus contingent (Obs. ad III. 3. nr. d.). (Est hoc Pappi Lemm. VI. in Apollon. de Taction. vel Collect. Mathem. L. VII. Prop. CI.)

Cor. Hinc patet ratio describendorum circulorum, qui se invicem intra contingant, et manifestum est, distantiam centrorum in iis aequalem esse differentia radiorum eorum, et vice versa.

PROPOSITIO XII.

Obs. 1. In circulis etiam, qui se extra contingunt (cf. Obs. ad III. 3. Def. nr. b. c.) simili plane ratione ac in propositione praecedente demonstrabitur, eos se invicem nusquam secare posse, vel utrumque integrum extra alterum positum esse. Deinde, si in puncto A se extra contingant, punctum A necessario positum erit in *ipsa* recta, quae centra utriusque circuli (quae quum uterque circulus integer extra alterum sit, certe diversa erunt) coniungit. Si enim punctum contactus A non positum sit in *ipsa* hac recta, erit vel in recta utrumque centrum iungente ultra alterutrum centrum producta, vel extra eam. Sit 1) si fieri potest (Fig. 226.) punctum A in recta, quae centrum Z unius circuli (primum vocabimus) ac centrum H alterius circuli (secundum appellabimus) coniungit, ultra secundum v. g. centrum H producta. At, quum uterque circulus integer extra alterum positus sit, recta ZH, antequam

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ ἴση· αἱ ἄρα ΖΑ, ΑΗ ταῖς ΖΓ, ΔΗ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ, ΑΗ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐφάπτηται, ἐάν τε ἐκτός.

secundum circulum intrare possit, primum circulum secabit in puncto aliquo Γ (I. Ax. 13.), adeoque erit $Z\Gamma$ radius primi circuli. At ex hypothesi eadem recta ZH producta in A occurrit puncto utrique circulo communi, adeoque etiam ZA est radius primi circuli. Erit itaque $Z\Gamma = ZA$ (I. Def. 15.) pars toti, quod est absurdum. Punctum itaque A non situm esse potest in recta ZH ultra H producta. Eodemque modo ostenditur, non esse punctum contactus A in recta ZH ultra Z producta. Sit deinde 2) si fieri potest, punctum contactus A extra rectam ZH, rectaque ZH vel utrique circulo in eodem puncto Θ, vel uni quidem in puncto Γ, alteri in puncto Δ occurret. Occurrat 1) si fieri potest, utrique circulo (Fig. 227.) in puncto Θ, ductisque ad punctum contactus A rectis ZA, HA, constituetur triangulum ZAH, in quo $ZA + HA > ZH$ (I. 20.). At $ZA = Z\Theta$, et $HA = H\Theta$ (I. Def. 15.) Itaque $Z\Theta + H\Theta = ZA + HA$. i. e. $ZH = ZA + HA$ q. e. a. Occurrat deinde b) recta ZH (Fig. 225.) uni circulo in Γ, alteri in Δ, et ostendetur, ut apud Euclidem, etiam hoc fieri non posse. Quum igitur punctum contactus neque extra rectam ZH, neque

Quoniam igitur Z punctum centrum est circuli $AB\Gamma$, aequalis est ZA ipsi $Z\Gamma$ (I. Def. 15.). Rursus, quoniam H punctum centrum est circuli $A\Delta E$, aequalis est AH ipsi $H\Delta$ (I. Def. 15.). Ostensa est autem ZA ipsi $Z\Gamma$ aequalis; rectae igitur ZA, AH rectis $Z\Gamma$, ΔH aequales sunt; quare tota ZH ipsis ZA, AH maior est. Sed et minor (I. 20.), quod fieri nequit. Non igitur recta a Z ad H ducta per contactum A non transibit; per ipsum igitur. Si igitur duo circuli etc.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 229.)

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam in uno, sive intus contingat, sive extra.

in ipsa ultra alterutrum centrum producta, nec (ut ex I. 15. Def. patet) in alterutro punctorum Z, H situm esse possit, erit necessario inter puncta Z et H intermedium, vel, quod eodem redit, centra Z, H et punctum contactus A hoc ordine: Z, A, H se invicem subsequentur. Caeterum Campanus et Peletarius hanc propositionem cum praecedente simul uno eodemque enunciato efferunt, et casus 2. b. aliam adhuc ex III. 8. derivatam demonstrationem habent Peletarius, Billingsley, Borellius, Henrion.

Cor. 1. Et, quum recta ZH necessario ex *utraque* parte producta alterutrum circulum secet (I. Ax. 13.), neutrum autem in pluribus, quam duobus punctis secare possit (III. 2. Cor. 1.), inter puncta Z et H utrumque in *uno* tantum puncto A secare poterit. Circuli itaque se extra contingentes nonnisi in uno puncto se contingent, et, quum nec in alio puncto se secare possint, unum tantum punctum commune habebunt. (Et haec pars altera III. 13. Prop. generalius expressa.)

Cor. 2. Si duo circuli punctum aliquod commune habeant, quod non sit in recta centra eorum iungente ipsa aut

Εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τοῦ ΕΒΖΔ ἐφαπτέσθω [1]) πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν, τὰ Β, Δ.

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΔΓ κύκλου κέντρον, τὸ Η· τοῦ δὲ ΕΒΖΔ, τὸ Θ.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τὰ Β, Δ πεσεῖται. Πιπτέτω ὡς ἡ ΒΗΘΔ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ· μείζων ἄρα ἡ ΒΗ τῆς ΘΔ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΘΔ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν.

1) Hic quoque e Cod. a. Peyrard. ponit ἐφαπτέσθω pro simplici ἁπτέσθω edd. Oxon. et Basil. Caeterum figuram huic propositioni adiunximus, qualis fere est in editione Basileensi, textui Graeco melius respondentem, quam quae vulgo habetur.

producta, circuli hi in isto puncto se invicem secabunt. Si enim se invicem non secent, se contingent. Atqui contingere se non possunt (III. 11. vel III. 12.), ergo secabunt.

Cor. 3. Duo itaque circuli, in quibus distantia centrorum minor est summa radiorum, et si radii inaequales sint, maior differentia radiorum, se invicem secant. Tum nempe (I. 22.) e duobus radiis et recta, quae centrorum distantiam exprimit, triangulum constitui poterit, in quo itaque punctum, in quo radii se intersecant, non erit in recta centra iungente, unde res consequitur ex Cor. praecedente.

Cor. 4. Duo circuli, qui in duobus punctis sibi occurrunt, se invicem secant. Contingere enim se non possunt

Si enim fieri potest, circulus $AB\Delta\Gamma$ circulum $EBZ\Delta$ contingat primum intus in pluribus punctis quam in uno, in B, Δ.

Et sumatur ipsius quidem circuli $AB\Delta\Gamma$ centrum H (III. 1.); ipsius autem $EBZ\Delta$, centrum Θ.

Recta igitur ab H ducta ad Θ in puncta B, Δ cadet (III. 11.). Cadat ut $BH\Theta\Delta$. Et quoniam punctum H centrum est circuli $AB\Delta\Gamma$, aequalis est BH ipsi $H\Delta$ (I. Def. 15.); maior igitur BH ipsa $\Theta\Delta$; ergo multo maior $B\Theta$ ipsa $\Theta\Delta$. Rursus, quoniam punctum Θ centrum est circuli $EBZ\Delta$, aequalis est $B\Theta$ ipsi $\Theta\Delta$ (I. Def. 15.) Ostensa est autem ipsa et multo maior, quod fieri nequit; non igitur circulus circulum contingit intus in pluribus punctis quam in uno.

(Cor. ad Obs. 1. III. 11. et Cor. 1. ad Obs. 1. III. 12.). Cf. Pfleiderer.

Obs. 2. Ex hac propositione, adiectoque Cor. 1. immediate etiam haec eius conversa sequitur: si duo circuli se invicem extra contingunt, recta ex centro unius ad punctum contactus ducta, *si producatur ultra contactus punctum*, per centrum alterius quoque transit. (Est haec Pappi Lemm. III. in Apollon. de Taction. vel Coll. Math. L. VII. Pr. XCVIII.)

Obs. 3. Et huius propositionis alia quoque conversa locum habet. Nempe, si duo circuli punctum aliquod A commune habeant, sintque radii eorum ad hoc punctum vergentes in eadem recta, e *diversis* puncti illius communis partibus positi: circuli in puncto isto communi extra se contingent. Sit enim (Fig. 228.) unius circuli diameter AB ac centrum H, alterius diameter $A\Gamma$, centrumque Z. Quum igitur ex hyp. Z ritum sit in diametro BA producta, erit (Obs. ad III. 2.) punctum Z extra circulum $A\Gamma$. Unde simili ratione, ac in Obs. 3. ad propositionem praecedentem ex III. 8. demonstratur, rectas

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐκτός. Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΓΚ κύκλου τοῦ ΑΒΔΓ ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν, τὰ Α, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ΑΒΔΓ, ΑΓΚ εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Γ, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται. Ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΔΓ ἐντὸς ἔπεσε, τοῦ δὲ ΑΓΚ ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντὸς. Κύκλος ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΓΕ.

ex puncto Z ex utraque parte puncti A ductas ad puncta quaecunque circuli AB maiores esse recta ZA, adeoque puncta quaecunque circuli AB ex utraque parte puncti A sita esse extra circulum AΓ. Eodem prorsus modo ostendetur, puncta quaecunque circuli AΓ ex utraque parte puncti A sita esse extra circulum AB. Circuli itaque in puncto A extra se contingent (Obs. ad III. 3. Def. nr. c.). Est haec propositio Pappi

Dico etiam neque extra. Si enim fieri potest, circulus $A\Gamma K$, circulum $AB\Gamma\Delta$ contingat extra in pluribus punctis quam in uno, in A, Γ, et iungatur $A\Gamma$.

Quoniam igitur in circumferentiis circulorum $AB\Delta\Gamma$, $A\Gamma K$ sumpta sunt duo quaelibet puncta, A, Γ, recta haec puncta coniungens intra utrumque cadet (III. 2.). Eadem autem intra circulum quidem $AB\Delta\Gamma$ cadit, at extra circulum $A\Gamma K$ (III. Def. 3.), quod est absurdum. Non igitur circulus circulum contingit extra in pluribus punctis quam in uno. Ostensum est autem neque intus. Circulus igitur etc.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 230.)

In circulo aequales rectae aequaliter distant a centro, et quae aequaliter distant a centro aequales inter se sunt.

Sit circulus $AB\Delta\Gamma$, et in eo aequales rectae sint AB, $\Gamma\Delta$; dico ipsas aequaliter distare a centro.

Sumatur enim centrum circuli $AB\Delta\Gamma$ (III. 1.), et sit E, et ab E ad AB, $\Gamma\Delta$ perpendiculares ducantur EZ, EH (I. 12.), et iungantur AE, ΓE.

Lemm. IV. in Apollon. de Taction. vel Collect. Mathem. L. VII. Prop. XCIX.)

Cor. Hinc patet ratio describendorum circulorum, qui se extra contingunt, et manifestum est, distantiam centrorum in illis aequalem esse summae radiorum, et vice versa.

PROPOSITIO XIII.

Huius propositionis demonstrationem nos quidem in Cor.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. Ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστὶ διπλῆ, καί ἐστιν ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστίν, ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ. Ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

ad III. 11. Obs. 1. et III. 12. dedimus. In ea, quae in textu graeco est, nonnulla minus accurate posita esse videntur. Nempe in eius parte priore, in qua de circulis sermo est, qui se intra contingunt, ex III. 11. adstruitur, rectam, quae per centra duorum circulorum transeat, necessario, si duo contactus puncta sumere velis, per utrumque eorum transire, quod tamen fieri non possit. Verum enim vero in Prop. 11. illud tantum demonstravit Euclides, ut in Obs. 1. ad III. 11. vidimus, rectam ΘH, quae per centra utriusque circuli transit, *ultra centrum H minoris circuli* productam in punctum contactus B cadere, eamdem vero ultra centrum Θ maioris circuli productam in alterum, quod hypothetice sumitur, punctum con-

Quoniam itaque recta aliqua EZ per centrum ducta rectam aliquam AB non per centrum ductam ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secat (III. 3.). Igitur AZ aequalis est BZ; ideoque AB ipsius AZ dupla. Eadem ratione et $\Gamma\Delta$ ipsius ΓH dupla est, et est AB aequalis ipsi $\Gamma\Delta$; aequalis igitur et AZ ipsi ΓH. Et quoniam aequalis est AE ipsi $E\Gamma$, aequale est et quadratum ex AE quadrato ex $E\Gamma$. Sed quadrato ex AE aequalia sunt quadrata ex AZ, ZE (I. 47.), rectus enim ad Z angulus; quadrato vero ex $E\Gamma$ aequalia sunt quadrata ex EH, $H\Gamma$ (I. 47.), rectus enim ad H angulus; quadrata igitur ex AZ, ZE aequalia sunt quadratis ex ΓH, HE, e quibus quadratum ex AZ aequale est quadrato ex ΓH, aequalis enim est AZ ipsi ΓH; reliquum igitur quadratum ex ZE reliquo ex EH aequale est, aequalis igitur ZE ipsi EH. In circulo autem aequaliter distare a centro rectae dicuntur (III. Def. 4.), quando a centro ad ipsas perpendiculares ductae aequales sunt; ergo AB, $\Gamma\Delta$ aequaliter distant a centro.

tactus, siquidem alterum tale punctum locum habere possit, cadere debere, nequaquam fuit demonstratum. Deinde in parte posteriore, ubi de circulis agitur, qui se extra contingunt, ex III. Def. 3. sumitur, eorum utrumque integrum extra alterum situm esse, vel tales circulos se invicem non secare. At, quum lineae curvae cogitari possint, quae quamvis se in puncto aliquo extra contingant, non tamen ita comparatae sint, ut neutra alteram etiam ulterius productam secet, et obiicere quis possit, forte idem etiam in circulis obtinere posse, ad eximendum hunc scrupulum res accuratius evolvenda esse visa fuit, ut in Obs. 1. ad III. 11. et III. 12. fecimus. Robert. Simson. etiam partis prioris, in qua circuli

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τοῦτ' ἔστιν, ἴση ἔστω ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστὶν ἴσον, ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΖ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλῆ ἡ ΓΔ, ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

intus se contingere ponuntur, aliam habet demonstrationem, quae etiam est apud Campanum et Peletarium, et huc redit. „Intus se contingant, si fieri potest, duo circuli in duobus punctis *B*, *Δ*, ductaque *BΔ* intra utrumque circulum cadet (III. 2.); igitur in recta *AM*, quae rectam *BΔ* bifariam et ad angulos rectos secat, erit utriusque circuli centrum (III. 1. Cor. 1.), ergo *AM* producta in circulorum contactum cadet (III. 11.), sed in contactum non cadet, quod puncta *B*, *Δ* sunt extra rectam *AM*, quod est absurdum.“ — At vero, quum III. 11., apud Euclidem, ut ad eam monuimus, non distincte satis evoluta sit ex Euclidea eius demonstratione,

Sed vice versa aequaliter AB, $\Gamma\Delta$ distent a centro, hoc est, aequalis sit EZ ipsi EH; dico aequalem esse et AB ipsi $\Gamma\Delta$.

Etenim iisdem constructis, similiter ostendemus duplam esse AB ipsius AZ, et $\Gamma\Delta$ ipsius ΓH; et quoniam aequalis est AE ipsi ΓE, aequale est quadratum ex AE quadrato ex ΓE; sed quadrato ex AE aequalia sunt quadrata ex EZ, ZA (I. 47.), quadrato vero ex ΓE quadrata ex EH, $H\Gamma$; quadrata igitur ex EZ, ZA aequalia sunt quadratis ex EH, $H\Gamma$, e quibus quadratum ex EZ quadrato ex EH est aequale, aequalis enim EZ ipsi EH; reliquum igitur quadratum ex AZ reliquo ex ΓH est aequale; aequalis igitur AZ ipsi ΓH, et est AB dupla ipsius AZ, $\Gamma\Delta$ vero dupla ipsius ΓH. Aequalis igitur AB ipsi $\Gamma\Delta$. In circulo igitur etc.

PROPOSITIO XV. (Fig. 231.)

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero, semper propinquior centro remotiore maior est.

quam etiam Simson. habet, non satis perspicue prodire videtur, praeter contactus punctum, in quod ex III. 11. recta AM incidit, nullum aliud vel in ipsa AM, vel extra illam contactus punctum esse posse. Eandem demonstrationem Austin. docet applicari posse, sive de circulis intus sive de circulis extra se contingentibus sermo sit, dummodo posteriore hoc casu III. 12. loco III. 11. adhibeatur, et, quod mirum videri possit, inde concludit, Prop. III. 12. spuriam esse, quum in simili casu etiam in III. 6. de circulis extra se contingentibus non sermo fuerit, et praeterea in III. 12 ἅπτονται pro ἐφάπτονται positum sit. Huic ultimae tamen rationi ipse dif-

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τοῦ Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν του κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. Κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΛΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΑΔ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' αἱ ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ, ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ, γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μεί-

fidere videtur, et Cod. a. habet omnino ἐφάπτωνται. Nec reliqua Austini argumenta sufficere nobis videntur. Alii quoque alias huius propositionis demonstrationes dederunt, e quibus ea, quam habet Giordano da Bitonto, similis fere est ei, quam in Obs. 5. ad III. 11. et ad III. 12. eius, quae ibi exhibetur, propositionis exhibuimus.

PROPOSITIO XIV.

Patet, veram adhuc esse propositionem, etiamsi rectae ΑΒ, ΓΔ ex eadem parte centri fuerint, vel si se invicem secent, aut ex uno eodemque circumferentiae puncto ductae sint.

PROPOSITIO XV.

Obs. Rob. Simson. monet, ad probandum, diametrum ΑΔ maiorem esse quacunque recta ΒΓ in circulo, nihil opus

Sit circulus $AB\Gamma\Delta$, diameter autem ipsius sit $A\Delta$, centrum vero E, et propinquior quidem centro E sit $B\Gamma$, remotior vero ZH; dico maximam esse $A\Delta$, maiorem vero $B\Gamma$ ipsa ZH.

Ducantur enim ab E centro ad $B\Gamma$, ZH perpendiculares $E\Theta$, EK. Et quoniam propinquior quidem centro est $B\Gamma$, remotior vero ZH, maior igitur EK ipsa $E\Theta$. Ponatur ipsi $E\Theta$ aequalis $E\Lambda$, et per Λ ipsi EK ad rectos ducta ΛM producatur ad N, et iungantur EM, EN, EZ, EH.

Et quoniam aequalis est $E\Theta$ ipsi $E\Lambda$, aequalis est et $B\Gamma$ ipsi MN (III. 14.). Rursus, quoniam aequalis est AE ipsi EM, et $E\Delta$ ipsi EN, ergo $A\Delta$ ipsis ME, EN aequalis est. Sed ME, EN ipsa MN maiores sunt (I. 20.), itaque $A\Delta$ ipsa MN maior est. Aequalis autem MN ipsi $B\Gamma$, ergo $A\Delta$ ipsa $B\Gamma$ maior est. Et quoniam duae ME, EN duabus ZE, EH aequales sunt, et angulus MEN angulo ZEH

esse linea MN aequali lineae $B\Gamma$, quum eadem demonstratio, quae ad MN applicatur, brevius immediate ad $B\Gamma$ applicari possit. In Euclidea tamen demonstratione recta MN rectae $B\Gamma$ aequalis et rectae ZH *parallela* ducta inservire potest, quo facilius ostendatur, esse angulum $MEN > ZEH$, quod nempe, ducta diametro $A\Delta$ parallela τῇ ZH, vel MN, ob $E\Lambda < EK$, puncta M, N diametro $A\Delta$ propiora sunt, quam puncta Z, H, quod ipsum tamen clarius exponi debebat. Caeterum hanc ipsam secundam partem, et *quae pariter valet*, eius conversam, nempe rectarum circulo inscriptarum, quae maior sit, esse etiam centro propiorem, pariter sine ope rectae MN, et anguli MEN modo simili ei, qua Euclides utitur in praecedente, et quam etiam adhibet Theodosius in Libr. I. Prop. 6. Sphaericorum in casu omnino simili ope III. 3. ea

ζων ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Μεγίστη ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ. Ἐν κύκλῳ ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστὶν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· αἱ ἄρα [1]) ὑπὸ

1) Peyrard. e Cod. a pro αἱ ἄρα ponit τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ.

I. 47. demonstrari posse, Rob. Simson. observat, et ipse hanc demonstrationem exhibet. Conversa illa facile etiam ope partis primae et III. 14. demonstrabitur. Aliam partis secundae demonstrationem habet Campanus, in qua nihil opus est perpendiculis e centro ductis, dum integra ille triangula *MEN*, *ZEH* comparat. Denique observari potest, eas etiam rectas in circulo, quae ex eodem circumferentiae puncto exeunt, ita comparari posse. Cf. Prop. 8. Obs. 2.

maior; basis igitur MN basi ZH maior est (I. 24.). Sed MN ipsi $B\Gamma$ ostensa est aequalis, itaque $B\Gamma$ ipsa ZH maior est. Maxima igitur est diameter $A\Delta$, maior vero $B\Gamma$ ipsa ZH. In circulo igitur etc.

PROPOSITIO XVI. (Fig. 232.)

Recta diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta cadet extra circulum; et in locum, qui inter rectam et circumferentiam interiicitur altera recta non cadet; et semicirculi angulus quovis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus vero minor.

Sit circulus $AB\Gamma$ circa centrum Δ et diametrum AB; dico rectam lineam, quae ab extremitate A ad AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere.

Si enim non, cadat, si fieri potest, intus, ut $A\Gamma$, et iungatur $\Delta\Gamma$.

Quoniam aequalis est ΔA ipsi $\Delta\Gamma$, erit et angulus $\Delta A\Gamma$ angulo $A\Gamma\Delta$ aequalis (I. 5.). Rectus autem $\Delta A\Gamma$, rectus igitur et $A\Gamma\Delta$; itaque duo anguli $\Delta A\Gamma$,

Cor. Quodsi itaque in circulo, cuius radius magnitudine datus est, magnitudine data sit recta circulo inscripta (quae nunquam maior esse potest duplo circuli radio, vel, quod eodem redit, diametro circuli) distantia eius a centro magnitudine data erit, et vice versa. Est nempe $EA^q = MB^q - MA^q = ME^q - \left(\frac{MN}{2}\right)^2$, et $MA^q = \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = MB^q - EA^q$. Cf. Pfleiderer.

PROPOSITIO XVI.

Obs. Propositio haec (cuius etiam directa demonstratio

ΔΑΓ, ΑΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένῃ ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς ἄρα πιπτέτω, ὡς ἡ ΑΕ.

Λέγω δὴ ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεπιπτέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. Ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλαττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἐστί τις γωνία εὐθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας,

satis facilis exhibetur ab Orontio Fineo) ita exprimi potest: 1) recta, quae ab extremo diametri puncto diametro ad rectos angulos ducitur, tota extra circulum cadit. 2) Quae autem ab extremo diametri puncto oblique i. e. sub angulo quocunque acuto vel obtuso ad diametrum ducitur, circumferentiae iterum occurrit. 3) Angulus semicirculi, i. e. quem circumfe-

$A\Gamma\Delta$ duobus rectis aequales sunt, quod fieri nequit (I. 17.). Recta igitur a puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta non cadet intra circulum. Similiter ostendemus, neque in circumferentiam cadere; extra igitur cadet, ut AE.

Dico etiam in locum inter rectam AE et circumferentiam $\Gamma\Theta A$ alteram rectam non cadere.

Si enim fieri potest, cadat ut ZA, et ducatur a puncto Δ ad ZA perpendicularis ΔH.

Et quoniam rectus est angulus $AH\Delta$, minor autem recto ΔAH; erit $A\Delta$ maior ipsa ΔH (I. 19.). Aequalis autem est $A\Delta$ ipsi $\Delta\Theta$; maior igitur $\Delta\Theta$ ipsa ΔH, minor maiore, quod fieri nequit. In locum igitur inter rectam et circumferentiam altera recta non cadet.

Dico praeterea semicirculi angulum, comprehensum a recta BA et circumferentia $\Gamma\Theta A$, quovis angulo acuto rectilineo maiorem esse; reliquum vero comprehensum a circumferentia $\Gamma\Theta A$ et recta AE, quovis angulo acuto rectilineo minorem esse.

Si enim est aliquis angulus rectilineus, maior comprehenso a recta BA et circumferentia $\Gamma\Theta A$, minor vero comprehenso a circumferentia $\Gamma\Theta A$ et recta AE, in locum inter circumferentiam $\Gamma\Theta A$ et rectam AE

rentia cum diametro efficit, maior est quovis angulo rectilineo: reliquus vero angulus, ille nempe, quem circumferentia cum recta efficit, quae diametro a puncto eius extremo ad rectos angulos ducta est, et quem angulum contingentiae vocare solent, minor est quovis angulo acuto rectilineo. De hac tertia propositionis parte videbimus in excursu ad calcem huius

εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα παρεμπεσεῖται, ἥ τις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. Οὐ παρεμπίπτει δέ· οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὲν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον. Ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

libri. E duabus reliquis propositionis partibus, praeter corollarium textus Graeci sequens adhuc a Rob. Simson. deducitur corollarium.

Cor. 2. Unica tantum recta linea circulum in eodem puncto contingere potest, nempe, quae radio circuli in puncto eius extremo perpendicularis est. Quae autem ei oblique insistit, circulo ad partes anguli acuti iterum occurrit. Praeterea patet, ex hac quoque propositione consequi, quod III. 2. Cor. 3. vidimus, circuli circumferentiam esse lineam curvam i. e. ne minimam quidem eius partem esse rectam.

recta cadet, quae faciet angulum a rectis comprehensum maiorem comprehenso a recta BA et circumferentia $\Gamma\Theta A$, minorem vero comprehenso a circumferentia $\Gamma\Theta A$ et recta AE. Non cadit autem; angulus igitur rectis comprehensus non erit maior angulo comprehenso a recta BA et circumferentia $\Gamma\Theta A$, neque minor comprehenso a circumferentia $\Gamma\Theta A$ et recta AE. Quod oportebat ostendere.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est rectam, quae ab extremitate diametri circuli ei ad rectos angulos ducitur, contingere circulum; et rectam circulum in unico contingere puncto. Quoniam recta in duobus punctis ipsi occurrens intra ipsum cadere ostensa est.

PROPOSITIO XVII. (Fig. 233.)

A dato puncto rectam lineam ducere, quae circulum datum contingat.

PROPOSITIO XVII.

Obs. 1. Duo, si rem exacte absolvere velis, casus distinguendi sunt, prout punctum datum vel extra circumferentiam dati circuli, vel in hac ipsa circumferentia datum est. (Intra datum circulum enim esse nequit, ut ex Defin. rectae contingentis patet.) Ultimum hunc casum, quo est in ipsa circumferentia, cuius solutio caeterum ex III, 16. Cor. 1. sponte fluit, addit Rob. Simson. Priore casu, quem solum habet Euclides, patet, rectam ΔZ, quae rectae $E\Delta$ ad angulos rectos ducta est, quum per punctum Δ intra circulum AZH

Ἔστω τὸ μὴν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῶν ΒΓΔ, ΑΖΗ κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΒ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν πρὸς τῷ Ε·

transeat, cum hoc circulo in alio adhuc praeter Z puncto v. c. in H ex altera parte rectae EA convenire, adeoque etiam ex hac parte duci posse aliam, adhuc rectam AΘ, quae circulum BΓΔ contingat: duplex itaque semper hoc casu solutio locum habebit. Reducitur autem problema ad illud: construere triangulum rectangulum AEB, cuius hypotenusa AE positione et magnitudine, alter cathetus EB autem magnitudine dantur. Caeterum comparatis duobus triangulis AEB, AEΘ, in quibus hypotenusa AE communis, recta EB=EΘ, et anguli EBA, EΘA, quippe recti aequales sunt, patet, esse etiam rectas AB, AΘ aequales, pariterque aequales esse angulos EAB, EAΘ, et AEB, AEΘ. Duae igitur rectae, quae ex eodem puncto extra circulum sito ita ad circulum duci possunt, ut eum contingant, inter se aequales sunt. Et, quum aequales sint anguli EAΘ, EAB, et AEΘ, AEB, recta AE utrumque angulorum ΘAB, ΘEB bifariam dividit. Hinc porro nonnisi duae rectae ex eodem puncto extra circulum duci possunt, quae eum contingunt.

Obs. 2. Posteriore casu, si e puncto in ipsa circuli circumferentia dato ducenda est recta, quae circulum in hoc

Sit datum punctum A, datus vero circulus $B\Gamma\Delta$; oportet igitur a puncto A rectam lineam ducere, quae circulum $B\Gamma\Delta$ contingat.

Sumatur enim centrum circuli E (III. 1.), et iungatur AE, et centro quidem E intervallo vero EA circulus describatur AZH (Post. 3.), et a A ipsi EA ad rectos ducatur ΔZ (I. 11.), et iungantur EZ, AB; dico a puncto A ductam esse AB circulum $B\Gamma\Delta$ contingentem.

Quoniam enim E centrum est circulorum $B\Gamma\Delta$, AZH, aequalis est EA ipsi EZ, et $E\Delta$ ipsi EB; duae igitur AE, EB duabus ZE, $E\Delta$ aequales sunt, et angulum communem comprehendunt ad E; basis igi-

puncto contingat, ductae ad hoc punctum diametro erigi debet in eo ipso puncto recta ad angulos rectos (III. 16. Cor. 1.). Hinc consequitur, duos circulos, qui se in puncto aliquo A contingant, sive extra sive intra se contingant (Fig. 234. 235.) in hoc puncto ab eadem recta, quae diametris circulorum ad hoc punctum ductis (quae nempe in eadem recta positae erunt Obs. 2. ad III. 11. et Obs. 2. ad III. 12.) ad angulos rectos est, contingi, vel rectam, quae unum duorum circulorum in puncto aliquo A se contingentium in hoc ipso puncto A contingat, contingere in eo quoque alterum. Cf. Apollon. de Taction. Lemm. E. Cor. 7. 8.

Obs. 3. Quum ex Obs. 2. duo, eademque ratione infiniti circuli eandem rectam $B\Gamma$ in eodem puncto A contingere possint, patet, Problema describendi circuli, qui rectam positione datam $B\Gamma$ in dato in ipsa puncto A contingat, non esse determinatum, adeoque alias aliasque conditiones huic (pariterque simili problemati describendi circuli, qui datum circulum in dato in ipsius circumferentia puncto contingat) addi posse. Unde plura huc, vel etiam ad III. 11. aut III. 12. pertinentia problemata oriuntur, quae quum sint satis

βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΕΒΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΔΖ, ὀρθὴ ἄρα καὶ η ὑπὸ ΕΒΑ. Καί ἐστιν ἡ ΕΒ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΑ κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου τοῦ Α τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ηκται ἡ ΑΒ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

facilia, tironibus solvenda proponi possunt v. c. 1) Describere circulum, qui rectam positione datam in dato in ipsa puncto contingat, et per aliud quoddam extra hanc rectam datum punctum transeat. 2) Describere circulum, qui datum circulum in dato in ipso puncto contingat, et per aliud quoddam extra vel intra hunc circulum datum punctum transeat. 3) Describere circulum, qui rectam positione datam in dato in ipsa puncto et simul datum circulum contingat. 4) Describere circulum, qui datum circulum in dato in ipso puncto, e simul rectam positione datam contingat. 5) Describere circulum, qui duos circulos datos, et quidem alterum in dato

tur ΔZ basi AB aequalis est (I. 4.); et triangulum $E\Delta Z$ triangulo EBA aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis; aequalis igitur $E\Delta Z$ ipsi EBA. Rectus autem $E\Delta Z$; rectus igitur et EBA; et est EB ex centro; diametro autem circuli ad rectos ab extremitate ducta contingit circulum (III. 16. Cor. 1.); AB igitur contingit circulum $B\Gamma A$.

A dato igitur puncto A datum circulum $B\Gamma\Delta$ contingens recta linea ducta est AB. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XVIII. (Fig. 237.)

Si circulum contingat aliqua recta, a centro autem ad contactum ducatur aliqua recta, ea perpendicularis erit ad contingentem.

Circulum enim $AB\Gamma$ contingat aliqua recta ΔE in puncto Γ, et sumatur Z centrum circuli $AB\Gamma$, et a Z ad Γ ducatur $Z\Gamma$; dico $Z\Gamma$ perpendicularem esse ad ΔE.

in ipso puncto contingat. 6) Describere circulum, qui duas rectas positione datas, quae sibi invicem occurrunt, et quidem alteram in dato in ea puncto contingat. 7) Describere circulum, qui duas rectas parallelas positione datas, et quidem alteram in dato in ipsa puncto contingat, vel quod eodem redit: dato radio describere circulum, qui rectam positione datam in dato in ea puncto contingat. 8) Dato radio describere circulum, qui rectam positione datam contingat, et per datum extra eam punctum transeat. 9) Dato radio circulum describere, qui duas rectas positione datas, quae inter se conveniunt, contingat. 10) Dato radio circulum describere, qui

Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ. Ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἄρα ἡ ΖΒ [1] *τῆς ΖΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἁπτέσθω [2] *τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.*

1) Peyrardus ex Cod. a habet *μείζων ἄρα καὶ ΖΒ.* Nos praetulimus lectionem ed. Oxon. Ed. Basil. habet *καὶ ἡ ΖΒ.*

2) Si vera sunt, quae e Rob. Simson. ad III. Def. 2. notavimus, legendum hic fuerit *ἐφαπτέσθω.*

circulum positione datum, et rectam positione datam contingat. 11) Dato radio circulum describere, qui circulum positione datum contingat, et per datum extra eum punctum transeat. 12) Dato radio circulum describere, qui duos datos circulos contingat. Denique 13) (quod iam ad III. 1. Cor. 1. pertinet: dato radio circulum describere, qui per duo data puncta transeat. Vid. Pappus in Praefat. libri VII. Collect.

Si enim non, ducatur a Z ad ΔE perpendicularis ZH (I. 12.).

Quoniam igitur angulus $ZH\Gamma$ est rectus, acutus erit $Z\Gamma H$ (I. 17.); maiorem autem angulum maius latus subtendit (I. 19.), maior igitur est $Z\Gamma$ quam ZH. Aequalis autem $Z\Gamma$ ipsi ZB; maior igitur ZB ipsa ZH; minor maiore, quod fieri non potest. Igitur ZH non est perpendicularis ad ΔE. Similiter ostendemus neque aliam quampiam praeter ipsam $Z\Gamma$; ergo $Z\Gamma$ perpendicularis est ad ΔE. Si igitur circulum etc.

PROPOSITIO XIX. (Fig. 240.)

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem contingenti ad angulos rectos recta linea ducatur, in ducta erit centrum circuli.

Circulum enim $\Delta B\Gamma$ contingat aliqua recta ΔE in puncto Γ, et a Γ ipsi ΔE ad rectos angulos ducatur ΓA; dico in $A\Gamma$ esse centrum circuli.

Mathem. ad Taction. Apollonii, vel Apollon. de Taction. Goth. 1795. p. 18.

Obs. 4. Aliud haud inelegans problema, quod huc pertinet, affert Clavius e Cardano, quod ita habet: duobus circulis, quorum neuter alterum includit, datis, ducere rectam, quae utrumque contingat. Exempli causa figuram saltim uni casui adaptatam adponemus (Fig. 236.) e cuius adspectu solutio facile derivari poterit.

Obs. 5. Peletarius ad hunc locum sequens adhuc habet problema: Lineae rectae, quae circulum aliquem secet, aliam parallelam ducere, quae ipsum contingat, quod etiam generalius exprimi potest; rectae positione datae aliam parallelam

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλό τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

ducere, quae circulum contingat, et facillime solvetur ducta e centro ad rectam positione datam perpendiculari, et e puncto, in quo illa circulo occurrit, parallela positione datae. Cf. Gilbert. p. 203.]

PROPOSITIO XVIII.

Obs. 1. Poterat etiam haec propositio e III. Prop. 16., cuius conversa est, ita deduci. Si *ΓΕ* non sit rectae *ΓΖ* ad rectos angulos, *ΓΕ* secabit circulum ex III. 16. adeoque non continget in *Γ*, q. e. a. Orontius Finaeus simili ratione e parte tertia Prop. 16. III. hanc 18. deducere conatur.

Cor. 1. Duae rectae, quae per puncta extrema eiusdem diametri ductae circulum contingunt, parallelae sunt.

Cor. 2. Vicissim, si duae rectae (Eig. 238.) *ΑΓ*, *ΔΘ*, quae circulum in *Β*, *Ε* contingunt, parallelae fuerint, recta *ΒΕ*, quae contactus puncta coniungit, erit diameter. Si enim recta *ΒΕ* non sit diameter, erit centrum circuli extra eam

Non enim, sed si fieri potest, sit Z, et iungatur ΓZ.

Quoniam igitur circulum $AB\Gamma$ contingit aliqua recta ΔE, a centro autem ad contactum ducta est $Z\Gamma$, $Z\Gamma$ perpendicularis est ad ΔE (III. 18.); rectus igitur est $Z\Gamma E$. Est autem et $A\Gamma E$ rectus; aequalis igitur est $Z\Gamma E$ ipsi $A\Gamma E$, minor maiori, quod fieri non potest. Igitur Z non est centrum circuli $AB\Gamma$. Similiter ostendemus, neque aliud aliquod esse praeterquam in ipsa $A\Gamma$. Si igitur circulum etc.

PROPOSITIO XX. (Fig. 241.)

In circulo, angulus ad centrum duplus est anguli ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam pro basi habent anguli.

v. c. in Z, ductisque ZB, ZE, erit $ZB\Gamma$ pariter ac $ZE\Theta$ rectus, adeoque ΓBE pariter ac ΘEB minor recto, igitur rectae $\Delta\Gamma$, $\Delta\Theta$ non erunt parallelae (Ax. 11. vel I. 5. Post) q. e. a.

Cor. 3. Si duae rectae circulum contingant, et recta, quae contactus puncta iungit, non sit diameter, contingentes cum hac recta obliquos angulos efficient, nec parallelae erunt.

Cor. 4. Vicissim, si duae rectae circulum contingentes non sint parallelae, recta, quae contactus puncta iungit, nequit esse diameter (Cor. 1.). Cf. Gilbert. die Geometrie nach le Gendre I. Th. p. 120. sq.

Obs. 2. Alia conversa propositionis III. 26. vel, si mavis, propositionis huius III. 18. haec est: recta, quae e centro circuli ad contingentem perpendicularis demittitur, per contactus punctum transit, et vice versa.

Obs. 3. Si eadem recta duos circulos in eodem puncto contingit, duo isti circuli in eodem puncto se contingent. Quae enim e centris circulorum ad punctum commune, in quo recta

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐπιζευχθείσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλάσιαί εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶ διπλῆ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστὶ διπλῆ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶ διπλῆ.

utrumque contingit, ducuntur rectae ad hanc contingentem perpendiculares, adeoque in eadem recta sitae erunt, unde circuli se contingent (Obs. 2. ad III. 11. et Obs. 2. ad III. 12.).

Obs. 4. (Ex Clavio.) Duobus circulis ex eodem centro Θ descriptis (Fig. 239.) erunt omnes rectae $A\Gamma$, $B\Delta$ interiorem circulum contingentes et usque ad circumferentiam exterioris circuli productae inter se aequales, bifariamque in punctis contactus E, Z secabuntur. Ductae enim ex centro ΘE, ΘZ ad $A\Gamma$, $B\Delta$ perpendiculares erunt (III. 18.), itaque (III. Def. 4.) $A\Gamma$, $B\Delta$ aequaliter a centro distant, quoniam $\Theta E = \Theta Z$. Itaque $A\Gamma = B\Delta$ (III. 14.), et bifariam dividuntur a perpendicularibus ΘE, ΘZ (III. 3.)

PROPOSITIO XIX.

Obs. Haec quoque propositio, vel ut conversa III. propositionis 16. considerari atque ex ea demonstrari potest, vel, ut est apud Euclidem, ut conversa III. propositionis 18. Candalla monente, ut exacte vera sit propositio, addi debet, rectam a contactu contingenti ad rectos angulos ductam secare debere circulum. Id nempe vult, esse debere hanc perpendi-

Sit circulus *ABΓ*, et ad centrum eius sit angulus *BEΓ*, ad circumferentiam vero *BAΓ*, habeant autem eandem circumferentiam *BΓ* pro basi; dico duplum esse angulum *BEΓ* anguli *BAΓ*.

Iuncta enim *AE* producatur ad *Z*.

Quoniam igitur aequalis est *EA* ipsi *EB*, aequalis est angulus *EAB* angulo *EBA* (I. 5.); anguli igitur *EAB*, *EBA* anguli *EAB* dupli sunt. Aequalis autem est *BEZ* angulis *EAB*, *EBA* (I. 32.); Igitur *BEZ* ipsius *EAB* est duplus. Eadem ratione et *ZEΓ* ipsius *EAΓ* duplus est, totus igitur *BEΓ* totius *BAΓ* est duplus.

cularem ad easdem rectae contingentis partes, ad quas est circulus. Quum tamen illa utrimque produci possit, haud necessarium est id addere.

PROPOSITIO XX.

Austin. quidem monet, hanc propositionem latius patere, quam vulgo putent, et circumferentiam, cui anguli insistant, aeque maiorem semicirculo sumi posse ac minorem. Vult igitur angulos quoque gibbos i. e. qui duobus rectis maiores sunt, sub enunciato propositionis comprehendere. Ita nempe propositionem sequentem generalius sumi posse, nec nova id additamentum demonstratione egere. At, quamvis res per se vera sit, et hoc propositionis nostrae *consectarium* etiam a Candalla, Tartalea, Commandino, Clavio, Peletario aliisque exhibeatur, et a nonnullis eorum eadem ratione ac Austin. iubet, ad generaliorem Prop. 21. demonstrationem adhibeatur, valde tamen dubitamus, an Euclides de angulis gibbis in ipsa propositione comprehendendis cogitarit. Nec poterat facile ab angulis sensu consueto sumtis transire ad angulos gibbos, nisi per angulum duobus rectis aequalem, i. e. cuius crura in di-

Κεκλάσθω δὴ παλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπεζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΗΔΓ, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΗΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΔΓ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

rectum ad oppositas partes eiusdem verticis sita sunt: talem autem angulum non agnoscere videtur Euclides; vid. Def. 8. Illud tamen certum est, demonstrationem partis primae VI. 33. non permittere considerationem angulorum gibborum ex elementis excludere. Vide Pfleiderer. Thes. 1791. Thes. 7. Magis autem necessarium fuerit, monere, praetermissum esse ab Euclide eum casum, quo unum crurum anguli, cuius vertex in circumferentia positus est, per ipsum centrum circuli transit, quem casum nominatim habent Clavius, Giordano da Bitonto, Borellius, aliique. Clavius praeterea observat, tacite in demonstratione axiomatis loco sumi, si duae magnitudines duarum magnitudinum sint duplae, singulae singularum, fore quoque summam ex illis summae ex his duplum, vel: si totum totius, et ablatum ablati duplum sit, fore et reliquum reliqui duplum. Et hoc quidem Prop. V. 1. et V. 5. universaliter demonstrari, at hic de duplo ut per se notum sumi. Cf. quae ad finem Axiom. libri I. notavimus. Ipse deinde rem aliter sine hoc axiomate demonstrare docet.

PROPOSITIO XXI.

Obs. 1. Huius propositionis, quae etiam ita exprimi potest: anguli ad circumferentiam eidem segmento insistentes aequales sunt, duo sunt casus, prout segmentum, in quo sunt anguli, de quibus quaeritur, vel maius, vel non maius est

Rursus inflectatur ad circumferentiam alter angulus $B\Delta\Gamma$, et iuncta ΔE producatur ad H. Similiter ostendemus duplum esse angulum $HE\Gamma$ anguli $H\Delta\Gamma$, quorum HEB duplus est anguli $H\Delta B$; reliquus igitur $BE\Gamma$ duplus est reliqui $B\Delta\Gamma$. In circulo igitur etc.

PROPOSITIO XXI. (Fig. 242.)

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, sunt inter se aequales.

semicirculo. Demonstratio textus graeci priorem saltim casum complectitur. Posterioris demonstrationem dedere Commandinus, Clavius, Borellius, Giordano da Ritonto, Baermannus, Rob. Simson, aliique. Rob. Simsonis demonstratio simplicissima est. Ea sic habet: sit (Fig. 243.) Segmentum $BAE\Delta$ non maius semicirculo, et in ipso sint anguli $BA\Delta$, $BE\Delta$. Ducatur ad centrum Z recta AZ, et producatur ad Γ, iungatur que $E\Gamma$. Segmentum igitur $BAE\Gamma$ est maius semicirculo, adeoque ex casu I. est $BA\Gamma = BE\Gamma$. Eodem modo segmentum $\Gamma AE\Delta$ est maius semicirculo, adeoque $\Gamma A\Delta = \Gamma E\Delta$. Totus igitur angulus $BA\Delta$ toti $BE\Delta$ est aequalis. Plures alias demonstrationes habent Commandinus, Clavius, aliique. Et necessaria est omnino casus quoque posterioris mentio ad perfectam propositionis sequentis demonstrationem. Caeterum, fuerit, quae in praeparatione ad demonstrationem sumuntur, fieri possint, nempe ut centrum circuli inveniri possit ex III. 1., integer circulus datus esse supponitur. Quodsi enim segmentum tantum circuli datum foret, res demum per III. 25. effici posset. Et in textu quidem graeco integer circulus datus ponitur: ἔστω κύκλος. Nihil tamen impedit, etiam segmentum solum datum ponere: propositio enim III. 25. non a III. 21. pendet, et etiam ante hanc poni poterat.

Obs. 2. Vicissim, si super eadem recta $B\Delta$ (Fig. 244.) ad easdem eius partes constituti sint duo anguli aequales $BA\Delta$,

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστὶ διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

$BE\Delta$, circulus per puncta extrema rectae B, Δ, et per verticem unius anguli descriptus transibit etiam per verticem alterius anguli. Si enim fieri potest, circulus per puncta B, Δ, Δ descriptus (III. 10. Cor. 1.) non transeat per punctum E, quamvis sit $BE\Delta = BA\Delta$, erit itaque punctum E vel intra vel extra circulum $BA\Delta$. Sit 1) intra circulum $BA\Delta$, recta itaque BE producta secabit circulum in puncto aliquo H (III. 2. Cor. 3.), ductaque $H\Delta$, erit, ex hac propositione, $BH\Delta = BA\Delta$. At ex hypoth. etiam $BE\Delta = BA\Delta$. Itaque $BH\Delta = BE\Delta$, quod fieri nequit I. 16. Eadem ratione 2) ostenditur punctum E neque extra circulum cadere: cadet itaque in ipsam circuli circumferentiam. Conversam hanc habent Clavius, Giordano da Bitonto, Borellius, Tacquet, aliique. Aliter, at haud satis accurate expressa ea legitur apud Gruson. Abhandl. der Kön. Acad. der Wissenschaft. zu Berlin für 1814—51. p. 55, §. 27.

Obs. 3. Hinc porro consequitur sequens Theorema, quod

Sit circulus $AB\Gamma\Delta$, et in eodem segmento $BAE\Delta$ anguli sint $BA\Delta$, $BE\Delta$; dico angulos $BA\Delta$, $BE\Delta$ esse inter se aequales.

Sumatur enim centrum circuli $AB\Gamma\Delta$ (III. 1.), et sit Z, et iungantur BZ, $Z\Delta$.

Et quoniam angulus $BZ\Delta$ est ad centrum, angulus vero $BA\Delta$ ad circumferentiam, et habent eandem circumferentiam $B\Gamma\Delta$ pro basi; angulus $BZ\Delta$ duplus est anguli $BA\Delta$ (III. 20.). Ex eadem ratione angulus etiam $BZ\Delta$ anguli $BE\Delta$ est duplus; aequalis igitur $BA\Delta$ ipsi $BE\Delta$. In circulo igitur etc.

PROPOSITIO XXII. (Fig. 246.)

Quadrilaterorum, quae in circulis sunt, anguli oppositi duobus rectis aequales sunt.

est apud Serenum de sectione cylindri Prop. 46. 47. Cf. Gilbert. Geom. I. Th. p. 172. Si fuerit (Fig. 245.) $A\Delta B$ segmentum quodcunque circuli atque in eo punctum Γ ita positum, ut sit recta $\Gamma A = \Gamma B$, et describatur centro Γ, radio ΓA circulus $A\Theta B$, qui itaque et per B transibit, erit summa crurum anguli cuiusvis $A\Delta B$ super AB, cuius vertex in segmento $A\Delta B$ positus est, aequalis rectae BE, quae obtinetur, si alterutrum crus producatur, dum cum circulo $A\Theta B$ conveniat. Quum enim sit, si $B\Gamma$ ad Z producatur, $\Gamma Z = \Gamma B = \Gamma A$ (I. Def. 15.) erit triangulum $ZA\Gamma$ aequicrurum, adeoque angulus $ZA\Gamma = AZ\Gamma$ (I. 5.). Et, quum ex nostra propositione sit $A\Delta B = A\Gamma B$, adeoque et $A\Delta E = A\Gamma Z$ (I. 13.) et $AB\Delta = AZ\Gamma$ (III. 21.), erit et $BA\Delta = ZA\Gamma$ (I. 32. Cor. 3.) $= AZ\Gamma = AE\Delta$, ideoque $\Delta A = \Delta E$ (I. 6.) et $\Delta A + \Delta B = \Delta E + \Delta B = BE$. Et, quum eodem modo sit $\Gamma A + \Gamma B = BZ$, at BZ, quippe diameter circuli $A\Theta B$ maior, quam BE (III. 15.), erit etiam $\Gamma A + \Gamma B > \Delta A + \Delta B$, i. e. inter omnia triangula super eadem

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΒΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ

basi AB constituta, et quorum angulus basi oppositus aequalis est, quae igitur in eodem circuli segmento constituuntur (Obs. 2.) triangulum aequicrurum maximam habet summam crurum, adeoque maximam laterum omnium summam: reliquorum vero crurum summa eo minor erit, quo magis BE a diametro distat (Obs. ad III. 15. sub finem.). Denique observari potest, si etiam $A\Delta$ producatur ad Θ, fore et $\Delta\Theta = \Delta B$, et $A\Theta = \Delta A + \Delta B$, adeoque $= BE$, et quum in triangulis $E\Delta\Theta$, $A\Delta B$ si $E\Delta = A\Delta$, $\Delta\Theta = \Delta B$, et anguli ad verticem aequales (I. 15.) erit et recta $E\Theta = AB$ (I. 4.).

PROPOSITIO XXII.

Obs. 1. Cor. 1. Si latus quodcunque quadrilateri in in circulo descripti extra circulum producatur, erit angulus externus aequalis angulo quadrilateri interno opposito. Habent hoc Cor. Clavius, Tacquet., alii.

Obs. 2. Cor. 2. In quadrilatero circulo inscripto summa duorum angulorum oppositorum aequalis est summae reliquorum duorum angulorum oppositorum, vel: si anguli quadrilateri circulo inscripti, initio a quovis eorum facto, ordine, quo se invicem insequuntur, numeris indicentur, erit summa angulorum primi et tertii aequalis summae angulorum secundi et quarti. Hinc consequitur, rhombum et rhomboidem circulo non inscribi posse.

Sit circulus $AB\Gamma\Delta$, et in ipso quadrilaterum $AB\Gamma\Delta$; dico angulos ipsius oppositos duobus rectis aequales esse.

Iungantur $A\Gamma$, $B\Delta$.

Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis aequales sunt (I. 32.), trianguli $AB\Gamma$ tres anguli $\Gamma\Delta B$, $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ duobus rectis aequales sunt. Aequalis autem est $\Gamma\Delta B$ angulo $BA\Gamma$ (III. 21.), etenim in eodem sunt segmento $BA\Delta\Gamma$, et $A\Gamma B$ angulo $A\Delta B$ (III. 21.) etenim in eodem sunt segmento

Obs. 3. Ea, quae in Cor. 2. dicta sunt, generalius de figura quacunque, quae parem laterum numerum habet, et circulo inscripta est, valet: nempe, si anguli talis figurae, initio facto a quovis eorum, ordine numeris indicentur, erit summa angulorum numeris imparibus 1. 3. 5. etc. notatorum aequalis summae angulorum numeris paribus 2. 4. 6. etc. notatorum. Huius propositionis demonstratio pro quavis figura circulo inscripta $AB\Gamma\Delta EZH\Theta$ . . . quae parem habet laterum numerum, ita instrui potest: Sit (Fig. 247.) centrum circuli O, atque ex eo ducantur rectae OA, OB, $O\Gamma$, $O\Delta$ etc. quae efficient triangula OAB, $OB\Gamma$, $O\Gamma\Delta$ etc. quae singula erunt aequicrura (I. Def. 24.), adeoque in quolibet eorum anguli ad basin erunt aequales (I. 5.) i. e.

$$\begin{aligned} \text{erit } OAB &= OBA \\ O\Gamma B &= OB\Gamma \\ O\Gamma\Delta &= O\Delta\Gamma \\ OE\Delta &= O\Delta E \\ OEZ &= OZE \\ OHZ &= OZH \\ OH\Theta &= O\Theta H \\ OA\Theta &= O\Theta A \end{aligned}$$

unde, omnibus in unam summam collectis, erit $(OAB+OA\Theta)+(O\Gamma B+O\Gamma\Delta)+(OE\Delta+OEZ)+(OHZ+OH\Theta)=(OBA+OB\Gamma)$

ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστίν. Κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια, καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη [1].

1] Commandinus observat, in vetusto aliquo codice verba: ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη deesse. In omnibus tamen editionibus illa habentur, nec Peyrardus codicum varietatem in iis notat.

$+(O\Delta\Gamma+O\Delta E)+(OZE+OZH)+(O\Theta H+O\Theta A)$ i. e. integri anguli $A+\Gamma+E+H=$ integris angulis $B+\Delta+Z+\Theta$. Et facile patet, idem ratiocinium continuari posse, quisquis in figura pari laterum numero circulo inscripta laterum numerus fuerit. Et simile erit ratiocinium, etiamsi integra figura inscripta sit segmento, quod non maius sit, quam semicirculus. Caeterum facillime etiam, quod Collega amicissimus Kausler, quum hanc propositionem cum eo communicassem, monuit, generaliter etiam res ita demonstrabitur. Sit propositio nostra demonstrata pro figura eiusmodi quacunque, in qua numerus laterum $=2n$, ac vera etiam erit propositio pro figura, cuius laterum numerus $=2n+2$. Sit nempe (Fig. 248.) figura $AB\Gamma\Delta EZH\Theta$, cuius numerus laterum $=2n+2$, in circulo. Iam, si ducta recta $\Gamma\Theta$ tria quaecunque latera figurae $A\Theta$, ΔB, $B\Gamma$ a reliqua figura abscindantur, reliqua figurae latera $\Gamma\Delta$, ΔE, EZ, ZH, $H\Theta$ erunt numero $2n-1$, quibus si addas latus $\Gamma\Theta$,

ΑΔΓΒ. Totus igitur *ΑΔΓ* angulis *ΒΑΓ*, *ΑΓΒ* aequalis est. Communis addatur *ΑΒΓ*; ergo *ΑΒΓ*, *ΒΑΓ*, *ΑΓΒ* angulis *ΑΒΓ*, *ΑΔΓ* aequales sunt. Sed *ΑΒΓ*, *ΒΑΓ*, *ΑΓΒ* duobus rectis aequales sunt; et *ΑΒΓ*, *ΑΔΓ* igitur duobus rectis aequales sunt. Similiter ostendemus, et angulos *ΒΑΔ*, *ΔΓΒ* duobus rectis esse. In circulis igitur etc.

PROPOSITIO XXIII. (Fig. 251.)

Super eadem recta duo segmenta circulorum similia et inaequalia non constituentur ex eadem parte.

erit figura *ΓΔΕΖΗΘ* circulo inscripta laterum numero $=2n$. Atqui ex hypothesi demonstratum est, in hac figura esse angulos $\Theta\Gamma\Delta+E+H=\Delta+Z+H\Theta\Gamma$. Praeterea in quadrilatero *ΑΒΓΘ* circulo inscripto est ex Obs. 2. $A+B\Gamma\Theta=B+\Gamma\Theta A$. Itaque $A+(B\Gamma\Theta+\Theta\Gamma\Delta)+E+H=B+(\Gamma\Theta A+H\Theta\Gamma)+\Delta+Z$ i. e. integri anguli $A+\Gamma+E+H=$ integris angulis $B+\Delta+Z+\Theta$.

Obs. 4. Propositio observatione praecedente allata totidem verbis quidem applicari nequit ad figuras circulo inscriptas, quae imparem habent laterum numerum. Prout enim, initio ab aliquo angulo facto, reliquos dextrorsum vel sinistrorsum numeres, alii aliique anguli in eandem summam convenient, unde e praecedente propositione verbotenus applicata contradictoria consequerentur. *Similis* tamen propositio etiam in talibus figuris *ΑΒΓΔΕ* (Fig. 249.) locum habet, si recta e centro circuli *O* ad verticem anguli cuiuscunque *E* ducta, hunc in duos angulos *OEΔ*, *OEA* dividamus, atque has integri anguli *E* partes separatim numeremus. Ita enim pariter summa angulorum numeris imparibus notatorum aequalis erit summae angulorum numeris paribus notatorum, quod eadem ratione demonstrabitur, ac in Obs. 3. ductis nempe radiis ad omnes an-

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμῆμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῆς ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα τῷ ΓΖΔ τμήματι.

gulorum vertices. Neque tamen haec propositio ita enunciata semper valet, si integra figura inscripta sit segmento, quod minus sit semicirculo, sed tum levi aliqua mutatione opus erit quod hic monuisse sufficiat. Cf. l'Huilier de Relatione mutua Capacit. et Terminor. fig. §. 215. De figuris, quae angulos gibbos habent, neque in Obs. 3. neque in Obs. 4. sermo est: nec omnino huius generis figurae circulo inscriptae esse possunt, nisi forte e lateribus figurae alia alia secent.

Obs. 5. Propositio III. 22. vel, quod eodem redit, propositio, quam in Obs. 2. habuimus, valet etiam conversa. Nempe, si in quadrilatero duo anguli oppositi aequales fuerint duobus rectis, circulus per tres quadrilateri vertices transiens (qui semper describi potest, III. 10. Cor. 1.) transibit etiam per verticem quarti anguli. Id enim eodem modo demonstrabitur, ac in III. Prop. 21. Obs. 2. Nominatim igitur circa quadratum et rectangulum circulus describi potest.

Si enim fieri potest ad eandem rectam AB duo segmenta circulorum similia et inaequalia constituantur ex eadem parte $A\Gamma B$, $A\Delta B$, et ducatur $A\Gamma\Delta$, et iungantur ΓB, ΔB.

Quoniam igitur simile est segmentum $A\Gamma B$ segmento $A\Delta B$, similia autem segmenta circulorum sunt quae capiunt angulos aequales (III. Def. 11.); aequalis igitur est angulus $A\Gamma B$ angulo $A\Delta B$, exterior interiori, quod fieri nequit (I. 16.). Non igitur super eadem recta etc.

PROPOSITIO XXIV. (Fig. 252.)

Super aequalibus rectis similia circulorum segmenta aequalia inter se sunt.

Sint enim super aequalibus rectis AB, $\Gamma\Delta$ similia segmenta circulorum AEB, $\Gamma Z\Delta$; dico aequale esse segmentum AEB segmento $\Gamma Z\Delta$.

Obs. 6. At, quae in Obs. 3. et 4. continentur propositiones, nequeunt converti, i. e. si v. c. in figura aliqua, quae parem laterum numerum habet, sit summa angulorum imparium 1. 3. 5. etc. aequalis summae angulorum 2. 4. 6. etc. inde haud consequitur, circulum describi posse, qui per omnes figurae vertices transeat. Sunt potius innumeri casus, quibus id fieri nequit. Sit enim v. g. (Fig. 250.) in circulo Hexagonum $AB\Gamma\Delta EZ$, in quo itaque ex Obs. 3. erunt anguli $A+B\Gamma\Delta+E=AB\Gamma+\Delta+Z$. Producantur duo latera AB, $A\Gamma$ lateri $B\Gamma$ contigua, donec rectae ΘH, quae parallela ducta est rectae $B\Gamma$, occurrant in punctis Θ, H, eritque (I. 29.) angul. $\binom{A\Theta H}{\Theta}=AB\Gamma$, et $\binom{\Delta H\Theta}{H}=B\Gamma\Delta$, adeoque $A+H+E=\Theta+\Delta+Z$ i. e. figura $A\Theta H\Delta EZ$ ita comparata est, ut summa angulorum imparium aequalis sit summae angulorum parium, neque tamen circulus per vertices figurae $A\Theta H\Delta EZ$ transire

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΕΒ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· τῆς δὲ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσάσης, ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. Εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει [1]), ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται. Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπερ ἐστὶ τμῆμα.

Ἔστω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου, τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπερ ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τμῆμα.

1) Post verba μὴ ἐφαρμόσει edd. Oxon. et Basil. habent: ἀλλὰ παραλλάξει, ὡς τὸ ΓΘΗΔ. Κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ ΓΘΗΔ τὸν ΓΖΔ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ etc. cum qua lectione consentiunt omnes a Peyrardo collati codd. praeter codicem a, quem secutus Peyrardus ita legit, ut nos quoque expressimus. Verum etiam in hac lectione quam veriorem putamus, aliquid desiderari posse videtur; quo ostendatur, ex III. 23. unum segmentum circuli neque extra neque intra alterum cadere posse. Idem sentire videntur DeLambre et Prony in relatione ad Instit. Franc. facta.

potest. Circulus enim, qui per tria puncta Α, Ζ, Β transit, per haec puncta omnimode determinatus est (III. 10. Cor. 1.),

Congruente enim segmento *AEB* segmento *ΓZΔ*, et posito puncto *A* super *Γ*, recta vero *AB* super *ΓΔ*, congruet et punctum *B* puncto *Δ*, propterea quod aequalis est *AB* ipsi *ΓΔ*; ipsa autem *AB* ipsi *ΓΔ* congruente, congruet et segmentum *AEB* segmento *ΓZΔ*. Si enim *AB* recta ipsi *ΓΔ* congruat, segmentum autem *AEB* segmento *ΓZΔ* non congruat, vel intra ipsum cadet, vel extra, vel pertransibit ut *ΓΘHΔ*, et circulus circulum secabit in pluribus punctis quam duobus, in punctis *Γ*, *H*, *Δ*, quod fieri non potest (III. 10.). Non igitur congruente recta *AB* ipsi *ΓΔ* non congruet segmentum *AEB* segmento *ΓZΔ*. Congruet igitur, et aequale ipsi erit. Ergo super aequalibus etc.

PROPOSITIO XXV. (Fig. 253. a. b. c.)

Circuli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

Sit datum circuli segmentum *ABΓ*; oportet describere circulum, cuius *ABΓ* est segmentum.

nec itaque alius esse potest, quam circulus *AZEΔΓB*. At hic circulus rectas *AB*, *ΔΓ* secat alteram in punctis *A*, *B*, alteram in punctis *Δ*, *Γ*, neque igitur iterum eas secare potest in punctis *Θ*, *H* (III. 2. Cor. 1.) i. e. nequit transire per vertices *Θ*, *H* figurae *AΘHΔEZ*. Pariter res demonstrabitur de conversa eius, quam Obs. 4. habuimus.

PROPOSITIO XXIII.

Obs. 1. Quamvis verba: ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη non omitti possint ob demonstrationem, verum tamen est, quod Campa-

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἤτοι μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων.

Ἔστω πρότερον μείζων; καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΔΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΕ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΕ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος κύκλος. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. Καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ τὸ Ε κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυγχάνειν.

nus, Commandinus, Clavius, Peletarius, aliique monent, nec e diversis eiusdem rectae partibus esse posse duo segmenta similia et inaequalia, quod facile patet, si alterum eorum circa rectam communem circumvolutum ponatur, ita ut iam sint ex eadem rectae communis parte.

Obs. 2. Rob. Simson. monet, in Prop. 23. ostendendum esse, non posse ex eadem rectae *AB* parte constitui duo circuli segmenta similia et inaequalia, quorum alterum alterum secet [quoniam] non plura duobus punctis *A* et *B* communia

Secetur enim $A\Gamma$ bifariam in Δ (I. 10.), et ducatur a puncto Δ ipsi $A\Gamma$ ad rectos angulos ΔB (I. 11.), et iungatur AB. Ergo angulus $AB\Delta$ ipso $BA\Delta$ vel maior est, vel aequalis, vel minor.

Sit primum maior, et constituatur ad rectam BA, et ad punctum in ea A, angulo $AB\Delta$ aequalis angulus BAE (I. 23.), et producatur ΔB ad E, et iungatur $E\Gamma$. Et quoniam aequalis est angulus ABE ipsi BAE, aequalis est et recta BE rectae EA (I. 6.). Et quoniam aequalis est $A\Delta$ ipsi $\Delta\Gamma$, communis autem ΔE, duae $A\Delta$, ΔE duabus $\Gamma\Delta$, ΔE aequales sunt, utraque utrique, et angulus $A\Delta E$ angulo $\Gamma\Delta E$ est aequalis; rectus enim uterque; basis igitur AE basi ΓE est aequalis (I. 4.). Sed AE ipsi EB ostensa est aequalis; et BE igitur ipsi ΓE est aequalis; tres igitur AE, EB, $E\Gamma$ aequales inter se sunt; ergo circulus centro E, intervallo autem una ipsarum AE, EB, $E\Gamma$ descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit descriptus circulus (III. 9.). Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus. Et manifestum est segmentum $AB\Gamma$ minus esse semicirculo, propterea quod centrum E extra ipsum cadit.

habere possunt III. 10.) ne postea demum ad Prop. 24. id demonstrare necesse sit. Caeterum Campanus in Prop. 23. paullo prolixius distinguit casus, quibus punctum Γ in uno crurum anguli $A\Delta B$, aut extra hunc angulum, aut intra eum situm est.

PROPOSITIO XXIV.

Obs. 1. Robert. Simson., postquam Prop. 23. ita ut Obs. 2. ad III. 23. diximus, demonstraverat, breviter iam ex-

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶν ταῖς ΕΘ, ΘΖ ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Η γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι, καὶ ἐστιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ· τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμή-

PROPOSITIO XXV.

Obs. Boermann., Rob. Simson. et Playfair eos casus, quibus segmentum datum non est semicirculus, coniunctim demonstrant. Quod ad additam observationem attinet, quibus casibus segmentum *datum* maius aut minus semicirculo, aut ei aequale sit, Austin. monet, eam ita positam esse, quasi ex demonstratione demum id detegatur. Campanus rem invertit, et monstrat, si segmentum minus fuerit semicirculo, fore angulum *ΑΒΔ* maiorem angulo *ΒΑΔ*; si semicirculus, fore hos angulos aequales; si maius semicirculo, fore *ΑΒΔ* minorem angulo *ΒΑΔ*, quod ipsum ut corollarium addit Billingsley. Caeterum Campanus, Peletarius, Billingsley, Tacquet, aliique problema ita etiam solvunt, ut duas quascunque chordas in segmento ducant, et eas rectis bisecent, quas ipsis ad angulos rectos erigunt: Orontius Finens, Clavius, Billigsley, Barrov., Coëtsius, Henrion hanc solutionem simpliciorem reddunt, dum duas chordas ita ducunt, ut unum circumferentiae punctum commune habeant. Austin. denique observat, in constructione problematis sumi, angulos, et latera trianguli dato segmento inscripti dari: hoc autem posito omitti posse hanc propositionem, utpote in generaliore IV. 5. comprehensam. Quod quamvis verum sit, in solutione nostri problematis ope IV. 5. facta addi tamen debet, circuli ita descripti partem ex III. 23. cum dato segmento coincidere.

PROPOSITIO XXVI.

Obs. Paullo distinctius procedit demonstratio, si duo

Iungantur enim $B\Gamma$, EZ.

Et quoniam aequales sunt circuli $AB\Gamma$, ΔEZ; aequales sunt, quae ex centris (III. Def. 1.); duae igitur BH; $H\Gamma$ duabus $E\Theta$, ΘZ aequales sunt; et angulus ad H angulo ad Θ aequalis est; basis igitur $B\Gamma$ basi EZ est aequalis (I. 4.). Et quoniam aequalis est angulus ad A angulo ad Δ, simile igitur est segmentum $BA\Gamma$ segmento $E\Delta Z$ (III. Def. 11.), et sunt super aequales rectas $B\Gamma$, EZ; quae autem su-

casus, prout anguli ad centrum vel ad peripheriam aequales ponuntur, separatim tractantur, quod fecere Campanus, Clavius, Peletarius, Coëtsius. Ostendendum nempe est, et ex uno supposito consequi alterum ope III. 20. Praeterea iure adhuc addit Clavius, demonstrationem eius casus, quo anguli ad peripheriam $BA\Gamma$, $E\Delta Z$ non sunt minores recto, adeoque, ut ex III. 25. consequitur, segmenta $BA\Gamma$, $E\Delta Z$ non minora semicirculo. Is casus nisi in III. 20. cum Austino angulos gibbos quoque comprehendere velis, ne manca sit demonstratio, si anguli $BA\Gamma$, $E\Delta Z$ obtusi fuerint ope III. 22. ad casum angulorum acutorum reduci debet: sin hi anguli recti fuerint, res ex I. Ax. 8. patet. Ante omnia autem monendum fuerit, angulos $BA\Gamma$, $E\Delta Z$ vel semicirculis insistere, vel segmentis, quae maiora vel minora sint semicirculis, prout ipsi recti, obtusi aut acuti fuerint ex conversa III. 31. quae ante hanc 26. poni potest. Denique Commandinus, Clavius aliique monent, has et tres sequentes propositiones etiam in uno eodemque circulo locum habere.

Cor. 1. Hinc etiam in aequalibus circulis circumferentiae, in quibus sunt anguli aequales, aequales erunt. Nempe, quum circumferentiae, quibus anguli aequales insistunt, aequales sint, aequalia etiam erunt reliqua circulorum segmenta (I. Ax.) i. e. circumferentiae, in quibus sunt anguli aequales.

Cor. 2. Cf. Clavium ad III. 27. vel Pappi Collect. Mathem. Comment. ad III. 52. Prop. Si in circulo fuerint duae rectae parallelae $A\Delta$, $B\Gamma$ (Fig. 255.) et punct aearum ex-

ματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΔΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι. Ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμῆμα λοιπῷ ΕΔΖ ἴσον· ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρεια ἐστιν ἴση τῇ ΕΔΖ περιφερείᾳ. Ἐὰν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

trema, quae ex eadem parte sunt, iungantur rectis AB, $\Gamma\Delta$, erunt circumferentiae a parallelis interceptae AB, $\Gamma\Delta$ aequales. Ductis enim rectis $B\Delta$, ΓA, erunt anguli $A\Gamma B$, $\Gamma A\Delta$ aequales (I. 29.), adeoque aequales erunt circumferentiae, quibus insistunt (III. 26. Obs.).

Cor. 3. Vid. Clavius. Si in aequalibus circulis, vel in eodem circulo duo anguli inaequales fuerint (sive illi sint anguli ad centrum, sive ad peripheriam), arcus quoque, vel circumferentiae, quibus insistunt, inaequales erunt, nominatim ea circumferentia, cui maior angulus insistit, etiam ipsa maior erit. Et si unus istorum angulorum sit multiplum alterius anguli, arcus quoque, cui unus angulus insistit, idem multiplum eius arcus erit, cui alter angulus insistit. Hoc corollarium etiam de angulis gibbis i. e. duobus rectis maioribus, vel, si mavis de summa angulorum duobus rectis maiore vel iis aequali valet, dummodo pro arcu, cui insistunt, etiam eam circuli partem sumas, quae semicirculo vel aequalis vel maior est.

PROPOSITIO XXVII.

Obs. Est haec propositio conversa prioris. Ad pleniorem eius demonstrationem pariter ac in III. 26. separatim tra-

per aequales rectas similia sunt segmenta circulorum aequalia inter se sunt (III. 24.); aequale igitur segmentum *BAΓ* segmento *EΔZ*. Est autem et totus *ABΓ* circulus toti *ΔEZ* circulo aequalis; reliquum igitur *BKΓ* segmentum reliquo *EΔZ* aequale; ergo circumferentia *BKΓ* aequalis est circumferentiae *EΔZ*. Si igitur in aequalibus etc.

PROPOSITIO XXVII. (Fig. 256.)

In aequalibus circulis anguli aequalibus circumferentiis insistentes aequales inter se sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

ctandi sunt casus, quibus circumferentiae, quae aequales ponuntur, non minores sunt semicirculo, quod simili ratione ope III. 22. fieri potest.

Cor. 1. E Clavio. Duae rectae *AΔ*, *BΓ* (Fig. 255.), quae inter se in circulo aliquo aequales arcus *AB*, *ΔΓ* intercipiunt, sunt parallelae. (Est haec convers. Cor. 2. III. 26. Prop.) Quum enim circumferentia *AB* sit aequalis circumferentiae *ΓΔ*, erit (III. 27. coll. Obs. ad III. 26. sub finem) angulus *AΓB*=*ΓAΔ*, adeoque *AΔ*, *BΓ* parallelae (I. 28.).

Cor. 2. Et quum etiam circumferentiae *AΔΓ*, *ΔAB* aequales sint, aequales erunt anguli *ABΓ*, *ΔΓB* (III. 27.), adeoque rectae *AB*, *ΓΔ*, nisi hi anguli simul aequales sint duobus rectis, inter se convenient, ita, ut triangulum isosceles constituant (I. 6.), cuius vertex igitur situs erit in recta, quae e media basi *BΓ* perpendicularis ad eam erigitur (I. 26. Cor. 4.) i. e. (III. 1. Cor. 1.) in diametro ad mediam basin *BΓ* ducta.

Cor. 3. Pariter, si puncta istarum parallelarum e diversis partibus sita iungantur rectis *BΔ*, *AΓ*, quae se necessario intersecant in puncto aliquo *E*, aequales erunt anguli *AΓB*, *ΔBΓ*, adeoque (I. 6.) aequales sunt rectae *BE*, *ΓE*,

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, πρὸς μὲν τοῖς Η, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ [1]) γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἔσται. Ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η, τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΚ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ. Ἀλλ' ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ· ἴση ἄρα. Καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Α, τῆς δὲ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

1) Ita cum Peyrardo ex Cod. a. omnino legendum esse videtur. Edd. Oxon. et Basil. cum omnibus reliquis a Peyrardo comparatis manuscriptis habent: Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, φανερὸν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν· εἰ δὲ οὔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν etc. Quae tamen, quum ad finem emonstrationis denuo aequalitas angulorum Α et Δ ex aequalitate angulorum ΒΗΓ, ΕΘΖ deducatur, minus apta videntur.

atque ex eadem ratione rectae ΑΕ ΔΕ, vel punctum Ε quoque positum est in recta, quae e media basi ΒΓ perpendicularis ad eam erigitur (I. 26. Cor. 4.) i. e. (III. 1. Cor. 1.) in diametro ad mediam basin ducta. Haec Corollaria habet Gilbert. p. 127.

Cor. 4. E Clavio, qui ad Candanum de Subtilit. id re-

In aequalibus enim circulis $AB\Gamma$, ΔEZ, aequalibus circumferentiis $B\Gamma$, EZ ad centra H, Θ, anguli insistant $BH\Gamma$, $E\Theta Z$, ad circumferentias vero anguli $BA\Gamma$, $E\Delta Z$; dico angulum $BH\Gamma$ angulo $E\Theta Z$ esse aequalem, angulum vero $BA\Gamma$ angulo $E\Delta Z$.

Si enim inaequalis sit angulus $BH\Gamma$ angulo $E\Theta Z$, unus ipsorum maior erit. Sit maior $BH\Gamma$, et constituatur ad rectam BH, et ad punctum in ea H, angulo $E\Theta Z$ aequalis BHK (I. 23.); aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistunt, quando ad centra sunt (III. 26.); aequalis igitur circumferentia BK circumferentiae EZ. Sed EZ ipsi $B\Gamma$ aequalis est, et BK igitur ipsi $B\Gamma$ est aequalis (I. Ax. 1.), minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur inaequalis est angulus $BH\Gamma$ angulo $E\Theta Z$; aequalis igitur. Et est ipsius quidem $BH\Gamma$ dimidius angulus ad A, ipsius vero $E\Theta Z$ dimidius angulus ad Δ (III. 20.); aequalis igitur et angulus ad A angulo ad Δ. In aequalibus igitur etc.

fert. Cf. Gilbert. p. 150. Si (Fig. 257.) in circulo ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secantibus, altera earum $A\Gamma$ producatur, sintque quadrantes ex una parte illius in partes quotcunque aequales ΓZ, ZI, IB, et totidem $A\Theta$, ΘH, HB divisi, iungantur que rectae $Z\Theta$, IH etc. quae ex Cor. 1. parallelae erunt, atque ex puncto extremo B alterius diametri per punctum divisionis I ipsi ex una parte proximum recta ducatur IB, quae cum altera diametro conveniet in K: erit tota recta KA inter punctum concursus K et concavam peripheriam circuli omnibus parallelis IH, $Z\Theta$ etc. una cum diametro $A\Gamma$ simul sumtis, aequales. Nam quum, ob arcus aequales, rectae IH, $Z\Theta$, $A\Gamma$ i. e. IH, KA, et $Z\Theta$, $A\Gamma$ (Cor. 1.) et ex eadem ratione BI, HZ (adeoque IK, HA), HZ, $\Theta\Gamma$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ, τὰς μὲν ΒΑΓ, ΕΔΖ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι, τὰς δὲ ΒΗΓ, ΕΘΖ ἐλάττονας· λέγω ὅτι ἡ μὲν ΒΑΓ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΕΔΖ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΒΗΓ ἐλάττων περιφέρεια τῇ ΕΘΖ ἐλάττονι.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

(adeoque ΖΛ, ΘΓ) parallelae sint, erit ΙΗ=ΚΛ, et ΖΘ=ΛΓ (I. 34.) adeoque ΚΛ=ΚΛ+ΛΓ+ΓΛ=ΙΗ+ΖΘ+ΓΛ.

Cor. 5. Si (Fig. 258.) semicirculus ΑΔΕΗ (qui in Cor. praeced. in numerum parem partium aequalium quemcunque divisus fuerat) iam dividatur in numerum imparem partium aequalium quemcunque ΛΒ, ΒΓ, ΓΔ etc. et ducantur per puncta aequaliter a diametro distantia rectae ΒΘ, ΓΖ etc. quae inter se et cum diametro ΑΟΗ parallelae erunt (Cor. 1.), et ad extremitates eius harum parallelarum, quae a diametro ΑΗ maxime distat, ducantur e centro Ο radii ΟΔ, ΟΕ, summa rectarum βϑ, γε, ΔΕ, quas hi radii e parallelis intercipiunt, aequalis erit radio ΑΟ. Nam rectae ΔΟ, ΕΟ productae ad Μ, Ν, ob angulum ΜΟΝ=ΔΟΕ (I. 15.) arcum ΜΝ=ΔΕ abscindent (III. 26.). Ductis deinde per Δ, Γ rectis ΔΛ, ΓΚ etc. parallelis rectae ΕΜ, abscindentur arcus ΜΛ, ΛΚ etc. aequales arcubus ΔΕ, ΔΓ etc. (III. 26. Cor. 2.) et, quum integer semicirculus ΜΛΕ aequalis sit semicirculo ΑΔΗ, adeoque tot arcus aequales inter se, et arcubus ΛΒ, ΒΓ etc. contineat, quot habet semicirculus ΑΔΗ, reliquus etiam arcus ΛΚ aequalis erit arcui ΒΓ, adeoque ducta ΒΛ parallela erit rectae ΓΚ.

PROPOSITIO XXVIII. (Fig. 260.)

In aequalibus circulis aequales rectae aequales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

Sint aequales circuli $AB\Gamma$, ΔEZ, et in ipsis aequales rectae $B\Gamma$, EZ [1]), circumferentias quidem $BA\Gamma$, $E\Delta Z$ maiores auferentes, circumferentias vero $B\Theta\Gamma$, $E\Theta Z$ minores; dico maiorem quidem $BA\Gamma$ aequalem esse maiori $E\Delta Z$, minorem vero $B\Theta\Gamma$ minori $E\Theta Z$.

Sumantur enim centra circulorum, K, Λ, et iungantur BK, $K\Gamma$, $E\Lambda$, ΛZ.

1) In figuris et textu litteras reposuimus, quales sunt in edd. Oxon. et Basil. et in figura propositionis sequentis, quum Peyrardus nullam causam mutatarum litterarum afferat.

Pariter rectae ΓM, $B\Lambda$ etc. inter se, et diametro ΔN parallelae erunt (Cor. 1.) Et quum $\Gamma\Delta$, ΔM sint arcus aequales, rectae ΓM, $\Delta\Lambda$ se intersecabunt in puncto aliquo δ sito in diametro, quae ad rectam ΔM, vel, quod eodem redit, ad rectam ei parallelam EN perpendicularis ducitur (Cor. 3.) i. e. ut facile patet, in diametro $\Lambda O H$. Eodem modo ostendetur, rectas ΓK, $B\Lambda$ in puncto α eiusdem diametri convenire etc. Et quum sit $\Lambda O = B\theta$ (I. 34.) et $\alpha O = B\beta$ (I. 34.), erit $\beta\theta = \Lambda\alpha$. Eodem modo, quum sit $\alpha O = \Gamma\varepsilon$, at $\delta O = \Gamma\gamma$, erit $\alpha\delta = \gamma\varepsilon$. Denique est $\delta O = \Delta E$ (I. 34.): itaque $\Lambda\alpha + \alpha\delta + \delta O$ i. e. $\Lambda O = \beta\theta + \gamma\varepsilon + \Delta E$. Habet hanc propositionem Kraftius in Geom. Sublim. §. 92., qui eam La Hirio (Mém. de Math. 1692. p. 92.) tribuit. Cf. Gilbert. l. c. p. 131.

Cor. 6. Vid. Clavium, Boermannum, aliosque. Recta EZ (Fig. 259.), quae ex medio peripheriae alicuius ducitur circulum contingens, parallela est rectae lineae, quae peripheriam illam subtendit. Ducta enim e centro Δ ad con-

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΚΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ. Ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑΓ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΕΔΖ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ εὐθεῖα τῇ ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

tactum A recta ΔA perpendicularis est ad tangentem (III. 18.). At ductis ΔB, $\Delta\Gamma$, in triangulis $\Delta B\Theta$, $\Delta\Gamma\Theta$ est $\Delta B = \Delta\Gamma$, et $\Delta\Theta$ communis, et ob arcus AB, $A\Gamma$ ex hyp. aequales, angulus $B\Delta\Theta = \Gamma\Delta\Theta$ (III. 27.), itaque $B\Theta\Delta = \Gamma\Theta\Delta$ (I. 4.), proinde uterque rectus est (I, 13.): itaque recta EZ parallela erit rectae $B\Gamma$ (I. 28.). Hinc simul patet, rectam, quae e centro circuli ducta arcum circuli bifariam secat, secare etiam rectam illi arcui subtensam bifariam et ad angulos rectos.

Cor. 7. Conversa quoque antecedentis corollarii facile demonstrabitur: nempe, si recta EZ, quae ex medio peripheriae alicuius ducitur, parallela est rectae lineae, quae il-

Et quoniam aequales circuli sunt, aequales sunt et rectae ex centris ductae (III. Def. 1.); duae igitur BK, $K\Gamma$ duabus $E\Delta$, ΔZ aequales sunt, et basis $B\Gamma$ basi EZ aequalis; angulus igitur $BK\Gamma$ angulo $E\Delta Z$ aequalis est (I. 8.). Aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistunt, quando ad centra sunt (III. 26.); aequalis igitur $BH\Gamma$ circumferentia ipsi $E\Theta Z$ circumferentiae. Est autem et totus $AB\Gamma$ circulus toti ΔEZ circulo aequalis; igitur et reliqua circumferentia $BA\Gamma$ reliquae circumferentiae $E\Delta Z$ aequalis est. In aequalibus igitur etc.

PROPOSITIO XXIX. (Fig. 260.)

In aequalibus circulis aequales circumferentias aequales rectae subtendunt.

Sint aequales circuli $AB\Gamma$, ΔEZ, et in ipsis sumantur aequales circumferentiae $BH\Gamma$, $E\Theta Z$, et iungantur $B\Gamma$, EZ rectae; dico aequalem esse rectam $B\Gamma$ rectae EZ.

Sumantur enim centra circulorum, K, Δ, et iungantur BK, $K\Gamma$, $E\Delta$, ΔZ.

lam lineam subtendit, EZ contingit circulum. Erit nempe angulus $B\Delta\Theta=\Gamma\Delta\Theta$ (III. 27.) $\Delta B\Theta=\Delta\Gamma\Theta$ (I. 5.), adeoque (I. 32.) $B\Theta\Delta=\Gamma\Theta\Delta=$ recto (I. 13.). Unde et $E\Delta\Delta$ rectus erit (I. 29.) et $E\Delta$ circulum continget (III. 17.).

Cor. 8. Si in aequalibus circulis, vel in eodem circulo duo arcus inaequales fuerint, erunt etiam anguli iis insistentes inaequales, sive illi fuerint anguli ad centrum sive ad peripheriam, nominatim, qui maioribus arcubus insistunt anguli, erunt maiores. Et, si unus istorum arcuum sit multiplum alterius, erit etiam angulus priori insistens idem multiplum

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπ ΕΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλο ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ, Κ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περι γουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν. Ἐ ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ ΑΔΒ, δεῖ δὴ τ ΑΔΒ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

anguli alteri insistentis. Est haec conversa III. 26. Cor. e: pariter de angulis gibbis quoque valet.

PROPOSITIO XXVIII.

Obs. Ad pleniorem rei tractationem (Pfleiderero monent praemittenda fuerint sequentia; Si in uno circulo recta E per centrum transeat, in altero etiam ei aequali recta *EZ* ip *BΓ* aequalis per centrum transibit. Nam si *EZ* non per ce trum transiret, ea, quae per centrum circuli *ΔEZ* trans maior foret quam *EZ* (III. 15.) i. e. maior quam *BΓ*. E dem autem illi est aequalis (III. Def. 1.) q. e. a. Tum a tem, quum circuli aequales sint, semicirculi etiam, quos di metri *BΓ*, *EZ* auferunt (I. Def. 17.) aequales erunt. S autem *BΓ* non per centrum transeat, nec ea, quae illi aequ lis est, *EZ* per centrum transire potest: nam, si *BΓ* non p centrum transit, erit illa minor diametro circuli *ΑΒΓ* (I 15.) i. e. (III. Def. 1.) minor diametro circuli *ΔEZ*, itaq et *EZ* minor est diametro circuli *ΔEZ*, adeoque non per ce trum circuli *ΔEZ* transit. Atque hinc deinde reliqua cons quentur ut apud Euclidem.

Cor. 1. Et quum circumferentiae, quas aequales rect

Et quoniam aequalis est circumferentia $BH\Gamma$ circumferentiae $E\Theta Z$, aequalis est et angulus $BK\Gamma$ angulo EAZ (III. 27.). Et quoniam aequales sunt circuli $AB\Gamma$, ΔEZ, aequales sunt et rectae ex centris ductae; duae igitur BK, $K\Gamma$ duabus $E\Delta$, ΔZ aequales sunt, et angulos aequales continent; basis igitur $B\Gamma$ basi EZ aequalis est. In aequalibus igitur etc.

PROPOSITIO XXX. (Fig. 268.)

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia $A\Delta B$; oportet circumferentiam $A\Delta B$ bifariam secare.

in aequalibus circulis vel in eodem circulo (cf. Obs. ad III. 26.) auferunt, sint aequales, anguli etiam, qui iis insistunt, sive ad centrum, sive ad peripheriam aequales erunt (III. 27.) adeoque segmenta erunt similia (III. Def. 11.). Cf. Pfleiderer.

Cor. 2. Si duo aequales circuli (Fig. 261.) se intersecent in A et B, arcus $A\Gamma B$, $A\Delta B$ erunt aequales, adeoque similia (III. 27. et III. Def. 11.).

Cor. 3. Si in aequalibus circulis aut in eodem circulo inaequales rectae constituantur, maior recta maiorem, minor minorem circumferentiam abscindet (I. 25. et III. 26. Cor. 3.), si nempe de segmentis loquamur, quae semicirculo minora sunt. In segmentis vero, quae semicirculo maiora sunt, contrarium valet, nempe minor recta maius segmentum subtendit. Cf. Clavius.

PROPOSITIO XXIX.

Obs. 1. Est haec conversa praecedentis. Et, siquidem circumferentia unius circuli sit semicirculus, erit (quum circumferentiae utrimque aequales sumtae sint, et circuli etiam aequales ponantur) etiam circumferentia, quae ex altero sumta est, semicirculus, adeoque rectae subtendentes diametri. Sin

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ· δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καὶ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΔΒ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ περιφερείᾳ.

autem aequales sint circumferentiae *BHΓ*, *EΘZ*, erunt, quum circuli aequales sint, etiam reliquae circumferentiae *BAΓ*, *EΔZ* aequales, et quum, ut Euclides ostendit, aequales sint anguli ad centrum, adeoque etiam anguli ad peripheriam, segmenta haec erunt similia (III. Def. 11.). Et haec propositio pariter valet, si aequales circumferentiae in eodem circulo sumtae sint. Hinc consequitur

Cor. 1. Rectae *AB*, *ΓΔ* (Fig. 255.) ita ductae ut III. 26. Cor. 2. aequales sunt.

Cor. 2. Si vero in aequalibus circulis, vel in eodem circulo inaequalia segmenta sumta fuerint, dum utrumque minus est semicirculo, recta, quae minori segmento subtenditur, minor est ea, quae maiori subtenditur; in segmentis contra, quae utrimque semicirculo maiora sunt, contrarium obtinet. E. Clavio.

Obs. 2. Idem Clavius et ante eum Commandinus sequentes adiiciunt propositiones, quas sufficiat hic subiungere:

A.

Circuli, e quibus aequales rectae auferunt similia segmenta, aequales sunt.

Iungatur AB, et secetur bifariam in Γ (I. 10.), et a puncto Γ rectae AB ad rectos angulos ducatur ΓB (I. 11.), et iungantur $A\Delta$, ΔB.

Et quoniam $A\Gamma$ aequalis est ΓB, communis autem $\Gamma\Delta$; duae igitur $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ duabus $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ aequales sunt. Et angulus $A\Gamma\Delta$ angulo $B\Gamma\Delta$ aequalis, rectus enim uterque; basis igitur $A\Delta$ basi ΔB aequalis est (I. 4.). Aequales autem rectae aequales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem verò minori (III. 28.); et est utraque ipsarum $A\Delta$, ΔB circumferentiarum minor semicirculo; igitur circumferentia $A\Delta$ circumferentiae ΔB aequalis erit.

B.

Ex circulis inaequalibus aequales rectae dissimiles circumferentias auferunt.

C.

Rectae, quae ex circulis inaequalibus similes circumferentias auferunt, inaequales sunt.

D.

Rectae, quae ex quibuscunque circulis circumferentias similes inaequales auferunt, inaequales sunt.

Obs. 3. Ope huius propositionis varia adhuc theorematà demonstrari possunt, e quibus sequentia huc referre visum fuit. 1) Si divisus sit circulus in sex partes aequales in A, B, Γ, Δ, E, Z (Fig. 266.) — fieri id posse, infra ex IV. 15. patebit — ducanturque ΓE, BZ, ponantur $A\Gamma$, AE, occurrentes rectae BZ in Θ, H, dico rectam BZ trifariam esse divisam. Nempe ob aequales circumferentias $A\Gamma$, ΓE, EA erunt et rectae $A\Gamma$, ΓE, EA aequales (III. 29.), adeoque erit triangulum $A\Gamma E$ aequilaterum, adeoque aequiangulum (I. 6. Cor.), et, quum arcus $B\Gamma$, EZ sint aequales, erit BZ parallela rectae ΓE (III. 27. Cor. 1.), adeoque anguli $A\Theta H$, $AH\Theta$ aequales angulis Γ, E (I. 29.), unde et triangulum $A\Theta H$ erit aequiangulum, adeoque (I. 6. Cor.) aequilaterum.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς. Καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς.

Et, quum sit angulus $ΔΒΘ = ΒΔΘ$ (I. 27.), erit $ΒΘ = ΔΘ$ (I. 6.) $= ΘΗ$. Eodemque modo ostenditur, esse $ΖΗ = ΗΘ$: itaque recta $ΒΖ$ in punctis $Θ$, $Η$ trifariam divisa est. Est haec propositio Gregorii a St. Vincent. de Quadrat. Circul. p. 169. Cf., Kraft. Geom. Sublim. p. 79. et Gilbert. p. 132. 2) Si duo aequales circuli se intersecent in $Α$ et $Β$ (Fig. 267, et ex uno intersectionum puncto A describatur circulus, qui utrumque reliquorum circulorum secet, unum in $Δ$, alterum in $Γ$, puncta $Β$, $Γ$, $Δ$ in eadem recta erunt. Ducantur enim rectae $ΑΒ$, $ΔΒ$, et $ΔΒ$ secet circulum $ΑΔΒ$ in $Ζ$: et, quum angulus $ΑΒΔ$ sit in utroque circulorum aequalium, arcus $ΑΔ$, $ΑΖ$, quibus insistit, aequales erunt (III. 26.), adeoque etiam rectae $ΑΔ$, $ΑΖ$, quae hos arcus subtendunt, aequales erunt (III. 29.) i. e. punctum $Ζ$ erit in circulo, centro $Α$ radio $ΑΔ$ descripto: idem vero ex hypothesi est etiam in circulo $ΑΔΒ$, ergo erit in utroque circulo, i. a. cum puncto intersectionis $Γ$ coincidet. Est haec Gregorii a St. Vinc. III. 1. p. 167. ubi plures casus speciatim expositi sunt. Cf. Gilbert. p. 158.

PROPOSITIO XXX.

Obs. Circumferentiarum $ΑΔ$, $ΔΒ$ esse, ut in demonstratione dicitur, utramque minorem semicirculo, inde patet, quod ex III. 1. Cor. 1. recta $ΓΔ$, si opus est producta per centrum transit, adeoque ex altera parte rectae $ΔΒ$ demum

Ergo data circumferentia bifariam secta est in puncto Δ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXI. (Fig. 269.)

In circulo, angulus, qui in semicirculo, rectus est; qui vero in maiore segmento, minor recto; qui autem in minore segmento maior recto. Et insuper maioris segmenti angulus maior est recto; minoris vero segmenti angulus minor recto.

circulo iterum occurrit, et semicirculum subtendit, cuius itaque pars est circumferentia $A\Delta$ vel $B\Delta$. Plura hinc deduci possunt consectaria:

Cor. 1. Recta, quae chordam circuli (ita vocant rectam circuli segmento subtensam) bifariam et ad angulos rectos secat, aut, quod eodem redit (III. I. Cor. 1.) diameter circuli per mediam chordam ducta, aut diameter, quae chordae ad angulos rectos ducitur, bifariam dividit utrumque segmentum, cui chorda illa subtenditur.

Cor. 2. Diameter, quae alterutrum arcum a chorda subtensum bifariam dividit, bifariam dividit quoque alterum, pariter ac chordam, atque huic est ad angulos rectos.

Cor. 3. Recta, quae duos chordae alicui oppositos arcus bifariam dividit, est diameter, quae chordam bisecat, ipseque ad angulos rectos insistit.

Cor. 4. Recta, quae chordam aliquam, et unum arcuum, cui illa subtenditur, bisecat, est diameter, quae chordae ad angulos rectos insistit, et oppositum quoque arcum bisecat.

Cor. 5. Idem valet de perpendiculo ex puncto arcus alicuius in oppositam ipsi chordam demisso.

Cor. 6. Repetita problematis applicatione arcus circuli quicunque in quatuor, octo, sedecim et generaliter 2^n partes aequales dividitur. (Sunt haec omnia e schedis Pfleidereri.).

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. Λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ζ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΕ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΓ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν.

PROPOSITIO XXXI.

Obs. 1. Circa ea, quae ad finem huius propositionis de angulo segmenti maioris aut minoris semicirculo dicuntur, eadem valent, quae in excursu ad hunc librum de segmento semicirculi ad Prop. 16. diximus, unde iidem etiam, qui ultimam propositionis 16. partem pro spuria habent: et ideireo omittunt, huius quoque ultimam partem ex pari ratione omittunt. Praeterea, quum in Prop. 31. doctrina de angulis in segmentis, quam Prop. 20. 21. Euclides exhibere coeperat, absolvatur, ad pleniorem autem Prop. 26. expositionem conversa Prop. 31. pertinere videatur, ut ad Prop. 26. monuimus, neque tamen Prop. 31. ante III. 22. ad quam illa recurrit, poni possit, verisimile fuerit, ab ipso auctore Prop. 31. forte statim post III. 22. positam fuisse, e quo ordine forte postea, quum III. 26. mutilata fuisset, mota, et ante III.

Sit circulus $ABΓΔ$, diameter autem ipsius sit $BΓ$, centrum vero E, et iungantur BA, $AΓ$, $AΔ$, $ΔΓ$; dico angulum $BAΓ$ in semicirculo $BAΓ$ rectum esse; angulum autem $ABΓ$ in segmento $ABΓ$ semicirculo maiore minorem recto; angulum vero $AΔΓ$ in segmento $AΔΓ$ semicirculo minore maiorem esse recto.

Iungatur AE, et producatur BA ad Z.

Et quoniam BE aequalis est EA, aequalis est et angulus ABE, angulo BAE (I. 5.). Rursus, quoniam $ΓE$ aequalis est EA, aequalis est et $AΓE$ angulo $ΓAE$ (I. 5.); totus igitur $BAΓ$ duobus $ABΓ$, $AΓB$ aequalis est. Est autem et angulus $ZAΓ$, extra triangulum $ABΓ$, duobus angulis $ABΓ$, $AΓB$ aequalis (I. 32.); aequalis igitur et angulus $BAΓ$ angulo $ZAΓ$; rectus igitur uterque (I. Def. 10.); angulus igitur $BAΓ$ in semicirculo $BAΓ$ rectus est.

33. in qua nunc primum adhibetur, posita fuit. Ita de hac re indicat Pfleiderer. in sched. mscpt. Cf. Thes. inaugur. 1791. Th. 2. sqq. Eam, quae secundo loco ponitur, demonstrationem omittit Rob. Simson., Austin. contra ex ea illud quoque deducit, quod angulus in maiore segmento minor recto, angulus autem in minore segmento maior sit recto. Idem iudicat, Corollarium vulgo additum non huc pertinere, sed ad I. 32., cui propositioni etiam nos illud, paullo generalius, ut Cor. 6. subiunximus. Et manifestum est, conversum quoque propositionis III. 31. locum habere. Nempe, si angulus aliquis ad peripheriam rectus sit, erit in semicirculo; si sit acutus, vel minor recto, erit in segmento maiore; si sit obtusus, vel maior recto, erit in segmento minore, quod facile, sumto contrario, demonstrabitur. Ita Clavius. Potest

Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπ ΑΒΓ, ΒΑΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ ὁ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒ γωνία, καί ἐστιν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίο τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Καί ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάτ των ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία μείζω ὀρθῆς ἐστι, καί ἐστιν ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμι κυκλίου τμήματι.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆ ΑΓ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττο νος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΑΔΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρ-

autem etiam directe demonstrari. Idem Clavius aliique se quentia affdunt corollaria.

Cor. 2. In triangulo rectangulo $BA\Gamma$ (Fig. 270.) si hypotenusa $B\Gamma$ bisecetur in E, et centro E radio $EB=E\Gamma$ describatur circulus, transibit ille per A verticem anguli recti, vel, ut aliter dicamus; circulus super $B\Gamma$ descriptus est locus verticum omnium triangulorum rectangulorum super $B\Gamma$ descriptorum. Quum enim angulus $BA\Gamma$ rectus sit, erit angulus $AB\Gamma$ minor recto (I. 17. Cor. 1.), adeoque circulus radio EB descriptus cum recta BA iterum conveniet (III. 16. Cor. 2.). Et quidem convenire cum ea debet in puncto A. Si enim non in A conveniat, conveniet cum recta BA in puncto aliquo ab A diverso v. c. in Δ, eritque angulus $B\Delta\Gamma$ rectus, utpote in semicirculo situs (III. 31.). Idem vero etiam maior est angulo recto $BA\Gamma$ (I. 16.) q. e. a. Eodem modo ostenditur, circulum rectam BA non secare in puncto

Et quoniam trianguli $ABΓ$ duo anguli $ABΓ$, $BAΓ$ duobus rectis minores sunt (I. 17.); rectus autem $BAΓ$; minor igitur recto est angulus $ABΓ$, atque est in segmento $ABΓ$ semicirculo maiore.

Et quoniam $ABΓΔ$ est quadrilaterum in circulo, quadrilaterorum autem in circulis anguli oppositi duobus rectis aequales sunt (III. 22.), anguli $ABΓ$, $AΔΓ$ duobus rectis aequales sunt. Et $ABΓ$ minor est recto; reliquus igitur angulus $AΔΓ$ maior recto est, et est in segmento $AΔΓ$ semicirculo minore.

Dico praeterea maioris quidem segmenti angulum comprehensum ab $ABΓ$ circumferentia et $AΓ$ recta, maiorem esse recto; minoris vero segmenti angulum comprehensum ab $AΔΓ$ circumferentia et $AΓ$ recta, minorem esse recto. Et est hoc manifestum. Quo-

aliquo Z in recta BA ultra A producta. Secabit ergo in A.

Cor. 3. Facilior hinc emergit ratio solvendi problema, quod habetur in III. 17. Prop., descripto nempe super recta AE (Fig. 233.) circulo, qui, quum ex Cor. 2. transire debeat per puncta B, $Θ$ in circulo dato $ΓBΔ$, puncta haec assignabit, ad quae ex A rectae contingentes AB, $AΘ$ duci possunt. Simili modo solvetur problema, quod habuimus in III. 17. Obs. 4. descripto super recta $Aα$ (Fig. 236.) semicirculo, qui punctum $δ$ designabit. Pari ratione solvetur problema I. 47. Cor. 10.: describere quadratum, quod aequale sit differentiae duorum quadratorum.

Cor. 4. Quadrilaterum in circulo inscriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela (Fig. 271.) parallelogrammum est rectangulum. E Clavio, et Pappi Collect. Mathem. in III. 52. Prop. cf. quae diximus ad III. 22. Obs. 2. et ad III. 22. Obs. 5. Quum enim ex hypoth. sint AB, $ΓΔ$ parallelae,

θῆς. Καὶ ἐστιν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία ἐστὶν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΓΔ περιφερείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ κὰ ἑξῆς.

ΑΛΛΩΣ.

Ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση γὰρ

erunt (III. 26. Cor. 1.) arcus ΒΕΓ, ΑΖΔ aequales. Eodem modo ostenditur, aequales esse arcus ΑΘΒ, ΑΗΓ: erit itaque ΑΒΓ semicirculus, adeoque angulus Β rectus (III. 31.); eodemque modo res de reliquis angulis demonstrabitur.

Cor. 5. Si per centrum Δ circuli alicuius (Fig. 272. a. b. c.) circulus describatur, et per utriusque circuli centrum recta ducatur, quae posteriorem circulum secet in Ζ, si deinde ex puncto Ζ ducatur recta quaecunque, quae priorem circulum secet in Β, Γ: pars illius ΒΓ intra priorem circulum contenta a posteriore secabitur bifariam in puncto aliquo Ε. Clavius et Pappi Collect. Mathem. VII. 91. vel ad Inclin. L. II. ad Probl. 24. cf. Gilbert. p. 158. Ducta enim ΔΕ, erit angulus ΔΕΖ rectus (III. 31.) quippe in semicirculo constitutus, adeoque recta ΒΕ in Ε bifariam secatur (III. 3.).

Cor. 6. Si recta aliqua ΒΑ (Fig. 269.) in circulo non transeat per centrum, adeoque circulum in segmenta inaequalia secet (Obs. ad I. 17, 18. Def.) ducaturque diameter ΒΓ, iuncta ΑΓ, angulus ΑΓΒ in maiore segmento differet ab angulo recto (nempe minor eo erit) angulo ΑΒΓ, quem chorda ΑΒ cum diametro ΒΓ comprehendit. Et quum angulus in segmento ad oppositas partes rectae ΑΒ posito rectum angulum

niam enim angulus a BA, $A\Gamma$ rectis comprehensus rectus est, qui ab $ABΓ$ circumferentia et $A\Gamma$ recta comprehenditur, maior est recto. Rursus, quoniam angulus ab $A\Gamma$, AZ rectis comprehensus rectus est, qui a ΓA recta, et $A\Gamma A$ circumferentia comprehenditur, minor est recto. In circulo igitur etc.

ALITER.

Demonstratur angulum $BA\Gamma$ rectum esse. Quoniam angulus $AE\Gamma$ duplus est anguli BAE, aequalis

eadem quantitate superet, qua angulus $B\Gamma A$ minor est recto (III. 22.), angulus in opposito isto segmento pariter differet ab angulo recto (maior eo erit) angulo $AB\Gamma$. Cf. Thom. Simpson. Elem. of Geom. Book III. Prop. 16.

Obs. 2. Aliter propositionis III. 31. pars prima ita efferri potest: Si duae rectae AB, $A\Gamma$ circulo inscriptae (Fig. 269.) atque ex eodem in circulo puncto A exeuntes rectum angulum efficiant, summa quadratorum earum aequale est quadrato diametri. Nempe, quum ex I. 47. summa quadratorum earum aequale sit quadrato hypothenusae $B\Gamma$, quod ita effertur, nihil aliud dicit, quam hypotenusam $B\Gamma$ esse simul diametrum circuli, sive $BA\Gamma$ esse semicirculum. Potest autem inde deduci generalior propositio, nempe: si duae rectae circulo inscriptae AE, BA (Fig. 273. a. b.) se invicem in puncto aliquo Γ, sive intra, sive extra circulum posito ita secent, ut angulum rectum comprehendant, erit summa quadratorum rectarum e puncto sectionis usque ad puncta, in quibus circulo occurrunt, aequalis quadrato diametri. Omisso eo casu, quo altera rectarum AE, BA per centrum transit, qui nihil difficultatis habet, ducantur rectae AA, AE, EB, BA et diameter AZ, ac iungatur AZ, eritque (Fig. 273. a.) angul. AZA

δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ: αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ διπλασίονές εἰσι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴσῃ ᾖ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς[1]) ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Ὅταν δὲ ἐφεξῆς ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

1) Hanc lectionem ἐφεξῆς ex edd. Oxon. et Basil. restituimus. Peyrardus e Cod. a ponit τὴν ἐκείνης ἐκτός. At haec lectio ad sequens: ἐφεξῆς non quadrat, et praeterea esse debebat τὴν ἐκείνου ἐκτός, quum angulus exterior nunquam ad alium angulum, sed ad triangulum referatur.

=ΑΒΓ ex III. 22. Cor. 1. Et, quum angulus ΑΔΖ, utpote rectus (III. 31.) aequalis sit angulo ΑΓΒ ex hypothesi quippe recto, erit reliquus angulus ΔΑΖ=ΓΑΒ (I. 32.), adeoque arcus ΔΖ= arcui ΕΒ (III. 26.), et recta ΔΖ= rectae ΕΒ (III. 29.). Est autem in triangulo rectangulo ΑΔΖ ex I. 47. ΑΔq+ΔΖq=ΑΖq, itaque ΑΔq+ΕΒq=ΑΖq. At ΑΔq=ΑΓq+ΔΓq (I. 47.), et ΕΒq=ΕΓq+ΒΓq: itaque ΑΓq+ΔΓq+ΕΓq+ΒΓq=ΑΖq. Et, quum etiam sit ΔΕq=ΔΓq+ΕΓq, et ΑΒq=ΑΓq+ΒΓq, erit etiam ΔΕq+ΑΒq=ΑΖq.

enim duobus interioribus et oppositis (I. 32.); est autem et angulus AEB duplus anguli $E\Delta\Gamma$; anguli igitur AEB, $AE\Gamma$ dupli sunt anguli $B\Delta\Gamma$. Sed anguli AEB, $AE\Gamma$ duobus rectis aequales sunt (I. 13.); ergo $B\Delta\Gamma$ rectus est. Quod oportebat ostendere.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si unus angulus trianguli duobus aequalis sit, rectum esse angulum, propterea quod eius angulus deinceps iisdem est aequalis. Quando autem ipsi deinceps sunt aequales, recti sunt (I. Def. 10.)

PROPOSITIO XXXII. (Fig. 274.)

Si aliqua recta circulum contingat, a contactu autem ducatur aliqua recta circulum secans, anguli, quos haec cum contingente facit, aequales erunt angulis in alternis circuli segmentis.

Casu itaque (Fig. 273. a.) utraque summa quadratorum laterum oppositorum quadranguli $AB\Delta E$ separatim sumta aequalis erit quadrato diametri, casu autem (Fig. 273. b.) eidem quadrato diametri aequalis erit tam summa quadratorum laterum oppositorum $A\Delta$, EB (quae interposita sunt iis, quae producta angulum rectum efficiunt), quam summa quadratorum diagonalium ΔE, AB. Praeterea, si ex centro Θ demittantur in ΔB, AE perpendiculares ΘH, ΘK, quae chordas ΔB, AE bisecabunt (III. 3.), ductaque $\Theta\Gamma$, erit (Fig. 273. a.) $\Delta B^q = \Delta\Gamma^q + B\Gamma^q + 2\Delta\Gamma \times \Gamma B$ (II. 4.). At $\Delta\Gamma \times \Gamma B = \Delta H^q - H\Gamma^q$ (II. 5.), adeoque erit $\Delta B^q = \Delta\Gamma^q + B\Gamma^q + 2\Delta H^q - 2H\Gamma^q$. Eodemque modo $AE^q = A\Gamma^q + \Gamma E^q + 2EK^q - 2K\Gamma^q$, adeoque $\Delta B^q + AE^q = \Delta\Gamma^q + A\Gamma^q + B\Gamma^q + \Gamma E^q + 2\Delta H^q + 2EK^q - (2H\Gamma^q + 2K\Gamma^q)$, vel, ob $\Delta\Gamma^q + A\Gamma^q + B\Gamma^q + \Gamma E^q = AZ^q$

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΒΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ΕΖ κατὰ τὸ Β, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου [1]· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. Ἐστὶ δε καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΒΑΔ.

1) Peyrardus e Cod. a addit: ἡ ΒΑ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Edd. Oxon. et Basil. haec verba omittunt.

ex demonstrat. et $HΓ^q + KΓ^q = HΓ^q + ΘH^q = ΘΓ^q$, erit $ΔB^q + AE^q = AZ^q + 2ΔH^q + 2EK^q - 2ΘΓ^q = AZ^q + 2ΔH^q + 2ΘH^q + 2EK^q + 2ΘK^q - (2ΘH^q + 2ΘK^q) - 2ΘΓ^q = AZ^q + 2ΔΘ^q + 2ΘΔ^q - 4ΘΓ^q = AZ^q + 4ΘZ^q - 4ΘΓ^q = 2AZ^q - 4ΘΓ^q$. Unde efficitur $ΔB^q + AE^q + 4ΘΓ^q = 2AZ^q$ i. e. = summae quadratorum chordarum $ΔB$, AE, quae inter se angulum rectum efficiunt, si adiicias quadruplum quadratum rectae $ΘΓ$ inter centrum et punctum intersectionis chordarum contentae, effi-

Circulum enim $AB\Gamma\Delta$ contingat aliqua recta EZ in puncto B, et a puncto B ducatur aliqua recta ΔB secans circulum $AB\Gamma\Delta$; dico, angulos, quos facit $B\Delta$ cum contingente EZ aequales esse angulis in alternis segmentis circuli, hoc est angulum quidem $ZB\Delta$ aequalem esse angulo in segmento $BA\Delta$ constituto, angulum vero ΔBE aequalem esse angulo in segmento $A\Gamma B$ constituto.

Ducatur enim a B ipsi EZ ad rectos angulos BA (I. 11.), et sumatur in circumferentia $B\Delta$ quodlibet punctum Γ, et iungantur $A\Delta$, $\Delta\Gamma$, ΓB.

Et quoniam circulum $AB\Gamma\Delta$ contingit aliqua recta EZ in B, a contactu autem ducta est tangenti ad rectos angulos BA, in BA centrum est circuli $AB\Gamma\Delta$ (III. 19.); ergo angulus $A\Delta B$ in semicirculo constitutus rectus est (III. 31.); reliqui igitur $BA\Delta$, $AB\Delta$ uni recto aequales sunt (I. 32.). Est autem et ABZ rectus; ergo ABZ aequalis est ipsis $BA\Delta$, $AB\Delta$. Communis auferatur $AB\Delta$; reliquus igitur ΔBZ angulus aequalis est angulo $BA\Delta$ in alterno circuli segmento. Et quoniam in circulo quadrilaterum est

cietur duplum quadratum diametri. Et similiter in fig. 273. b. erit $\Delta B^q = \Delta\Gamma^q + B\Gamma^q - 2\Delta\Gamma \times \Gamma B$ (II. 7.), at $\Delta\Gamma \times \Gamma B = H\Gamma^q - \Delta H^q$ (II. 6.), adeoque $\Delta B^q = \Delta\Gamma^q + B\Gamma^q + 2\Delta H^q - 2H\Gamma^q$. Eodemque modo $AE^q = \Delta\Gamma^q + \Gamma E^q + 2EK^q - 2K\Gamma^q$, unde deinde reliqua eodem modo consequuntur ac in fig. 273. a. Denique observari potest, casu fig. 273. a. esse arcum $A\Delta\Delta + BE = A\Delta\Delta + \Delta Z =$ semicirculo, i. e. circumferentias $A\Delta\Delta + BE$ simul semicirculum efficere, adeoque etiam reliquas sibi oppositas circumferentias $\Delta B + \Delta E$ simul aequales esse semicirculo, casu autem fig. 273. b. esse circumferentias $AZ\Delta - Z\Delta$ i. e. $AZ\Delta - BE =$ semicirculo, vel etiam circumferentias

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ὑπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ, τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

ΑΒΔ+ΒΕ=ΑΒΔ+ΔΖ= semicirculo. Cf. Gregorii a St. Vincent. de Quadrat. Circuli L. III. Prop. 77. Carnot. de la Corrélat. des fig. de Géom. p. 98. sqq. et Géom. de position §. 132., ubi tamen falsa est, observante Pfleiderero, propositionis enunciatio; Gilbert. Geometrie p. 375. sqq. et van Swinden Anfangsgr. der Mefsk. p. 306. sqq.

PROPOSITIO XXXII.

Obs. 1. Distingui debent, ut Clavius, Borellius, Tacquet et Coëtsius monuerunt, duo casus, prout recta *ΒΔ* ipsa ad rectos angulos est rectae *ΕΒΖ*, aut non. Prior quoque nihil difficultatis habet.

Cor. 1. Angulus, quem recta circulum contingens cum recta secante circulum in puncto contactus prioris rectae efficit, dimidius est anguli ad centrum segmento circuli ad easdem partes sumto insistentis (III. 20.).

Cor. 2. Si recta ducatur, quae puncta contactus duarum rectarum circulum contingentium coniungit, recta haec iuncta angulos cum utraque contingente aequales efficiet. Quorum si uterque rectus sit, adeoque contingentes parallelae (I. 28.), recta iuncta erit diameter (III. 17. Cor. 2.): sin autem hi an-

ΑΒΓΔ, oppositi eius anguli duobus rectis aequales sunt (III. 22.). Sunt autem et ipsi *ΔΒΖ*, *ΔΒΕ* duobus rectis aequales (I. 13.); ipsi igitur *ΔΒΖ*, *ΔΒΕ* ipsis *ΒΑΔ*, *ΒΓΔ* aequales sunt, quorum *ΒΑΔ* ipsi *ΔΒΖ* ostensus est aequalis; reliquus igitur *ΔΒΕ* angulo *ΔΓΒ* in alterno circuli segmento *ΔΓΒ* aequalis est. Si igitur circulum etc.

PROPOSITIO XXXIII. (Fig. 276.)

Super data recta describere segmentum circuli, capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo.

guli obliqui, adeoqui versus unam partem rectae iunctae minores duobus rectis fuerint, contingentes ex hac parte convenient (Ax. 11. vel Post. 5. I.), eruntque inter se aequales (I. 6.).

Cor. 3. In aequalibus circulis, aut in uno eodemque circulo, quae ad extremitates duarum chordarum ducuntur rectae circulos contingentes, aequales cum his chordis angulos efficiunt.

Cor. 4. Quum duo circuli, qui se in puncto aliquo contingunt, semper ab una eademque recta in hoc puncto contingantur (III. 17. Obs. 2.) patet, rectam, quae per hoc commune contactus punctum ita ducitur, ut utrumque circulum secet, arcus ab iis abscindere, qui angulos aequales capiunt, i. e. similia abscindere segmenta. Cf. Pappi Collect. Mathem. L. IV. Lemm. ad Prop. VIII. et L. VII. Prop. CII. et CVII. vel in Apollon. de Taction. Lemm. VII. et XI. et Gilbert. p. 162.

Obs. 2. Conversa quoque valet. Nempe, si recta aliqua circulo in aliquo punto occurrat, a puncto autem occursus ducatur alia recta circulum secans, sitque angulus, quem hae rectae inter se efficiunt, aequalis angulo in alterno circuli

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἡ δὲ πρὸς τῷ Γ γωνία ἤτοι ὀξεῖά ἐστιν ἢ ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.

Ἔστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς ἐπὶ πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἤχθω τῇ ΑΔ ἀπὸ τοῦ Α σημείου πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. Γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΑΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ. Ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τῆς ΑΕ διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ Α, τῇ ΑΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΕ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἁφῆς εἰς τὸν ΑΒΕ κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν

segmento, prior recta circulum in puncto occursus continget, quod facile demonstrabitur, sumto contrario. Hinc consequuntur

Cor. 1. Si recta aliqua circulo occurrat, et e puncto concursus ducatur alia recta circulum secans, sitque angulus, quem hæ rectæ inter se efficiunt, æqualis dimidio angulo

Sit data recta AB, datus autem angulus rectilineus ad Γ; oportet super data recta AB describere segmentum circuli, capiens angulum aequalem ei, qui est ad Γ. Est autem angulus ad Γ vel acutus, vel rectus, vel obtusus.

Sit primum acutus, ut in prima figura, et constituatur ad rectam AB et ad punctum A, angulo ad Γ aequalis ipse $BA\Delta$ (I. 23.); acutus igitur est et $BA\Delta$. Ducatur (I. 10.) ipsi $A\Delta$ ab puncto A ad rectos angulos recta AE, et secetur AB bifariam in Z, et ducatur a puncto Z ipsi AB ad rectos angulos recta ZH, et iungatur HB. Et quoniam aequalis est AZ ipsi ZB, communis autem ZH, duae AZ, ZH duabus ZB, ZH aequales sunt, et angulus AZH angulo BZH aequalis; basis igitur AH basi HB aequalis est (I. 4.). Ergo centro H, intervallo vero HA, circulus descriptus transibit et per B. Describatur, et sit ABE, et iungatur BE. Quoniam igitur ab extremitate A ipsius AE diametri ipsi AE ad rectos angulos est $A\Delta$, recta $A\Delta$ contingit circulum (III. 16). Quoniam igitur circulum ABE tangit aliqua recta $A\Delta$, et a contactu ad A in circulum ABE ducta est aliqua AB, angulus ΔAB aequalis est angulo AEB in alterno circuli segmento (III. 32.) Sed ΔAB angulo ad Γ est aequalis; angulus igitur ad Γ aequalis est angulo AEB. Super data igitur recta

ad centrum segmento circuli ad easdem partes sumto insistenti, prior recta circulum continget.

Cor. 2. Si duae rectae, quae circulo occurrunt, cum chorda, quae occursus puncta coniungit, aequales angulos ex eadem parte faciant, una autem earum circulum contingat, altera quoque eum continget.

ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου γέγραπται τὸ ΑΕΒ, δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΕΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ καὶ δέον ἔστω πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ. Συνεστάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν ΖΑ, ΖΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΒ. Ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΑΔ εὐθεῖα τοῦ ΑΒΕ κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι, ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστίν. Καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ· γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεῖα ἔστω, καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΑΒ πρὸς

Cor. 3. In eodem circulo aut in circulis aequalibus si ad extremitates aequalium chordarum ducantur rectae, quae aequales cum illis ad easdem partes angulos efficiunt, atque una ductarum circulum, ad quem ducta est, contingat, continget etiam altera eum, ad quem ducta est, circulum.

Cor. 4. Si duo circuli in puncto aliquo conveniant, et recta per illud punctum commune ducta ab utroque segmenta similia abscindat (e diversis rectae partibus, siquidem illa cir-

AB segmentum circuli descriptum est *AEB*, capiens angulum *AEB* aequalem dato angulo ad *Γ*.

Sit deinde angulus ad *Γ* rectus; et oporteat rursus super *AB* describere segmentum circuli, capiens angulum aequalem angulo recto ad *Γ*. Constituatur rursus angulo ad *Γ* recto aequalis *BAΔ* (I. 23.) ut in secunda figura, et secetur *AB* bifariam in *Z* (I. 10.), et centro *Z*, intervallo vero alterutra ipsarum *AZ*, *ZB*, circulus describatur *AEB*; contingit igitur recta *AΔ* circulum *ABE*, quod rectus est angulus ad *A* (III. 16.). Et aequalis est angulus *BAΔ* angulo in segmento *AEB*, rectus enim et ipse est in semicirculo consistens (III. 31.). Sed *BAΔ* angulo ad *Γ* aequalis est; angulus igitur in segmento *AEB* aequalis est angulo ad *Γ*. Descriptum est igitur rursus super *AB* segmentum circuli *AEB*, capiens angulum aequalem angulo ad *Γ*.

Sit denique angulus ad *Γ* obtusus, et constituatur ipsi aequalis ad rectam *BA* et ad punctum *A* angulus *BAΔ* (I. 23.), ut in tertia figura, et rectae *AΔ* ad angulos rectos ducatur *AE* (I. 10.), et secetur rursus *AB* bifariam in *Z*, et ipsi *AB* ad angulos rectos du-

culos e diversis puncti communis partibus secet: ex eadem rectae parte autem, si illa circulos ex eadem puncti communis parte secet), circuli in hoc puncto se contingent. Quod demonstrabitur, ducta recta, quae unum horum circulorum in isto puncto contingat. Ea enim, ut facile patet, continget etiam alterum, hinc circuli se contingent (Obs. 3. ad III. 18.).

PROPOSITIO XXXIII.

Obs. Duo tantum, ut monet Rob. Simson. casus distin-

ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δυσὶ ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. Ἐρχέσθω ὡς ὁ ΑΕΒ. Καὶ ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. Καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνιστάμενῃ γωνίᾳ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστὶ· καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γέγραπται τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

guendi sunt, prout angulus datus vel rectus fuerit, vel obliquus. Et, si rectus fuerit, sufficit cum Clavio et Rob. Simson. semicirculum super data recta describere. Ex his rationibus Rob. Simson. vulgarem demonstrationem ab imperito aliquo depravatam putat. Caeterum paullo diversam solutionem habent Campanus, Clavius, Peletarius, Borellius, qui nempe rectam *AB*, si angulus datus obliquus sit, non bisecare, nec perpendiculum super ea erigere iubent, sed ad *B* angulum *ABH*=*BAH* constituunt, quod, ut facile patet, eodem redit. In solutione Euclidea ostendendum erat, quod facile fieri potest, rectas *ZH*, *AE* necessario convenire. In-

catur ZH, et iungatur HB. Et quoniam rursus aequalis est AZ, ipsi ZB, e communis ZH, duae AZ ZH duabus BZ, ZH aequales sunt, et angulus AZH, angulo BZH aequalis; basis igitur AH basi BH aequalis est (I. 4.). Ergo circulus centro H, intervallo vero HA, descriptus transibit et per B. Transeat ut AEB. Et quoniam diametro AB ab extremitate ad rectos angulos ducta est $A\Delta$, ipsa $A\Delta$ contingit circulum AEB (III. 16.). Et a contactu ad A ducta est AB; ergo angulus $BA\Delta$ aequalis est angulo consistito in alterno circuli segmento $A\Theta B$. Sed angulus $BA\Delta$ angulo ad Γ aequalis est. Et angulus in segmento $A\Theta B$ aequalis est angulo ad Γ. Ergo super datam rectam AB descriptum est segmentum circuli $A\Theta B$, capiens angulum aequalem angulo ad Γ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXIV. (Fig. 276.)

A dato circulo segmentum auferre, capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo.

signis huius problematis usus est in solvendis quam plurimis problematibus v. g. in iis, in quibus trianguli alicuius describendi basis, et angulus basi oppositus dantur, vel ex datis derivari possunt. Tum enim, si aliud adhuc trianguli elementum cognitum fuerit vel generalius, si alia adhuc determinatio accesserit, quae cum istis coniuncta ad efficiendum triangulum sufficiat, facilis plerumque erit trianguli constructio. Exempla habentur in appendice ad Data Euclid. ed. Schwab. Probl. 2. 5. 26. et in append. Version. German. Lecot. Planer. Apollonii Probl. 1. 5. 15. Caeterum aliam ac-

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΒΓ· ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ ΒΑΓ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λέ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

lutionem huius problematis habet Thom. Simpson. Elem. of Geom. B. 5. Probl. XXII. iunixam Cor. 6. ad III. 31.

PROPOSITIO XXXIV.

Obs. Huius quoque problematis is casus facilius expediri potest, quo angulus datus rectus est. Tum nempe nihil opus est recta contingente, sed quaevis circuli diameter propositum efficit. Alia etiam problematis solutio peti potest ex

Sit datus circulus $AB\Gamma$, datus vero angulus rectilineus ad Δ; oportet a circulo $AB\Gamma$ segmentum auferre, capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo ad Δ.

Ducatur recta EZ circulum $AB\Gamma$ contingens ad punctum B (III. 17.), et constituatur ad rectam EZ et ad punctum in ea B angulus $ZB\Gamma$ aequalis angulo ad Δ (I. 23.).

Quoniam igitur circulum $AB\Gamma$ contingit aliqua recta EZ, et a contactu ad B ducta est $B\Gamma$; angulus $ZB\Gamma$ aequalis est angulo constituto in $BA\Gamma$ alterno segmento (III. 32.). Sed $ZB\Gamma$ angulo ad Δ aequalis est; angulus itaque in segmento $BA\Gamma$ aequalis est angulo ad Δ.

A dato igitur circulo $BA\Gamma$ segmentum ablatum est $BA\Gamma$, capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo ad Δ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXV. (Fig. 277.)

Si in circulo duae rectae sese secent, rectangulum contentum sub segmentis unius aequale est rectangulo sub alterius segmentis contento.

III. 20. Sufficiet nempe ad centrum circuli constituere angulum duplum eius, qui datus est. Et, quum punctum B nullum determinatum in circulo dato locum obtineat, vel, quum infinite variari possit situs anguli ad centrum, qui duplus sit anguli dati, patet, novam addi posse determinationem, v. c. si quis iubeat, ut recta $B\Gamma$ parallela sit alii rectae datae.

PROPOSITIO XXXV.

Obs. 1. Distinctio casuum plenius ita erat instituenda.

Ἐν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν, ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· φανερὸν ὅτι, ἴσων οὐσῶν τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΗ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Προσκείσθω κοινὸν τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. Ἀλλὰ τοῖς

Vel 1) utraque rectarum circulo inscriptarum per centrum transit, vel 2) alterutra tantum, vel 3) neutra. Casum 2. omissum esse a Theone sine dubio, queritur Rob. Simson, neque enim id ab Euclide factum videri, haberi enim eum casum 1. omnium facillimum, et in sequente propositione separatim demonstrare casum, quo recta per centrum transeat.

In circulo enim $AB\Gamma\Delta$ duae rectae $A\Gamma$, $B\Delta$ sese secent in puncto E; dico rectangulum sub AE, $E\Gamma$ contentum aequale esse rectangulo sub ΔE, EB contento.

Si igitur $A\Gamma$, $B\Delta$ per centrum transeant (Fig. 277, a.), ita ut E centrum sit circuli $AB\Gamma\Delta$; manifestum est aequalibus existentibus AE, $E\Gamma$, ΔE, EB, et ipsum sub AE, $E\Gamma$ contentum rectangulum aequale esse rectangulo sub ΔE, EB contento.

Non autem transeant $A\Gamma$, ΔB per centrum (Fig. 277, b.), et sumatur centrum circuli $AB\Gamma\Delta$ (III. 1.), et sit Z, et a Z ad $A\Gamma$, ΔB rectas perpendiculares ducantur ZH, $Z\Theta$ (I. 12.); et iungantur ZB, $Z\Gamma$, ZE.

Et quoniam recta aliqua ZH per centrum rectam aliquam $A\Gamma$ non per centrum ductam ad rectos secat, et bifariam ipsam secat (III. 3.); aequalis igitur AH ipsi $H\Gamma$. Quoniam igitur $A\Gamma$ secta est in aequalia quidem in H, in inaequalia vero in E, rectangulum sub AE, $E\Gamma$ contentum cum quadrato ex HE aequale est quadrato ex $H\Gamma$ (II. 5.). Commune addatur quadratum ex HZ; rectangulum igitur sub AE, $E\Gamma$ cum quadratis ex ZH, HE aequale est quadratis ex ΓH, HZ. Sed quadratis ex EH, HZ est aequale

Et habet omnino eum casum Campanus, qui eum deinde pariter ac Clavius, Henrion., Coëtsius, Playfair. et Rob. Simson, in duos casus particulares distinguit, prout nempe ea, quae per centrum transit, alteram bifariam dividit aut non. Tertius denique casus ab iisdem facile reducitur ad secundum, ducta nempe diametro per punctum, in quo duae rectae, quae

μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. Ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται·

non per centrum transeunt, se intersecant. Aliam huius propositionis demonstrationem vide apud Grüson.: Abhandl. der Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Berlin 1814—1815. p. 56. Generaliter, observante Pfleiderero, omnium casuum demonstrationes derivari possunt ex sequente propositione, quae vicissim ex nostra hac deduci potest: Si qua recta circulo inscripta in puncto aliquo secetur utcunque rectangulum eius partium, una cum quadrato rectae, quae e centro ad punctum sectionis ducitur, aequale est quadrato radii. Cf. Gilbert. p. 357. et 359. Alii aliam Prop. 35. et 36. enunc tionem et demonstrationem e doctrina de tr angulis similibus petunt v. c. Whiston.

quadratum ex ZE (l. 47.), quadratis vero ex ΓH, HZ aequale est quadratum ex $Z\Gamma$ (l. 47.); rectangulum igitur sub AE, $E\Gamma$ cum quadrato ex ZE, aequale est quadrato $Z\Gamma$. Aequalis autem $Z\Gamma$ ipsi ZB, rectangulum igitur sub AE, $E\Gamma$ cum quadrato ex EZ aequale est quadrato ex ZB. Ex eadem ratione et rectangulum sub ΔE, EB cum quadrato ex ZE aequale est quadrato ex ZB. Ostensum est autem et rectangulum sub AE, $E\Gamma$ cum quadrato ex ZE aequale esse quadrato ex ZB; rectangulum igitur sub AE, $E\Gamma$ cum quadrato ex ZE aequale est rectangulo sub ΔE, EB cum quadrato ex ZE. Commune auferatur quadratum ex ZE; reliquum igitur sub AE, $E\Gamma$ contentum rectangulum aequale est rectangulo sub ΔE EBc ontento. Si igitur in circulo etc.

PROPOSITIO XXXVI. (Fig. 278.)

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, et ab eo in circulum cadant duae rectae, et una quidem earum secet circulum, altera vero contingat; erit re-

apud Tacquet in III. 35. et Costaius. Vid. ad VI. 16. et. 17. Obs. 6. 7.

Cor. Si rectae quotcunque circulo inscriptae se in uno eodemque puncto intersecent, rectangula sub segmentis cuiusque earum inter se erunt aequalia.

Obs. 2. Clavio monente conversa quoque propositionis III. 35. valet, quod facile, descripto circulo per tria quaecunque puncta extrema quatuor illorum segmentorum, per absurdum demonstratur. Ea contra, quae in praecedente corollaria continetur, propositio generalior converti nequit. Contrarium asserit Gilbert. l. c. p. 365.

ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἐφαπτέσθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχομενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ. Ἡ ἄρα ΔΓΑ ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν, ἢ οὔ.

Ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ἴση δὲ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐφαπτομένης.

PROPOSITIO XXXVI.

Obs. 1. Ad generalem rei demonstrationem, observante Pfleiderero, adhiberi potest etiam haec propositio: si ad punctum aliquod extra circulum in recta circulum secante e centro ducatur recta, erit rectangulum ex integra secante et parte eius exteriore, una cum quadrato radii, aequale quadrato rectae e centro ad illud punctum ductae. Cf. Gilbert. p. 357. et 359.

ctangulum sub tota secante et exteriore segmento inter punctum et convexam circumferentiam contentum aequale quadrato ex contingente.

Extra circulum $AB\Gamma$ sumatur aliquod punctum Δ, et a Δ ad $AB\Gamma$ circulum cadant duae rectae $\Delta\Gamma A$, ΔB, et ipsa quidem $\Delta\Gamma A$ secet circulum $AB\Gamma$, ipsa vero ΔB contingat; dico rectangulum sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ contentum aequale esse quadrato ex ΔB. Ipsa igitur $\Delta\Gamma A$ vel per centrum transit vel non.

Transeat primum per centrum (Fig. 278. a.), et sit Z centrum circuli $AB\Gamma$, et iungatur ZB; rectus igitur est $ZB\Delta$ (III. 18.). Et quoniam recta $A\Gamma$ bifariam secta est in Z, adiicitur vero ipsi $\Gamma\Delta$; rectangulum sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ cum quadrato ex $Z\Gamma$ aequale est quadrato ex $Z\Delta$ (II. 6.). Aequalis autem $Z\Gamma$ ipsi ZB; rectangulum igitur sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ cum quadrato ex ZB aequale est quadrato ex $Z\Delta$. Quadrato vero ex $Z\Delta$ aequalia sunt quadrata ex ZB, $B\Delta$ (I. 47.), rectus enim angulus $ZB\Delta$ (III. 18.); rectangulum igitur sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ cum quadrato ex ZB aequale est quadratis ex ZB, $B\Delta$. Commune auferatur quadratum ex ZB, reliquum igitur rectangulum sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ aequale est quadrato ex contingente ΔB.

Cor. 1. Si ex eodem puncto extra circulum ducantur plures rectae, quae circulum secant, rectangula sub unaquaque earum integra et parte eius exteriore inter se sunt aequalia. Quodvis enim eiusmodi rectangulum aequale est quadrato contingentis ex isto puncto ad circulum ductae. Cf. Clavius, Tacquet, Gilbert alii.

Cor. 2. Utramque propositionem III. 35. Cor. et III. 36.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Ἴση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τῷ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ,

Cor. 1. uno enunciato comprehendere licet. Nempe, si e puncto aliquo sive intra sive extra circulum sito ad circulum ducantur plures rectae, quae eum secant, rectangula e partibus cuiusque earum inter punctum et circulum comprehensis erunt aequalia. Et potest ipsa etiam III. 36. sub hoc enunciato, vel sub Cor. 1. comprehendi: nempe, si recta iam non secet circulum, sed contingat, duo sectionis puncta in unum contactus punctum coincidunt, et rectangulum sub partibus inter punctum et circulum comprehensis abit in quadratum contingentis, quod observat Coëtsius ad III. 36. Schol. 2. Pariter, quae ad III. 35. Obs. 1. et III. 36. Obs. 1.

Sed $\Delta\Gamma A$ non transeat per centrum circuli $AB\Gamma$ (Fig. 278. b.), et sumatur centrum E, et ex E ad $A\Gamma$ perpendicularis ducatur EZ (I. 12.), et iungantur EB, $E\Gamma$, $E\Delta$; rectus igitur est $EZ\Delta$. Et quoniam recta aliqua EZ per centrum rectam aliquam $A\Gamma$ non per centrum ductam ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit (III. 3.); AZ igitur ipsi $Z\Gamma$ est aequalis. Et quoniam recta $A\Gamma$ secatur bifariam in puncto Z, adiicitur vero ipsi $\Gamma\Delta$; rectangulum sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ cum quadrato ex $Z\Gamma$ aequale est quadrato ex $Z\Delta$ (II. 6.). Commune addatur quadratum ex ZE; rectangulum igitur sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ cum quadratis ex ΔZ, ZE aequale est quadratis ex ΔZ, ZE. Sed quadratis ex ΓZ, ZE aequale est quadratum ex $E\Gamma$ (I. 47.), rectus enim est angulus $EZ\Gamma$; quadratis autem ex ΔZ, ZE aequale est quadratum ex $E\Delta$ (I. 47.). Rectangulum igitur sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ cum quadrato ex $E\Gamma$ aequale est quadrato ex $E\Delta$. Aequalis autem $E\Gamma$ ipsi EB; rectangulum igitur $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ cum quadrato ex EB aequale est quadrato ex $E\Delta$. Quadrato autem ex $E\Delta$ aequalia sunt quadrata ex EB, $B\Delta$ (I. 47.), rectus enim angulus $EB\Delta$; rectangulum igitur sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$

continentur propositiones, uno enunciato comprehendi possunt. Cf. Gilbert. l. c.

Obs. 2. Si e puncto dato ductae sint duae tantum rectae, ita ut rectangula comprehensa sub totis, et sub segmentis puncto isti adiacentibus sint aequalia, poterit vicissim per quatuor puncta extrema reliquorum segmentorum circulis describi. Circulo nempe per tria horum punctorum descripto, ostendetur per absurdum, eum non posse non per quartum quoque transire. Sin autem e puncto dato plures duabus rectis exeant, Cor. 1. ita converti nequit. Contrarium habet Gilbert. l. c.

κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΙΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἡ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προσπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστιν.

Obs. 3. Si in fig. 278. à rectam *ΔΑ* consideremus ut summam rectarum *ΖΔ*, et *ΖΒ*, rectam autem *ΔΓ* ut differentiam earum, propositio huius casus ita quoque enunciari potest; in omni triangulo rectangulo *ΔΒΖ* rectangulum ex hypotenusae *ΖΔ* et unius lateris *ΖΒ* summa ac differentia aequatur quadrato lateris alterius *ΔΒ*, quod consentit cum II. 4. Cor 4. Cf. Whiston. apud Tacquet. ad h. l.

Obs. 4. Pariter ea pars Cor. 1., qua una rectarum, quae circulum secant, per centrum transit, ita exprimi poterit: si (Fig. 279. a. b.) ab angulo *Ε* trianguli alicuius *ΕΔΑ*, cuius

cum quadrato ex EB aequale est quadratis ex EB, $B\Delta$. Commune auferatur quadratum ex EB; reliquum igitur rectangulum sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ aequale est quadrato ex ΔB. Si igitur extra circulum etc.

PROPOSITIO XXXVII. (Fig. 280.)

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ex puncto autem in circulum cadant duae rectae, et una quidem earum secet circulum, altera vero in eum incidat, sit autem rectangulum sub tota secante et exteriore segmento inter punctum et convexam circumferentiam aequale quadrato ex incidente; incidens continget circulum.

Extra circulum $AB\Gamma$ sumatur aliquod punctum Δ, et ex Δ in circulum $AB\Gamma$ incidant duae rectae $\Delta\Gamma A$, ΔB, et ipsa quidem $\Delta\Gamma A$ secet circulum, ipsa vero ΔB in eum incidat, sit autem rectangulum sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ aequale quadrato ex ΔB; dico ipsam ΔB contingere circulum $AB\Gamma$.

Ducatur enim rectae ΔE circulum $AB\Gamma$ contingens (III. 17.), et sumatur centrum circuli $AB\Gamma$ (III. 1.), et sit Z, et iungantur ZE, ZB, $Z\Delta$; angulus igitur $ZE\Delta$ rectus est (III. 18.).

latera $E\Delta$, $E\Gamma$ sunt inaequalia, demittatur in basin (si opus sit productam) perpendiculum $E\Theta$, erit rectangulum $\Theta\Delta \times \Delta H$ sub summa et differentia laterum $E\Delta$, $E\Gamma$ aequale rectangulo $\Gamma\Delta \times \Delta A$ sub summa et differentia rectarum $Z\Delta$, $Z\Delta$ inter perpendiculum et angulos basis interceptarum. Cf. Whiston. l. c. Haec ipsa propositio, eodem monente, casu, qui in figura priore sistitur, etiam ita exprimi potest: si ab angulo E trianguli $AE\Delta$ demittitur perpendicularis in basin $A\Delta$, eam dividens in duo segmenta AZ, ΔZ; erit rectangulum sub summa et differentia laterum $E\Delta$, EA aequale rectangulo sub basi $A\Delta$, et differentia segmentorum basis $\Gamma\Delta$

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. Ὑπόκειται δὲ [1]) τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΒ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ. Γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. Καί ἐστιν ἡ ΒΖ ἐκβαλλομένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται καὶ τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται [2]) τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται κἂν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνῃ [3]). Ἐὰν ἄρα κύκλου καὶ τὰ ἑξῆς.

1) Pro ὑπόκειται δὲ Peyrardus ex Cod. a minus accurate habet: ἦν δὲ καὶ.

2) Verba inter utrumque ἐφάπτεται e Cod. a iure addidit Peyrardus.

3) Verba: ὁμοίως δὲ δειχθήσεται — τυγχάνῃ Rob. Simson. ab editore quodam inscite addita esse putat.

PROPOSITIO XXXVII.

Obs. Est haec propositio conversa praecedentis. Campanus eam aliter duplici modo demonstrat, vel apagogice, dum sumit, ex eadem rectae ΔΖ parte aliam contingentem ductam esse, vel directe, dum nempe rectangulum e segmen-

Et quoniam ΔE contingit circulum $AB\Gamma$, secat autem $\Delta\Gamma A$; rectangulum sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ aequale est quadrato ex ΔE (III. 36.). Ponitur autem et rectangulum sub $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ aequale quadrato ex ΔB; quadratum igitur ex ΔE aequale est quadrato ex ΔB, aequalis igitur ΔE lineae ΔB. Est autem et ZE ipsi ZB aequalis, duae igitur ΔE, EZ duabus ΔB, BZ aequales sunt, et basis ipsarum communis $Z\Delta$; angulus igitur ΔEZ angulo ΔBZ est aequalis (I. 8.) Rectus autem ΔEZ; rectus igitur et ΔBZ. Et est BZ producta diameter, quae vero diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur contingit circulum (III. 16.); recta ΔB igitur contingit circulum $AB\Gamma$. Similiter autem ostendemus, et si centrum in $A\Gamma$ sit. Si igitur extra circulum etc.

tis eius rectae considerat, quae per centrum transit, et ope II. 6. ostendit, esse $\Delta B^q + BZ^q = \Delta Z^q$, adeoque (I. 48.) angulum ΔBZ rectum. Caeterum insiguem propositiones 35—37. utilitatem, ut per omnem geometriam, ita maxime in doctrina de tactionibus habent.

Cor. Si e puncto aliquo extra circulum duae rectae aequales in circulum incidant, quarum una eam contingat, continget quoque altera. Denique ad hunc librum universe notamus, multa adhuc scitu haud iniucunda ei addi potuisse, maxime e libro tertio Gregorii a St. Vincent. de quadratura circuli, quae brevitatis studio hic omisimus.

EXCURSUS I.

AD

ELEMENTORUM

I. 29.

Diximus ad Propos. I. 29., in qua primum adhibetur axioma undecimum, vel postulatum quintum, multum inter *Geometras* non quidem de veritate huius axiomatis, at de eius evidentia disceptatum fuisse. Et axioma quidem ipsum ita habet:

Si in duas rectas alia recta incidens angulos internos ad easdem sui partes duobus rectis minores faciat, rectae, in quas illa incidit, productae in infinitum inter se coincident (se invicem secabunt) ad eas partes, ad quas sunt anguli duobus rectis minores. Vel, ut aliter dicamus, ad has partes cum recta incidente triangulum efficient.

Ex hoc axiomate manifesto consequitur, duas rectas, quae ab una quadam recta ita secentur, ut anguli interni sint duobus rectis minores, etiam sectas a quavis alia recta in punctis duobus diversis cum illa angulos internos efficere duobus rectis minores. Quum enim ex isto axiomate rectae ab una aliqua recta ita sectae inter se conveniant, necessario cum alia quavis, a qua pariter in punctis duobus diversis secantur, triangulum efficient, unde ex I. 17. duo anguli interni simul minores erunt duobus rectis.

Caeterum facile patet, hoc axioma esse conversam propositionis I. 17.: et si, quod Peletarius vult, conversae propositionum, quarum veritas demonstrata est, ipsae etiam generatim verae essent, nec demonstratione egerent, nihil attineret ulterius quaerere. Id vero non ita se habere, sed conversas, nisi sua luce fulgeant, demonstratione semper sta-

biliri debere, diximus ad I. 6. et omnes logici monent. Iam hanc conversam propositionis I. 17. ex ea ipsa demonstrare quidem tentavit Castillon. (Mém. de l'Acad. de Berlin années 1788. 1789.) at manifesto irrito conatu. Ex eo nempe, quod ex I. 17. patet, *esse nonnunquam rectas*, quae ab aliqua recta ita sectae, ut anguli interni minores sint duobus rectis, concurrant, concludit, *omnes* rectas, quae ita secentur, necessario concurrere.

Neque vero cum Proclo, aliisque nonnullis dixerim, postulatum aut axioma non esse posse propositionem, cuius conversa (hic nempe I. 17.) inter theomerata demonstretur (εἰ τὸ ἀντίστροφον ὡς ἀποδεικτὸν ἐν τοῖς θεωρήμασιν ἀναγέγραπται.) Neque enim necesse est, ut conversa propositionis, quae per se patet, adeoque nulla demonstratione eget, etiam ipsa aeque clara sit. Unum videndum est, utrum assertum aliquod per se extra omnem dubitationem positum sit. Et de hoc quidem in axiomate 11. multi dubitavere. Unde factum est, ut varias excogitarent rationes, vel illud axioma (plerumque alio axiomate, quod ipsis evidentius videbatur, assumto, aut etiam parallelarum definitione mutata, aut alia ratione) demonstrandi, vel sine eius ope parallelarum theoriam adstruendi. Liceat nonnullam potissimorum, quae huc pertinent, et mihi innotuerunt, tentaminum breviter commemorare. In qua re gratus fateor eximie me adiutum fuisse opera viri doctissimi mihique amicissimi, Hauberi, Seminarii Schönthalensis professoris meritissimi, qui, quam dudum elaboravit, de theoria et historia parallelarum commentationem, quam propediem lucem publicam visuram esse spero, benevole mecum communicare, et, ut quae meis usibus inservire putarem, inde excerperem, permit ere voluit. Et illi quidem conamina circa hanc rem facta ad certas quasdam classes referre visum fuit, consilio sane haud improbando: ego vero, quantum fieri possit, in iis certe, qui novam aliquam in hac re methodum proposuerunt: plerumque temporis rationem sequendam putavi, quo facilius pateat, quis primus aliquam demonstrandi viam tentarit, ita tamen,

ut brevitatis studio subiungerem subinde eos, qui simili modo rem tractarunt. Neque vero omnia de hac re cogitata, quae infinita fere sunt, prolixe exponere consultum fuerit, sed potiora saltim, et maxime e libris minus obviis deprompta summatim afferre statui.

Primum itaque, Proclo referente, Ptolomaeus *) libellum singularem composuit περὶ τοῦ τὰς ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν, quo Axioma undecimum demonstrare conatus est. Eius demonstratio, quam Proclus exhibet, eo fere redit: si duae rectae parallelae ab alia recta secentur angulos internos, qui ex una parte secantis efficiantur, aut aequales esse duobus rectis, aut iis maiores aut minores. At, quod ex una parte secantis fiat, idem etiam ex altera parte, e qua rectae pariter parallelae sint, fieri debere. Unde, si ex una parte anguli interni sumantur duobus rectis maiores, maiores etiam ex altera parte fieri necesse esse; pariterque, si minores duobus rectis ex una parte fuerint, futuros etiam ex altera minores, quod utrumque absurdum sit (I. 13.). Nihil itaque restare, quam ut rectae parallelae, si ab alia quadam recta secentur, ex utraque sui parte angulos internos efficiant duobus rectis aequales. Atque ita demonstrata propositione I. 29. facile inde deducitur axioma 11. At iure in hac demonstratione, quidquid Ramus ogganniat, reprehenditur, sine causa sumi, angulos ex utraque parte rectae secantis eiusdem semper indolis esse debere, nempe vel ex utraque parte maiores recto, vel ex utraque parte minores, vel ex utraque parte duobus rectis aequales. Playfair. Elem. of Geometry p. 365. observat, niti hanc demonstrationem fundamento, ut aiunt, rationis sufficientis, nec vero esse rationem distincte expositam sumendi, quoad angulos idem ex utraque parte rectae secantis locum habere. Similem fere suppositionem invenimus etiam apud Ohmium (Kritische Beleucht. der Math. etc. 1819.),

*) Incertum est, an is Claudius Ptolomaeus fuerit, vixit tamen Proclus post Ptolemaeum Astronomum (Klügel. Conat. praecip. Theoriam Parallelar. demonstrandi Recens. Gott. 1763. p. IV.

qui praeterea sumit, rectas, quae se non secent, eandem positionem habere.

Ipse deinde Proclus rem ita expedire tentat, ut primum monstret, rectam, quae e duabus rectis parallelis unam secet, secare etiam alteram, unde postea facili negotio deducit axioma 11. In quo ita ille procedit, ut sumat cum Aristotele, duas rectas, quae ex uno eodemque puncto sub aliquo angulo exeant, si in infinitum producantur, discedere a se invicem ad distantiam data quavis maiorem. Inde porro efficit, posse itaque rectam, quae e duabus parallelis unam secet, ad distantiam produci maiorem ea, qua altera parallela ab ea distet, adeoque necessario etiam hanc alteram parallelam secare. Circa hanc demonstrationem Borellius (Euclid. restitut. p. 30.), Saccherius (Euclid. ab omni naevo vindicatus p. 31.), Klügel. (Conat. praecip. etc. p. IV. sq.) monent, Proclo, qui in reliquis Euclideam parallelarum notionem retineat, non tamen stabilem hanc notionem videri fuisse. In hac enim demonstratione tacite eum sumere, parallelas omnes aequale aut saltim finitum intervallum servare. Cf. Hoffmann. Crit. der Parallel. Theorie I. Th. p. 22. sq.

Aliter hanc rem aggressus est Arabs, aut ut alii volunt, Persa Nassireddinus, cuius nomine exstat Arabica Euclidis Elementorum Versio impressa Romae 1594. Is inter Propos. 28. et 29. libri primi, referente Wallisio (Opera Mathem. Vol. II. p. 669. sqq.) et brevius Kaestnero (Geschichte der Mathem. I. B. p. 375. sqq.), ita fere axioma 11. demonstrare conatur. Praemittit tria Lemmata.

Lemm. 1. a) Si quaelibet duae rectae, in eodem plano positae sint (Fig. 96.) AB, CD, in quas rectae EF, GH, IK etc. ita incidunt, ut earum singulae perpendiculares sint rectae CD, reetam autem AB ita secent, ut angulorum alter acutus sit, alter obtusus, omnes puta acuti ad partes BD, obtusi autem ad partes AC: dico, duas illas rectas AB, CD propius semper accedere versus partes BD (quamdiu se mutuo non secent) et remotius distare versus partes AC: item, perpendiculares illas decrescere versus BD (usque ad inter-

sectionem) augeri vero versus AC, ita nempe, ut sit EF > GH, GH > IK etc.

b) Item, si singulae rectae in duas illas rectas incidentes perpendiculares sint earum alteri, atque inter se continuo crescant, prout propius ad unas partes duarum illarum rectarum assumantur, decrescant vero ad alteras partes: etiam illae duae rectae AB, CD remotius ab invicem abscedunt ex ea parte, ubi perpendiculares illae longiores fiunt, propius autem ex altera parte inter se accedunt, dum se mutuo intersecant. — Perpendicularium autem illarum quaelibet eam duarum rectarum, cui non sumebantur perpendiculares esse, secabit angulis duobus, altero acuto, altero obtuso, omnesque anguli illi acuti versus eas partes erunt, qua propius accedunt duae illae rectae, omnes autem obtusi versus partes contrarias. Suntque hae duae propositiones manifestae, atque a quibusdam geometris ita usurpantur, ut quae pro manifestis habendae sint. Non sine ratione Wallisius addit: „Esto. At, inquam, ecquis non facilius conceperit, ut clarum: duas rectas in eodem plano convergentes, tandem, si producantur, occursuras, quam hunc totum apparatum." His addiderim, ut pateat, in conditionibus nihil inesse, quod sibi ipsi contradicat, etiam in parte priore lemmatis illud ante omnia *demonstrandum* esse, si recta EF in rectas AB, CD incidens, perpendicularis sit ad CD, cum AB autem versus BD angulum acutum, adeoque versus AC obtusum efficiat, tum reliquas ad CD perpendiculares GH, IK etc., pariter cum AB ad easdem partes BD acutos, adeoque versus AC obtusos angulos efficere. Cf. etiam Saccherius l. c. p. 38. sq.) Kästner. l. c. Hoffmann. Crit. I. Th. p. 115. sqq.

Lemm. 2. „Si quaelibet duae rectae (Fig. 97.) AC, BD ab eiusdem rectae AB extremis et ad easdem partes ductae ipsi sint perpendiculares, atque inter se aequales, earumque extrema iungantur recta CD: erit uterque angulus ACD, BDC rectus, praeterea erit CD = AB. Nam, si v. g. ACD non sit rectus, erit vel acutus vel obtusus. Sit, si fieri potest, acutus: erit ex Lemm. I. AC > BD. At ex hyp.

etiam AC=BD. Similis erit demonstratio, si sumatur angulus ACD obtusus." (At vero ex Lemm 1. sumi etiam debet, ut valeat consequentia, si angulus ACD fuerit acutus, *simul etiam* BDC *obtusum esse*, quod simul locum habere tacite sumit, non probat Nassireddinus.) Esse autem CD=AB, si reliqua pro demonstratis sumseris, brevius ac Wallisio interprete est apud Nassireddinum demonstrabitur ita: ducta BC, quum sit BDC=BAC= recto, et BC communis, et BD=AC ex hyp. erit ex iis, quae ad I. 26. diximus, CD =AB.

Lemm. 3. In omni triangulo rectilineo tres anguli aequantur duobus rectis. Atque illud quidem, si duo priora lemmata concedantur, in triangulo BAC (Fig. 97.) ad AB rectangulo facillime probatur, erecta in B recta BD ad BA perpendiculari, sumtaque BD=AC, ubi ex Lemm. 2. figuram ABCD quatuor angulos rectos habere, et ex I. 4. triangula CAB, BDC aequalia prorsus esse, adeoque trianguli CAB pariter ac BDC angulos duobus rectis aequales esse efficitur. Facile deinde idem in triangulis obtusangulis et acutangulis ope trianguli rectanguli demonstratur.

His praemissis denique Nassireddinus ad axioma 11. demonstrandum accedit, cuius iterum tres casus distinguit, prout recta, quae duas alias secat, ita, ut duo anguli interni duobus rectis minores sint, cum altera earum angulum rectum aut obtusum, aut cum utraque acutum efficit. Duo casus postremo loco positi facile ex primo demonstrantur, quem breviter adhuc videbimus.

Quodsi itaque duae rectae AB, CD (Fig. 98.) ita ab aliqua recta EF secentur, ut ea alteri earum CD sit perpendicularis, et anguli interni DCE, BEC simul sumti sint minores duobus rectis, rectae AB, CD, si opus sit, productae, necessario concurrent. Ex puncto quocunque G rectae AB demittatur perpendiculum in EF, quod, quum BEC ex hyp. sit angulus acutus, ex parte huius anguli cadet, adeoque vel cum perpendiculo CD coincidet, quo facto constat, quod probandum erat, vel ultra CD versus F vel inter E et C ca-

det. Si cadat ultra CD versus F, constabit propositum ex Ax. 13. et I. 27. Si cadat inter E et C. v. c. in H (Fig. 99.), sumatur rectae HE duplum KE, triplum ME etc. usque dum perveniatur ad aliquod eius multiplum OE, quod maius sit, quam CE. Pariter in recta AB sumatur rectae GE duplum IE, triplum LE etc. usque dum habeatur eius aequemultiplex NE, quotuplex OE fuit rectae HE. Iam facile demonstratur, si ex I ad EF demittatur perpendicularis Ir (ita ut punctum r rectae EF incidat) punctum r idem fore ac punctum K, pariterque perpendicula a L . . . N in EF demissa in punctis M . . . . O cum ea convenire — quam demonstrationem a Nassireddino praetermissam esse sine causa queruntur Kaestnerus, deceptus forte versione ipsi oblata minus accurata, et qui eum sequitur, Hoffmann. Crit. I. Th. p. 123. Est enim haec demonstratio saltim in iis, quae Wallisius ex eo affert. Nempe, si ex E erigatur ad EF perpendiculum EP=GH, erit iuncta PG=EH, et HGP=EPG rectus (Lemm. 2.). Et, quia rectae EB, EF versus BF divergunt, erit perpendiculum Ir>GH (Lemm. 1.). Abscindatur rn=GH, et iungatur nG, eritque angulus HGn pariter ac rnG rectus, et Hr=Gn (Lemm. 2.). Et quum etiam HGP rectus sit, erunt nG, GP in directum (I. 14.). At quum in triangulis IGn=EGP sit GI=GE ex constr. et angulus IGn=EGP (I. 15.) et angulus InG (I. 14.) pariter ac GPE rectus erit (I. 26.) Gn=GP=HE=HK. At erat Gn=rH, itaque rH=HK, i. e. puncta r et K coincidunt. Similiter monstratur, perpendicula a L . . . N demissa in EF cum punctis M . . . . . O coincidere. Quum igitur O sit ultra C positum, recta CD (quae cum ON convenire nequit I. 27.) erit intra triangulum EON, adeoque rectam EN secabit (Ax. 13.). Ingeniosam hanc demonstrationem esse, Wallisius ait, et certe, si lemmata concedantur, haud reprobanda erit. At de his dubia nostra supra exprimimus.

Clavius quanquam queratur (Euclid. Elem. Libr. XV. 1591.; primam Elementorum Editionem Clavius dederat 1574.) nunquam sibi copiam factam, Euclidem Arabicum legendi,

habet tamen in sua editione Euclidis 1591. facta p. 50. sqq. demonstrationem axiomatis 11, quae cum ea, quam ex Nassireddino attulimus, multa habet communia. Alia tamen ille supponit principia quasi per se clara, aut levi aliqua illustratione egentia. Quorum est

1) Linea, cuius omnia puncta a recta linea, quae in eodem cum ea plano existit, aequaliter distat, recta est.

2) Si recta linea super aliam in transversum moveatur, constituens semper in suo extremo cum ea angulos rectos, describet alterum ipsius extremum quoque lineam rectam. (Pari scopo hanc propositionem adhibuere, et demonstrare conati sunt alii v. c. Hauf*) Leipz. Archiv für Mathem. X. Heft S. 179.). Pergit deinde Clavius:

3) Si ad rectam lineam duae perpendiculares rectae lineae erigantur inter se aequales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quovis puncto huius rectae ad priorem rectam demissa utrilibet priorum perpendicularium aequalis. Ex his deinde

4) deducit eam propositionem, qua Nassireddinus pro lemmate 2, usus erat, quam etiam alio adhuc modo demonstrare Clavius tentat, nempe ita, ut ostendat

5) Si in duas rectas lineas incidens faciat cum una earum angulum internum rectum, et cum altera ex eadem parte acutum, duas istas rectas minus semper inter se distare ad eas partes, ubi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distare. Atque hoc quidem, quoad rem ipsam nihil aliud est, quam Nassireddini Lemm. 1. e quo deinde

*) Idem etiam Archiv 9. Heft No. VI. alia indirecta ratione parallelarum theoriam exhibere voluit, de quo tentamine conferatur Hoffmann. Versuch einer neuen und gründl. Theorie der Parallelen, nebst einer Widerlegung des Hauffschen Versuchs, Offenbach 1801, et Hoffm. Crit. p. 27. sqq. Plura alia parallelarum theoriam stabiliendi tentamina a se facta repetit, novisque auget idem Hauff (Geometriae Fundamenta solida Gandae 1819., quorum editio secunda: Nova rectarum parallelarum theoria auct. C. Hauff prodiit Francofurti 1811), quae omnia tamen, ut verum fateamur, nutare nobis videntur. Nec tamen aliorum iudicium antevertendum putamus.

pariter id, quod tertio loco posuit Clavius, eodem fere modo atque apud Nassireddinum deducitur. Quocunque autem modo Clavii propositio 3. ostensa fuerit, ex ea deinde Clavius simili plane ratione, et magis forte dilucide, ac est apud Nassireddinum, axioma 11. adstruit. Hanc autem Clavii demonstrationem in iis, quae primo et secundo loco sumit, certiorem esse Euclideo axiomate vix puto quemquam sibi persuasurum esse. Cf. Giordano da Bitonto Euclid. restituto p. 63. sqq. Saccher. l. c. p. 33. sqq. Hoffmann. Crit. der Parall. Theor. I. Th. p. 12. sqq. Atque in eo etiam, quod quinto loco ponitur, et cuius demonstrationem tentavit Clavius, perpendiculis ex una duarum rectarum in alteram, et ex punctis, quibus haec illi rectae occurrant, vicissim in priorem demissis, multa desiderari circa eas harum parallelarum partes, quae duobus istorum perpendiculorum interceptae sint, monet Kaestnerus, ubi de Nassireddini Lemm. 1. agit (Geschichte der Mathem. I. B. p. 377.) cf. Hoffm. Crit. der Parall. Theorie p. 15. sqq. Et quamvis has lacunas aliqua ex parte exploverit Karsten. Math. theor. elem. et sublimior 1760. §. 9. neo ipse tamen demonstravit perpendicula, quae ab una harum rectarum ad alteram ducantur, universim omnia una ex parte semper crescere, ex altera semper decrescere. Idem fere ipso auctore ingenue fatente censendum est de similibus Hoffmanni conaminibus (Versuch einer neuen und gründl. Theorie der Parallelen, 1801. cf. eiusd. Krit. der Parall. Theorie 1807. I. Th. p. 263. sq.) qui tamen primus directe demonstrationem, in qua pauca forte supplenda fuerint, dedit, qua ostenditur, ex uno crure cuiusvis anguli acuti in alterum perpendiculum demitti posse, quod sit quavis data maius. Borellius etiam (Euclid. restitut. Pis. 1658. p. 32. sqq.) Clavii axioma 2. retinet, tum vero, quod Euclidis definitionem parallelarum, qua rectae in infinitum productae nusquam concurrere dicuntur, valde remotam et incomprehensibilem parallelarum passionem continere putabat, aliam earum definitionem substituit, quas nempe dicit esse in eodem plano sitas rectas, ad quas eadem aliqua recta perpendicularis sit. Deinde ex eo, quod diximus, axio-

nate demonstrat, si una aliqua recta ad alias duas perpendiculares sit, reliquas etiam omnes, quae ad unam parallelarum perpendiculares sint, perpendiculares fore etiam ad alteram. Hinc deinde propositionem I. 29. et axiom. 11. reliquasque, quae inde pendent, propositiones deducit, satis tamen modeste iudicat, se, si non solidius, saltim facilius ac brevius passiones parallelarum demonstrasse. Et sane id, quod ex Clavio sumit, axioma vix satis tutum fuerit.

Italus deinde Vitale Giordano da Bitonto (Euclide restituto Rom. 1680.) pariter Euclidis parallelarum definitionem reprehendit, quod negativa tantum sit (quod ipsum praeter alios etiam Hauff. repetit), nec veram earum indolem exprimat, unde ita eas definit, esse rectas, quae in eodem plano ex utraque parte in infinitum productae nec ad se invicem accedant, nec recedant, quarum rectarum possibilitatem se postea ostensarum esse spondet. Ipsam deinde parallelarum theoriam sequentibus propositionibus adstruere conatur.

1) „Si duae rectae (Fig. 100.) CA, DB sub angulis aequalibus incidant in tertiam aliquam rectam AB, et sit AC = BD, erit etiam perpendiculum CE ex C in AB demissum aequale perpendiculo DF ex D in AB demisso. Contra vero, si sit $AC \gtrless BD$, erit et $CE \gtrless DF$."

2) „Si in figura quadrilatera (Fig. 97.) ABCD aequales rectae AC, BD sub aequalibus angulis rectae AB insistant, erunt etiam reliqui anguli C et D aequales." Atque hae quidem duae propositiones facillime demonstrantur ab auctore.

3) Recta, cuius puncta extrema per aliquam curvam transeunt, spatium cum ea comprehendit."

4) „Recta, quae per duo puncta alicuius curvae ducitur, ex parte eius concava transit."

5) Perpendicula, quae e punctis quibuscunque curvae alicuius in rectam quamcunque demittuntur, nequeunt omnia inter se esse aequalia. Iungantur enim ex parte cava curvae (Fig. 101.) duo puncta quaecunque A, C, recta AC, in quam ex puncto aliquo B curvae demittatur perpendicularis BD, ex

A erigatur ad AC perpendicularis AG, sumatur in recta DB pro ducta punctum quodcunque F et fiat AG=DF iungaturque GF Iam rectae AG, DF aut perpendiculares erunt ad GF aut non. S perpendiculares sint, constat propositum, ob AG=DF>BF Sin autem non sint perpendiculares, erunt certe ex 2. angul G, F aequales: unde, quum AG>BF, erunt etiam ex 1. perpendicula ex A et B in GF demissa inaequalia, unde iterum constat propositum. Et quum punctum F pariter ac puncta A, C in curva pro lubitu sumi possint, patet omnino, innumeras rectas GF dari, de quibus valeat propositum. Ita saltim ille concludere debebat, ut monet Klügel, (Conat. praecip. p. XX.) non autem, ut apud Italum nostrum est, perpendicula in *rectam quamcunque* a curvae punctis demissa non posse omnia inter se esse aequalia.

6) „Si duae rectae aequales AB, CD (Fig. 102.) in eodem plano sitae alii rectae BD ad angulos rectos insistant, et ex puncto aliquo E iunctae AC demissum in BD perpendiculum EF aequale sit rectae AB, etiam alia quaecunque recta, ut GH ex puncto aliquo G ad BD perpendiculariter ducta aequalis erit recta AB. Nempe, quum ex 2. anguli BAC, et et DCA sint aequales, et ex eadem ratione etiam anguli BAC et FEA, pariterque anguli DCA et FEC aequales sint, aequales erunt anguli FEA, FEC (Ax. 1.), unde FEA, FEC recti erunt (Def. 10.), adeoque etiam anguli BAC, et DCA recti sunt. Deinde, si GH, AB non sint aequales, erit GH vel maior vel minor altera AB. Sit, si fieri potest, maior, et sit IH=AB, ducanturque AI, CI. Erit itaque angulus BAI minor recto, pariterque DCI minor quam DCA i. e. minor recto. At ex 2. HIA=BAI, et HIC=DCI, unde etiam uterque HIA, HIC minor recto, adeoque AIG, et CIG uterque maior recto (I. 13.), et angulus AIC maior duobus rectis, adeoque multo magis AIC+ACI maiores erunt duobus rectis, quod fieri nequit (I. 17.). Itaque GH nequit esse maior quam AB. Similiter ostenditur, nec minorem esse posse: erunt itaque AB, GH aequales."

7) „Si duae rectae aequales (Fig. 103.) AB, DC in eodem

plano sitae ad angulos rectos insistant alii rectae BC, et e punctis quibuscunque E ductae AD perpendicula EF demittantur in BC, erit quodvis eorum aequale rectae AB. Si enim unum horum perpendiculorum non aequale fuerit rectae AB, nullum ei aequale erit (6.), itaque aut omnia maiora, aut omnia minora erunt, quam AB, aut alia maiora, alia minora. Atqui 1) haec perpendicula non omnia maiora esse possunt quam AB. Quodsi enim foret, abscindatur in omnibus GI=AB, eritque linea per omnia ista puncta G ducta, curva concava versus E (4.), e cuius punctis G aequalia ad BC perpendicula demissa sunt, quod fieri nequit (5.). (Ita Giord. da Bitonto, ut iam monuimus, propositionem 5. non adeo universaliter demonstratam esse.) Simili ratione demonstratur 2) nec omnia perpendicula minora esse posse quam AB, nec 3) alia maiora, alia minora."

8) „Si in figura quadrilatera duo latera opposita aequalia sint, et uni reliquorum laterum ad angulos rectos insistant, erunt etiam duo reliqui anguli recti. Id ope 7. iam eodem fere modo demonstratur ac pars prior 6." Est haec propositio Nassired. Lemm. 2. et Clavii Prop. 4.

9) „Si duae rectae (Fig. 104. 105.) AB, CD in eodem plano sitae secentur ab alia quadam recta EF, quae iis ad angulos rectos insistat, illae in infinitum productae nunquam nec ad se invicem accedent, nec recedent i. e. e definitione, erunt rectae parallelae. Nempe ex rectae AB puncto quocunque G demissum perpendiculum GH semper aequale erit perpendiculo EF. Si enim non sint aequalia, erit alterutrum maius altero. Sit 1) si fieri potest (Fig. 104.), GH>EF, sumtoque HI=EF, erit angulus FEI rectus. At FEG pariter ex hypoth. rectus est, unde foret FEI=FEG, pars toti q. e. a. (Ax. 9.). 2) Similis est demonstratio (Fig. 105.), nec GH maiorem esse posse quam EF. Erunt itaque duo perpendicula aequalia."

10) „Si duae rectae AB, CD (Fig. 106.) sint inter se parallelae, recta FE, quae unam earum CD ad angulos rectos secat, secabit etiam alteram AB ad angulos rectos. Se-

cetur enim ad rectos angulos utraque rectarum parallelarum AB, CD alia recta HI. (Id ipsum autem hic noster illegitime sumere videtur. Ostenderat quidem (9.), rectas ab alia recta ad angulos rectos sectas esse parallelas, at iam sumit conversam; parallelas semper ita secari ab aliqua recta, quod fieri semper posse ostendendum erat.) Sumatur deinde HG =IE, et ducatur GE: erit (8.) IEG angulus rectus. At ex hyp. etiam IEF, recta igitur EF cum EG coincidet."

11) „Si sit angulus rectilineus acutus quicunque ABC (Fig. 107.) et e puncto D quocunque rectae BA quantumlibet productae demittatur perpendiculum DE ad CB, quo magis punctum D in recta BA sumtum distat a B, eo magis etiam punctum E distabit a B. Nempe, si punctum F, e quo demittitur ad BC perpendiculum FG propius absit a B, quam D, necessario etiam erit BG<BE. Si enim neges, erit aut BG=BE, at tum foret angulus DGB, utpote rectus, aequalis angulo FGB, totum parti q. e. a. Aut BG>BE, adeoque punctum E in punctum aliquod rectae BG v. c. in H caderet, et rectae DH, FG se intersecarent in puncto aliquo I, ac foret IGH triangulum, in quo duo anguli G et H uterque rectus esset q. e. a. (I. 17.)." Notandum tamen est, verba: „*quanto* il punto preso in AB sarà più lontano dal punto B, *tanto* la perpendicolare segarà la retta CB nel punto più remoto dal punto B" involvere videri aliquam inter incrementa rectarum BD, BE rationem, quae tamen hic probari nequit.

12) „Si sit angulus rectilineus acutus quicunque ABC (Fig. 108.), et e puncto quocunque D unius e cruribus eius BC erigatur perpendiculum DE, illud, si opus sit, productum occurret alteri crui BA. Sumatur enim in recta BA punctum quodcunque G, et ex eo demittatur ad BC perpendiculum GH, et punctum H vel cum puncto D coincidet, vel erit H in recta BD ultra D producta, vel in ipsa BD. Duobus prioribus casibus facile patet propositum. Tertio casu autem noster rem inde patere putat, quod ex Prop. praecedente magis magisque a B remota perpendicula e punctis rectae BA in rectam BC demitti possint, quae, quum BD finitam tantum

habeat longitudinem, BA autem *in infinitum* produci possit, eandem ultra DE cadere necesse sit." Quam demonstrationem non sufficere, nec licere a maiore subinde distantia a B ad distantiam *data* BD maiorem concludere, vix est quod moneam.

13) „Rectae AB, CD (Fig. 109.), quae in eodem plano ab alia recta EF ita secantur, ut anguli alterni BGH, CHG sint aequales, sunt parallelae. (Est haec apud Euclidem I. 27.) Bisecetur enim GH in I, et ex I demittantur ad AB, CD perpendicula IL, IK, erunt GI=IH ex const.. LGI=IHK (hyp.) L=K utpote recti ex hyp. unde et GIL=KIH (I. 26.) adeoque LIK erit recta (Conv. 1. Prop. I. 15.). Et quum sit ea ad AB et CD perpendicularis, hae duae rectae erunt parallelae (9.)."

14) „Pariter, si angulus externus aequalis sit interno ad easdem partes opposito, vel si duo interni aequales sint duobus rectis, parallelae erunt rectae, quae ita secantur." (Euclid. I. 28.)

15) „Si duae rectae parallelae secentur ab alia recta, erunt anguli alterni aequales etc." (Prop. I. 29.). Hanc iam simili constructione demonstrat ac 13., nisi quod ex I rectam uni parallelarum ad angulos rectos duci iubet, et ex 10. ostendit, eam etiam alteri parallelarum occurrere.

Sequuntur deinde Euclidis I. 30. et I. 31. adiecto corollario, per unum punctum extra aliquam rectam non nisi unam ei parallelam duci posse. Aliis deinde scholiis et corollariis Ax. 11. Euclidis demonstrat, atque etiam docet, rectam, quae e duabus parallelis unam secet, secare etiam alteram; porro: si duae rectae in eodem plano non sint parallelae, eas concurrere, et si non concurrant, esse parallelas, itaque omnes, quae non concurrant, nec ad se invicem accedere, nec recedere, additis ad finem rationibus, quare Euclidis definitio parallelarum pariter ac Ax. 11. et Clavii demonstratio ipsi imperfecta videatur.

Wallisius Operibus suis Mathematicis T. II. p. 665. sqq. Oxon. 1693. inseruit disceptationem geometricam de postulato

quinto libri I. Elementorum. Atque ille quidem primum defendere conatur, iure Euclidem postulatum illud, aut, ut nos dicimus, axioma sumsisse: „Quod verum sit, ait, hoc effatum, nemo dubitat. Non autem gratis assumendum, sed probandum fuisse, contendunt aliqui, duplici saltim argumento, sed quorum neutrum me movet. Potest, inquiunt, demonstrari, ideoque debet, et non ut principium primum assumi, quasi foret indemonstrabile. Verum illi non satis attendunt, inter has communes notiones (tum ab Euclide, tum ab ipsis, qui hoc obiiciunt) recenseri, non modo eas, quae omnino demonstrari non *possunt*, sed quae saltim demonstratione non *indigent*. Ecquis enim non videt, axioma sextum: aequalium dupla inter se esse aequalia, demonstrari posse ex secundo propter aequalia aequalibus addita? Sed et qui hoc effatum demonstrari posse contendunt (saltim quos ego vidi) non illud praestant, nisi assumtis aliis, quae sunt hoc ipso nihil clariora. Vel igitur fatendum illis erit, hoc Euclidi concedendum, vel aliud quid huius loco, quod non sit maius clarum, praesumendum. Obiiciunt porro, utut hoc verum sit de *lineis rectis*, (nempe occursuras tandem esse, quae convergunt rectae) cum tamen id de *lineis universim* non sit verum (ut de curvis cum rectis, aut cum aliis curvis notum est) id de *rectis* probandum erit, quod non est de *lineis universaliter* verum. Sed et hic in eundem ipsi lapidem impingunt, dum assumunt (ne plura nominem) *quod duae rectae non comprehendunt spatium*, quod de *lineis universim* ne ipsi dixerint. Certum utique est, *duas curvas* aut etiam *unam* posse spatium comprehendere. Mihi certe res videtur tam clara, ut de ea nemo, qui rem sedate perpenderit, merito dubitet (magis quam *angulos rectos omnes esse inter se aequales*), si dicatur:

Duae rectae in eodem plano convergentes (si satis continuentur) tandem occurrent. Et quidem *ab ea parte, qua convergunt* (non ea qua divaricantur). Si porro quaeratur, quaenam censendae sint *convergentes?* eas dicimus

In quas recta incidens duos internos (ex eadem parte) angulos faciat minores duobus rectis. Quippe si AB magis inclinat ad CD, quam haec ab illa reclinat; hoc est, si AB magis vergit ad CD quam haec ab illa refugiat, merito dicuntur invicem *convergentes;* nec video, quo charactere posit haec *convergentia* aptius describi, quam quod *illos angulos faciat minores duobus rectis.* Cum igitur luce sua sat clarum videatur, *sic convergentes rectas tandem coituras* (quod nemo unus dubitabit) sitque hoc aptum κριτήριον de rectis *convergentibus* (quod *anguli* sic facti sint *minores duobus rectis*) non video, quin hoc Euclidi *postulanti* merito *concedatur.* Si phantasiam cuiuspiam turbet, quod (in eodem sermone) pro *convergentibus* inseruerit Euclides harum *definitionem*: poterit ipse se inde satis expedire, rem separatim considerando, prout hic proponitur. Ego certe haud difficilis concesserim. Quippe qui mente satis concipit, quid sit *rectum esse*, et quid *in directum procedere* (eorsum continuo tendens, ab ea, qua coeperat, directione nusquam devians, quod in curva non fit) non poterit dubitare, quin, si *rectae* sint, sintque *in eodem plano*, et *convergentes*, et in *directum* procedant (idem alterà alterius punctum continuo respicientes eoque collimantes) non, inquam, dubitare poterit, quin si in *infinitum* (aut saltim quantum opus est) sic eorsum continuentur, occurrant tandem, utraque ad punctum illud, quo continuo collimabat, pertingens."

Addit deinde, cum tamen aliquot magni viri senserint, si non necesse, saltim aequum esse, ut demonstretur, ipsique id adgressi sint, inter quos refert Ptolemaeum, Proclum, Clavium, Thomam Oliver. Anglum, Arabem Anaritium quendam et Nassireddinum, se quoque suam symbolam conferre statuisse. Tum exhibita primum Nassireddini demonstratione, cuius potissima capita supra dedimus, addit, vidisse se in alio arab. mscpto duas alias huic non multum absimiles eiusdem postulati quinti demonstrationes. Hoc autem omnium commune esse, quod, dum Euclidi haud facile *postulandum* concesserint, *duas in eodem plano rectas convergentes, si pro-*

ducantur, tandem coituras, assumant ipsi huius loco aliud aliquod, nedum plura, postulatum, unde illud operose demonstrent, quod non minus difficile concessu videatur. Quo confirmatior ipse factus sit, immerito sugillatum iri Euclidem propter hoc (non iniquum), postulatum. Suam deinde subiungit demonstrationem, quae ad haec lemmata redit:

1 et 2) „Si finita recta, in recta infinita iacens, in directum continuetur (vel quantum libet promoveri intelligatur) etiam continuata (vel promota) iacebit in eadem recta infinita." Quod motum rectae adhibeat, excusat Wallisius exemplo Euclidis, aliorumque geometrarum, qui motum circuli in definitione Sphaerae, et motum trianguli in definitione Coni, quin in postulato tertio libri primi elementorum pariter motum rectae, et saepius praeterea superpositionem figurarum sumant.

3) „Si finitae rectae, in recta infinita iacenti, insistat recta angulum cum ea faciens, facit haec cum recta illa infinita eundem angulum."

4) „Si in recta infinita, finita recta iacens, in directum promoveatur, et huic insistens recta, non variato angulo, simul feratur: facit haec ad rectam illam infinitam eosdem (seu aequales) ubique angulos."

5) „Si in duas rectas recta incidens angulos internos et ad easdem partes faciat minores duobus rectis: angulus externus (utrivis adiacens) opposito interno maior est."

6) „Iisdem positis; si recta interiacens (Fig. 110.), ut AC, in directum promoveatur in situm $\alpha\gamma$ (ita ut punctum A iam cum C coincidat, et simul feratur AB (manente angulo BAC invariato) in situra $\alpha\beta$: dico, totam rectam $\alpha\beta$, hoc est AB promotam cadere extra CD."

7) „Iisdem positis: dico (Fig. 111.) rectam $\alpha\beta$, hoc est AB promotam rectam CD prius secare, quam punctum α ad C perveniat."

8) „*Tandem*, ait, praesumo (ex praesupposita rationum natura tanquam cognita, et figurarum similium definitione) ut communem notionem

Datae cuicunque figurae similem aliam cuiuscunque magnitudinis possibilem esse. Hoc enim (propter quantitates continuas in infinitum divisibiles pariter atque in infinitum augibiles) videtur ex ipsa quantitatis natura fluere; figuram scilicet quamlibet continue posse (retenta figurae specie) tum minui, tum augeri in infinitum. Atque hoc revera (utut inobservati, nec ipsi forsan animadvertentes) praesumunt omnes, et cum aliis Euclides ipse. Dum enim postulat *dato centro et intervallo circulum describere*, praesumit, circulum cuiuscunque magnitudinis, vel quocunque radio possibilem esse: quodque praesumit posse fieri, postulat te posse facere. Et quanquam non pariter aequum esset postulatum, cuivis figurae datae similem te posse (nondum edoctum) super data recta construere: possibile tamen esse, hoc fieri, de figura quacunque non minus praesumendum erit, quam de circulo. — Nec obstat praesumtioni huic nostrae, quod proportionalium definitio, et (quae hanc supponit) definitio similium figurarum nondum erat ab Euclide tradita (sed altera libro quinto, altera sexto post tradendae): poterat enim Euclides, si expedire visum esset, utrumque libro primo praemisisse.

9) Ex his lemmatibus deinde facile demonstrat axioma Euclidis undecimum, „quod nempe, si ponuntur (Fig. 112.) anguli BAC+DCA<2 rectis, ex Lemm. 7. semper inveniri potest triangulum $\pi C\alpha$, cuius anguli ad basin iidem vel aequales sint angulis DCA, BAC, et huic triangulo $\pi C\alpha$ deinde aliud simile cogitari potest super recta CA. — Neque, ait Wallisius, hic obstat, quod super datam rectam triangulum constituere dato simile nondum docuerat Euclides: nam multa passim in παρόδοις ad demonstrationes theorematum (utut in problematum constructione secus sit) fieri posse praesumuntur et supponuntur facta, quae quomodo fiant geometrice, nondum traditur. — Cum igitur sit PCA triangulum, occurrunt invicem duae rectae CP, AP. Erit nempe, quum triangula PCA, $\pi C\alpha$ sint similia, PCA=$\pi C\alpha$=DCA, adeoque recta CP in ipsa CD producta iacet, pariterque PAC=$\pi\alpha C$=BAC, unde etiam AP in ipsa AB producta erit. Coëunt au-

tem AP, CP in puncto P, unde coëunt DC, BA in eod puncto i. e. ad eas partes rectae AF, ubi sunt duo illi guli duobus rectis minores. His addit Wallisius: tantum tem abest, ut Euclidem culpem, quod ipse id non demo straverit, ut neque culpaverim, si plura adhuc indemonstr postulasset, v. c. cum Archimede, lineam rectam omni inter eadem puncta esse brevissimam, quo posito non op fuisset I. 20. Sed Euclides id sibi propositum habuisse vid tur, ut, quam paucissimis postulatis reliqua demonstraret f missimis consequentiis. Unde factum est, ut sibi non ra facessat negotium ea probandi, quae nemo non gratis conce serit. Et quidem in omni probatione in quacunque mate praesumendum est aliquid. Nam, nisi ex praesumtis (seu pra concessis, aut ante non probatis) nulla fit probatio. Ha autem *praesumenda* quamvis ab aliis scriptoribus, de reb aliis non soleant diserte recenseri (quod ab Euclide factu est) talia tamen *tacite praesumunt* alii, utut inobservati. Se et Euclides ipse in processu operis praeter haec diserte me morata (ut praecipua et magis notabilia) alia, sive ex *inspe ctione schematis*, sive *aliunde* manifesta passim praesumit, se quae nemo foret negaturus. — Et quidem, si adhuc plura ve tacite *praesumserat*, vel disertim *postulaverat* (quae sua luc clara sint) non foret inde culpandus — sed laudandus, qu tam distincte, quid velit, exposuerit. Nempe *lineae* (no quaelibet, sed saltim) *rectae* (non quotlibet, sed) *duae* (non utcunque sitae, sed) *in eodem plano*, (nec sit utcunque, sed) *in quas recta incidens angulos internos et ad easdem partes faciat minores duobus rectis*, (nondum forte coëunt, sed) *si producantur* (non utcunque, sed) *in infinitum*, *tandem* coibunt (non quidem ad utrasque partes sic incidentis rectae, nec ad utrasvis indifferenter, sed) *ad eas partes*, *ubi sunt illi duo anguli minores duobus rectis*. Quod optimo consilio factum iudico. Atque haec in Euclidis vindicias sufficiant." Ita quidem Wallisius. Et, quidquid sit de eo, quod in Lemm. 8. sumitur: *datae cuiuscunque figurae similem aliam cuiuscunque magnitudinis possibilem esse*, et nominatim super quacun-

e recta data triangulum descriptum cogitari posse, quod
ile sit triangulo dato, de qua suppositione disputari posse
e concedendum est, nescio tamen, an Klügelius (Conat.
ecip. etc. p. XV.) haud iusto iniquius de hoc Wallisii
namine iudicet. Putat nempe, qui axioma 11. neget, non
sse non postulatum Wallisii *sibi repugnans* dicere. Quin
monstraturum, nulla triangula, nisi aequalia, sibi esse
sse similia. Etenim, qui axioma 11. neget, pugnaturum,
uiusque trianguli BAC (Fig. 113.) angulum externum CAD
aiorem aut minorem esse summa duorum internorum oppo-
itorum. Si enim in uno casu eum illis aequalem censeret,
n omnibus idem ipsi fatendum fore, id itaque, cum contra
ypothesin ipsius sit, haud concessurum. Itaque affirmaturum
sse, triang. CAD maiorem aut minorem summam angulorum
abere quam triang. BCD, itemque triang. AED (facto angulo
EAD=CBD) maiorem vel minorem illam habere quam triang.
ACD, ergo etiam quam triang. BCD. Ergo angulum AED
aiorem aut minorem fore quam BCD; ergo triangula BCD
t AED non fore similia, licet angulos duos singulos aequa-
es habeant. Ita quidem Klügelius. At mihi haec argumen-
atio nihil probare videtur. Ille enim, quem Klügelius fingit,
dversarius ex falsa sua aut certe nondum demonstrata hypo-
hesi illud tantum adstruere poterit, *quae a se et Wallisio
ponantur, simul vera esse non posse*, sibi ea, quae Wallisius
postulet, haud certa videri (falsa esse nondum demonstavit).
Nec mirum. Tacite enim in iis, quae Wallisius sumit, in-
volvi 11. illud axioma, quod adversarius negat, nemo nega-
verit, quippe e suis suppositis, si iis non involutum esset,
nec evolvere illud poterat Wallisius. Utra autem sententia,
num Wallisii an adversarii vera sit, id inde pendebit, utra
magis sua luce fulgeat, aut ex aliis indubitatis principiis de-
rivari queat. Nec etiam omnia, quae ad figurarum similitu-
dinem pertinent v. c. laterum proportionalitas hic in censum
veniunt, sufficit Wallisio ponere, super quacunque recta
construi posse figuram alteri datae aequiangulam, vel potius
saltim construi posse triangulum alteri dato aequiangulum.

Cf. Saccherius p. 40. 41. sq. Tacquetus (Elementa Euclidea Geom. Plan. edita ab anno inde 1654. saepius, inter alia 1725. quam editionem hic citabimus p. 6.) Euclidis parallelarum definitionem e pari ratione ac Proclus reprehendit, quod dentur lineae, quae in infinitum productae, licet ad se mutuo adpropinquent ad intervallum quovis dato minus, nunquam tamen concurrant; ac rectas lineas parallelas eas esse dicit, quae in eodem plano sitae, utrimque in infinitum protractae aequalibus semper intervallis distent, vel, ut postea explicat, quorum omnia perpendicula ex una in alteram demissa sint aequalia. Eas generari dicit, si recta ad aliam perpendicularis ad hanc semper perpendiculariter moveatur: tunc enim alterum eius extremum describere (non tantum, ut Clavius ait, rectam, sed) parallelam ei, ad quam perpendiculariter movebatur. — At facile patet, demonstrari oportere, lineam, e cuius punctis quibuscunque demissa ad rectam aliquam perpendicula inter se aequalia sint, etiam ipsam rectam esse. Sumit deinde tria nova axiomata, quae quidem, concessa ipsius definitione, facile demonstrare poterat, adeoque demonstrare debebat, nempe p. 8. parallelas communi uti perpendiculo; et perpendicula bina ex parallelis aequales utrimque excipere partes; denique p. 27. inter crura cuiusvis anguli rectilinei duci posse rectam uni horum crurum parallelam et quavis data recta maiorem. Quae omnia sane haud ita comparata sunt, ut Euclidis ἀκρίβειαν ullo modo assequantur. Cf. Hoffm. Critik der Parallel. Theorie p. 210. sqq.

Wolfii demonstratio in Elem. Geom. quum ex eadem parallelarum definitione, a Posidonio iam, ut ad Def. 35. diximus, prolata, proficiscatur, neque etiam is demonstrare tentaverit, posse perpendicula ex una recta in alteram demissa omnia inter se esse aequalia, quum alii praeterea errores in eius argumentatione se facile prodant, v. c. quod sine demonstratione sumit, perpendiculum super una parallelarum erectum secare etiam alterum, nihil attinet, his diutius immorari. Idem circa alia etiam tentamina ex hac definitione parallelarum theoriam adstruendi monendum fuerit. Ita v. c.

La Caille (Leçons Elément. de Math. Edit. 1784. p. 261.) eandem parallelarum definitionem sumit, addit autem, quum duo puncta positionem rectae determinent, sufficere, si duo perpendicula sint aequalia. Hoc autem ad definitionem hanc defendendam haud sufficere quisque videt. Pariter Edmund. Scarburgh. (the English Euclide 1705.) retinet quidem Euclideam parallelarum definitionem, at pro axiomate sumit, parallelas eandem ubique distantiam habere, ubi eadem monenda videntur.

Similem defectum in eorum theoria locum habere, iam supra ad Def. 35. diximus, qui rectas parallelas eas esse dicunt, quae in eodem plano sitae ab alia recta ita secentur, ut anguli alterni fiant aequales, nempe probandum esse, id fieri, a quacunque recta secentur. Ex horum numero est potissimum Varignon. Elém. de Math. 1731., Bossut Traité Elém. de Géom. 1777. et multi eos secuti Galli, cum quibus etiam facit Austin. An Examinat. ot the first six Books of Euclids Elements Oxford. 1781. p. 13., quos itaque pariter hic praetermittimus. Ipse tamen Bossut postea Cours de Mathémat. T. II. 1800. ait, si rectae alicui aequalia perpendicula insistant, earumque extrema iungantur, has iunctas efficere unam rectam, ei, cui perpendicula insistunt, parallelam, de qua definitione vide, quae dicta sunt ad Def. 31.

Longe accuratius in ea re versatus est Hieron. Saccherius, edito Mediolani 1733. Euclide ab omni naevo vindicato. Et quamvis verum sit, quod Klügel. monet l. c. p. VI. VII. multis eum ambagibus uti, et in tam obscuris ac involutis ratiociniis facile errorem aliquem latere posse, et quamvis nec ipsum scopum penitus tetigisse fateamur, haud tamen inutile fuerit, laboribus viri paulisper immorari, eiusque demonstrandi rationem obiter saltim cognoscere, qui rem omnem diligentius, quam plerique reliquorum tractavit, et omnem lapidem movit, ut falsarum hypothesium absurditatem ostenderet, et ad certa omnia, quae huc pertinent, capita revocaret. Liceat itaque, quantum fieri potest brevissime, methodum eius iudicare. Et primum quidem ostendit, quod

etiam Giord. da Bitonto (quem Saccherius, quod mirum v
deri possit, haud legisse, aut aliunde nosse videtur) demo
strasse diximus, duas rectas aequales, quae eidem basi
easdem partes insistant, angulosque aequales efficiant, et qu
rum extrema iungantur, angulos quoque, quos cum iunc
faciant, efficere aequales: nominatim itaque, si eidem ba
duo aequalia perpendicula insistant, fore etiam, si eorum ex
trema iungantur, reliquorum angulorum vel utrumque re
ctum (quem ille casum hypothesin anguli recti vocat), v
utrumque obtusum (hypothesis anguli obtusi) vel utrumqu
acutum (hypothesis anguli acuti). Omnis deinde demonstra
tio eo redit, ut ostendat, hypothesin anguli obtusi pariter a
anguli acuti locum habere non posse, necessario itaque locum
habere hypothesin anguli recti, vel, ut aliter dicamus, i
figura quadrilatera, cuius duo latera opposita aequalia sint
atque ad basin perpendicularia, reliquos etiam angulos esse re
ctos, quod ipsum, ut supra vidimus, est Nassireddini Lemm
2. et a Clavio quoque 4. a Giord. da Bitonto autem 8. loco
positum fuit. Ac Euclideum axioma facile inde derivatur.
Et hypothesin quidem anguli obtusi non consistere posse facile
demonstrat, quum ea admissa veritas axiom. 11. Euclid., ex
hoc autem veritas hypotheseos anguli recti consequeretur,
antea autem ab ipso demonstratum fuerit, unam e tribus illis
hypothesibus vel unico saltim casu admissam excludere utram-
que reliquarum. Hac itaque hypothesi suo telo iugulata, in-
cipit, ut Saccherius ait, diuturnum auctoris proelium adver-
sus hypothesin anguli acuti, quae sola adhuc renuit veritati
axiomatis Euclidei. Et hic quidem multus est auctor noster
in stabiliendis variis consectariis, quae admissa una aut altera
hypothesi, et maxime hypothesi anguli acuti locum habere
debeant et vice versa (v. c. prout in quolibet triangulo tres
anguli simul aequales aut maiores aut minores sint duobus
rectis, locum habere hypothesin anguli recti (Hyp. 1. voca-
bimus) aut anguli obtusi (Hyp. 2.) aut anguli acuti (Hyp.
3.): pariterque in quovis quadrilatero omnes angulos simul
quatuor rectis aequales fore in Hyp. 1. aut maiores in Hyp.

2. aut minores in Hyp. 3.; et simili hypothesium diversitate angulum in semicirculo fore rectum, aut maiorem aut minorem recto etc. et vicissim). Adiectis deinde pluribus aliis Prop. XXIII. ostendit, duas rectas in eodem plano sitas vel commune habere perpendiculum, vel in alterutram eandem partem protractas semper magis ad se invicem accedere, nisi aliquando ad finitam distantiam una in alteram incidat. Deinde, postquam sumta Hyp. 3. magis ad se invicem ita accedere non posse ostendit, ut distantia earum semper maior sit data quadam longitudine, nihil relinqui putat, quam ut distantia earum quavis data minor sit, vel ut in infinito, ut aiunt, concurrant. Ita vero commune perpendiculum, et commune etiam segmentum habituras duas rectas in infinito concurrentes, quod quum fieri non possit, nec hypothesin tertiam locum habere posse. Solam itaque relinqui hyp. 1. quae cum Axiom. 11. arctissime cohaereat. Praeterea aliter etiam hyp. 3. destruere conatur, quod, ea sumta, linea aliqua curva simul maior ac minor esse debeat linea aliqua recta, quod tamen eum satis perspicue demonstrasse iure dubitatur. Unde concludit, hyp. 1. solam veram esse, adeoque Ax. 11. rite habere. Abuti tamen eum voce infiniti et concursus in infinito, merito iudicat Klügel., infinitum enim natura sua esse indeterminatum, et rectas, quas in infinito concurrere metaphorice dixeris, reapse haud concurrere, nec commune perpendiculum habere.

Notari omnino meretur, Lambertum quoque in meditationes circa parallelarum theoriam incidisse, iis admodum similes, quas e Saccherio attulimus, quamvis ipse Saccherii, quem ne legisse quidem videtur, nullam mentionem faciat. Fuerunt illae conscriptae 1766., at post mortem demum viri sagacissimi, cui forte ipsi non ex omni parte satisfecere, intertae a Bernoullio Lipsiensi Promtuario Mathemathico (Leipz. Magazin für Mathem. 2. St. 1786. p. 137. sqq. et 3. St. p. 325. sqq.) Lambertus post generalia circa ea, quae in parallelarum theoria adhuc desiderari possint, monita, nonnullas propositiones affert, quibus demonstratis Ax. 11. sponte

fluere ostendit, variisque modis tentat, eas ita struere, ut vix quidquam in earum demonstratione desiderari posse censeri debeat. Deinde ipsam parallelarum theoriam aggreditur, pariterque tres hypotheses sumit, et de iis, quae inde consequantur, disquirit, prout nempe in figura quadrangula, cuius tres anguli recti sint, reliquus quartus vel et ipse rectus, vel maior, vel minor recto fuerit, quas hypotheses alio nomine ad eas ipsas redire, quas Saccherius habuit, facillime patet, cf. Lambert. l. c. §. 30. sqq. Lambertus tamen rem aliquanto brevius et magis dilucide, quam Saccherius expedit, pariterque hypothesin anguli obtusi facile refellit, ex qua nempe consequi docet, duas rectas spatium comprehendere; hypothesin autem anguli acuti pariter magis refractariam esse deprehendit, tandem tamen etiam hanc sibi ipsi contradicere, demonstrari posse putat. Quae ipsa tamen demonstratio nititur propositione sequenti: „Si in duas rectas in eodem plano sitas tertia aliqua incidat, quae cum altera earum angulum rectum, cum altera angulum efficiat recto minorem, ita ut a recto angulo quantum libet parvo differat, rectae istae ita sectae in infinitum productae se invicem secabunt. Hanc autem propositionem, quae ax. 11. partem specialem complectitur, in praecedentibus Lambertum haud ita evicisse, ut in elementis fas erat, iure monet Hindenburg. l. c. p. 365. Ea quoque demonstratio, quam exhibet Struve (Theorie der Parallellinien, Königsberg 1820.) eo redit, ut hypothesin Saccherii secundam et tertiam locum non habere posse asserere conetur. Neque tamen etiam apud hunc auctorem omnia satis evicta, nec ea simplicitate posita esse videntur, quae elementarem demonstrationem decet. Eadem fere ratione, ut nempe hypothesin anguli acuti pariter atque anguli obtusi locum habere non posse (quamvis ipse hac denominatione non utatur) ostendere studeat, rem absolvere se posse putat Duttenhofer (Versuch eines strengen Beweises der Theorie von Parallellinien 1813.) in quo tentamine eadem, quae in reliquis huc pertinentibus notavimus, desiderari adhuc videntur.

Praetereo hic Hausenii demonstrationem in Elem. Mathe-

seos Lips. 1734. quum in ea aperte, etiam Klügelio iudice l. c. §. VI. sumatur, quod probandum erat. Satis concinne tamen Hausenius omnia ad eum casum reduxit, quo altera duarum rectarum, quae ab alia quadam recta secantur, huic ipsi ad angulos rectos insistit, altera cum ea angulum acutum efficit. Pariter nihil opus esse puto, omnia hac in re conamina v. c. ab Hanke., Behn., Malezieu., Cataldo., Pardies., König., Ebert., Voigt., Mass., Vieth., Lasar. Bendavid. (de quo conferantur inprimis Pfleiderer. Thes. inaugur. 1786. Thes. 1—5.) Kircher., Lüdicke. aliisque facta, quae vel Klügel. et Hoffmann. habent, vel e schedis Hauberianis aut aliunde mihi cognita sunt, hic afferre, quum vel nihil, quod ipsis proprium sit, aut prae reliquis emineat, habeant, vel manifestis etiam paralogismis innitantur.

Praeterire etiam liceat, quae Segner. (Vorl. üb. Rechenk. und Geom. 1767. V. Abschn.) Karsten. (Praelect. Mathes. theor. et element. 1760.) Lorenz. (Erster Cursus der reinen Mathem. 1804.) habent, qui sumunt aut demonstrare tentant, rectam, quae per punctum intra aliquem angulum situm ducatur, necessario alterutrum certe crus huius anguli secare, quum nec haec satis circumspecte evicta aut extra omnem dubitationem posita esse facile pateat.

Alia autem ratione Kaestner. (Anfangsgr. der Arithm. und Geom. 1758.) Segner. (Vorlesung. über Rechenk. und Geometrie 1767. IV. Abschn. §. 57. et Vorrede zu den 6 ersten Büchern der geometr. Anfangsgr. Euklids 1773.). Klügel. (Encyclop. 1782.), G. G. Schmidt. (Anfangsgr. der Mathem. 1797.) et recentissimis adhuc temporibus Herrmann. (Versuch einer einfachen Begründ. des 11. Euklid. Axioms. Frankf. 1813.) et Bürger. (vollständ. Theorie der Parallelen, Karlsruhe 1816.) hanc rem ita certe illustrare studuerunt, ut tutius deinde axioma 11. sumere liceat. Eorum argumentationes, quarum initia iam apud Wallisium deprehendimus, eo fere redeunt. Si duae rectae BA, DC (Fig. 114.) ab alia quadam AC ita secari ponantur, ut summa angulorum BAC, DCA minor sit duobus rectis, consequitur, angulum BAF maiorem

esse angulo DCA. Quodsi igitur recta DC, manente angulo DCA, versus A promoveatur, manifestum est, ubi punctum C ad A pervenerit, rectam DC intra angulum BAF sitam fore v. c. in AG. Iam, si vice versa AG, manente angulo GAF =DCA, versus C regrediatur, patet, non statim totam ultra AB recessuram (ita enim angulus GAF non posset manere) sed primum inferiores saltim eius partes, quae rectae AC proximae sunt, ultra AB v. c. in eum situm, quo rectam *ce* videmus, perventuras, quum interea partes ab AC longius remotae, ut *de* adhuc cis AB positae sint. Et, quum recta quaevis ut AG vel *cd* in infinitum produci queat, semper, quemdunque recta ita promota situm habuerit, infinita eius puncta cis AB remanebunt, ut itaque hic rectae motus continuari possit, quamdiu libuerit, v. c. dum iterum ad CD regressa sit, nec unquam situm obtinere poterit, quo non aliqua eius puncta citra, alia ultra AB sita fuerint, unde et rectae AB, CD, si opus sit, productae se invicem secare censendae sunt. Atque haec quidem ad illustrandum axioma 11. quam maxime facere, quin huic scopo sufficere videri possint, perfectam tamen in iis demonstrationem contineri, perspicacissimi huius illustrationis auctores nec ipsi putarunt, nec aliis persuasum fuit. Maxime etiam analogia curvarum quarundam, quae asymptotas, ut vocant, habent rectas, a quibus non secantur, quamvis ab ipsis his rectis, si retento situ priori parallelo promoveantur, eas secari certum sit, praecipitare hac in re iudicium vetare videtur. Cf. Hoffm. Crit. der Parall. Theorie I. Th. p. 61. sq. 104. sq. 147. sq. Par fere ratio est eorum, qui, si in praecedente figura alter angulus v. c. BAC rectus, alter DCA acutus sit, ostendunt, ex CD maiora subinde perpendicula ad AC duci posse, quae ex AC pariter maiora segmenta puncto C adiacentia abscindant, unde deinde colligunt (quamvis fortasse haud accurate ostensum sit, segmenta illa data quavis recta tandem maiora esse, vel incrementa etiam segmentorum eadem semper aut maiora etiam fore), tandem aliquod horum perpendiculorum cum recta BA coincidere, aut etiam ultra eam cadere debere, quo praeter Clavium, eos-

que quos cum ipso nominavimus, pertinet le Gendre *) (Elem. de Géometr. 1794. et 1817.) de quo vide Gilberti monita (die Geometrie nach le Gendre, Simpson etc. 1798. p. 73. sqq.) et Franceschini (la Theoria delle parallele rigorosamente dimostrata in eius Opuscoli Mathemat. 1787. cf. Playfair. Elem. of Geom. p. 364.). Recentissime quoque similem viam ingressus est Metternich (Vollständ. Theorie der Parallelen 1815) sed haud meliore ac reliqui fortuna. Nam et ipsi haud contigit, ostendere, bases triangulorum, quae sumit, tandem quavis data maiores fore. Cf. Zeitschrift für Astron. 1816. II. B. S. 64. flg.

Eodem fere tempore, quo apud nos Kaestner., Segner., Karsten. aliique de parallelarum theoria laborarunt, in Anglia idem aggressus est Rob. Simson. Is nempe in latina Elementorum editione, quam publici iuris fecit 1756., professus primo est p. 345., axioma 11. inter communes sententias non ponendum videri, sed neque demonstrationem stricte loquendo admittere, explicatione autem quadam indigere, ut dilucidior fiat, atque hanc ipsam explicationem ita dedit, ut rectas, quae eidem rectae ad rectos angulos sint, aequidistantes quoque esse pronuntiaret, rectas autem, quae ab eodem puncto exeant, a se invicem magis et magis divaricare et divergere (quod idem fere Procli assertum est), atque inde axiomatis 11. veritatem ostendi posse putaret. Si enim (Fig. 115.) rectae DF, AB ab alia recta HE ita secentur, ut anguli interiores et ad easdem partes DFE, BEF simul minores sint duobus rectis, constitui posse angulum HFG aequalem BEF, unde demonstrari possit, rectas FG, AB eidem alicui rectae ad angulos rectos, adeoque inter se aequidistantes esse. Quum autem ex constr. FD cadat inter aequidistantes FG, AB, rectas FG, FD ex eodem puncto exeuntes necessario tandem magis inter se distare, quam aequidistantes FG, AB, adeo-

*) Idem in subsequentibus elementorum editionibus variis aliis modis rem tentavit, quorum qui ex functionum, ut aiunt, theoria desumti sunt, ut nihil aliud moneamus, ad elementa certe non pertinent, qui autem magis elementares sunt, nec ipsi auctori plane satisfacere videntur.

que FD tandem fore ad partes rectae AB contrarias ei, a quas sit punctum F, adeoque tandem convenire rectae AB In anglica deinde Elementorum editione, quae primum pro diit Glasg. 1762. accuratius adhuc rem demonstrare aggredi tur hoc fere modo:

Def. 1. „Distantia puncti a recta est perpendiculum puncto in rectam demissum."

Def. 2. „Recta ad aliam rectam propius accedere, aut ab ea recedere dicitur, prout distantiae punctorum prioris rectae a posteriore decrescant semper aut crescant: aequidistantes autem dicuntur duae rectae, si puncta unius ab altera eandem semper distantiam teneant."

Axioma. „Fieri nequit, ut recta aliqua primum propius ad aliam rectam accedat, deinde iterum ab ea recedat, antequam eam secuerit; pariter recta nequit primum recedere ab alia recta, deinde propius ei accedere; nec recta primum alii rectae aequidistans esse, deinde ei propius accedere, aut magis ab ea recedere potest; recta enim eandem semper servat directionem." Hinc facile demonstrat

Prop. 1. „Si duae rectae (Fig. 116.) AC, BD aequales inter se alii cuidam rectae AB ad angulos rectos insistant, et a puncto quocunque F iunctae CD demittantur ad AB perpendiculum, erunt EF, AC, BD aequales. Quodsi enim non ita esset, recta CD accederet primo, deinde recederet a recta AB, quod fieri nequit." Est haec propositio Clavii 3. et 7. Giord. da Bitonto.

Prop. 2. „Si eidem rectae ex eadem parte ad aequales angulos constituantur duae rectae aequales, earumque extrema iungantur, iuncta haec pariter rectos angulos efficiet cum istis, quarum extrema iungit." Facile patet, esse id ipsum Lemma 2. Nassireddini, vel Clavii Prop. 4. vel Saccherii Hyp. 1. Hinc deducitur in parallelogrammo, cuius tres anguli recti sint, quartum etiam rectum fore.

Prop. 3. „Si duae rectae angulum (acutum) comprehendant, in utravis earum punctum inveniri potest, a quo

perpendiculum in alteram demissum maius sit data quavis recta."

Prop. 4. „Si duae rectae ab alia recta ad easdem partes sub angulis aequalibus, altero interno, altero extremo, secentur, erit etiam aliqua recta, quae eas ad angulos rectos secet."

Prop. 5. Haec eadem est cum Euclidis axiomate 11. et simili fere modo ac in ed. Simsonis latina demonstratur.

Apparet, Simsonis demonstrationem aliqua ex parte convenire cum Claviana. Et maxime etiam axioma a Simsone sumtum iisdem fere dubiis obnoxium est, ac Clavii lemma 2. Conf. Hoffmanni Critik der Parallelen Theorie p. 74. sq. Austin. (l. c. p. 11.) quoque monet, eadem fere, quae contra Euclidis axioma 11. Proclus observaverit, valere quoque contra hoc axioma Roberti Simson. (Haud multum a theoria Rob. Simsonis differre videtur demonstratio prior Müllerl. Ausführl. und evidente Theorie der Parallelen. Nürnb. 1819. Demonstratio eius posterior paralogismo laborare videtur. Nec ea, quae in appendice adiecta est, demonstratio omnia exhaurit.) Alius Anglus, Thom. Simpson. (Elem. of Geometry, quorum editionem quintam Lond. 1800. editam inspicere mihi licuit), ita in hac re versatur, ut primum doceat, distantiam puncti alicuius a recta esse perpendiculum ab hoc puncto in rectam demissum, deinde sequens axioma praemittat.

„Si duo puncta alicuius rectae inaequaliter ab alia recta in eodem plano posita distent, hae rectae in infinitum productae ex ea parte concurrent, qua minus distant." Hinc porro facile deducit, duas rectas, quae non concurrant, (vel quae ex Euclidis mente parallelae sint) eandem semper inter se distantiam habere, vel, omnia perpendicula ab una ad alteram demissa esse aequalia, adeoque per unum idemque punctum non posse plures una recta alicui rectae parallelas duci, et rectas, quae eidem rectae parallelae sint, parallelas esse inter se, unde deinde reliqua et nominatim Prop. I. 29. facile consequuntur. Et fatendum omnino est, concesso axiomate, reliqua inde rite derivari. Quamvis autem Playfair.

(Elem. of Geom. p. 369.) hanc demonstrationem omnium simplicissimam atque elegantissimam esse iudicet, alii tamen nec hoc axioma multum ab Euclideo differre iudicarunt. Playfair. ipse pro axiomate sumit, eidem rectae per idem punctum unam tantum parallelam duci posse.

Verum mittamus haec, et quaedam adhuc demonstrationum genera consideremus, quibus nostra aetate parallelarum theoriam stabilire nonnulli tentarunt. Et primum quidem eorum est, qui ex accuratiore theoria situs rem expediri posse putavere. Kaestnerus inter primos fuisse videtur, qui ita iudicaret in adiecto Klügelii dissertationi de parallelis, quam saepius laudavimus, epistolio, ubi ita ait: „habituros nos aliquando veram parallelarum theoriam vix speraverim, nisi diligentius exculta theoria situs." Qua in re haud consentientem habet Pfleiderer. (Thes. inaugur. 1782. Th. I.) Karstenius deinde primum in Progr. inaugurali Halae 1778. edito rem maxime eo deducere studuit, ut ostenderet, duas rectas in eodem plano positas, quae cum tertia aliqua secante aequales efficiant angulos exteriorem et interiorem oppositum ad easdem partes, etiam cum alia quacunque ipsas secante angulos modo denominatos aequales efficere. Id quod inde adstruere tentat, quod, assumto contrario, easdem illae duae rectae in plano, in quo ductae sunt, simul habiturae essent positionem eandem, ac diversam, seu non eandem (forte rectius similem ac dissimilem.) (Ita certe accuratius Proclus ad I. 30. dicit: *καὶ γάρ ἐστιν ὁμοιότης θέσεως ἡ παραλληλότης.*) Hac autem argumentandi ratione haud acquieturum fuisse Euclidem, iudicat Pfleiderer. l. c. Thes. 13. maxime si conferantur eius propositiones 7. 8. 9. 10. 11. libri V. et VI. 21. Ulterius deinde Karstenius rem explicavit, edito Halae 1786. libro (Mathem. Abhandlungen S. 130—145.) Theoria eius a Pfleiderer. (Thes. inaugur. 1786. Th. 6.) ad haec capita reducta sistitur:

1) „Rectae, quae se mutuo secant, seu non parallelae sunt, habent directionem, vel positionem, diversam, non eandem" (§. 20.).

2) „Duae rectae, quae a duobus punctis protenduntur secundum eandem directionem, seu quae in eodem plano eandem habent positionem, se mutuo non secant (§. 22. Cor. 2.) adeoque parallelae sunt" (§. 28.).

3) „Duae rectae in eodem plano, quae cum eadem tertia ipsas secante efficiunt angulum exteriorem aequalem interiori opposito ad easdem partes, eandem in plano habent positionem vel directionem" (§. 23.).

4) „Quae autem non efficiunt angulum exteriorem aequalem interiori opposito ad easdem partes, eandem in plano non habent positionem vel directionem, sed diversam" (§. 25.).

5) „Duae rectae, quae in eodem plano eandem habent positionem, vel iuxta eandem directionem protenduntur, sectae ab eadem tertia efficiunt angulum exteriorem aequalem interiori opposito ad easdem partes" (§. 26. Cor. 1. §. 29. Cor. 2.).

6) „Contra, quae eandem positionem vel directionem non habent, cum tertia ipsas secante non efficiunt angulum exteriorem aequalem interiori opposito ad easdem partes" (§. 25. Cor. 3. §. 30.).

7) „Rectae, quae se invicem secant, cum eadem tertia ipsas secante faciunt angulum exteriorem maiorem interiore opposito ad eas partes, ad quas concurrunt (§. 26.), adeoque angulos interiores ad has partes minores duobus rectis." His stabilitis, Pfleiderer indicat, reliqua brevius, quam a Karstenio factum sit, expediri posse, at Thes. 8. addit: „in praemissis, earumque demonstrationibus scrupulos movere non inanes videtur 1) conceptus identitatis directionis duarum rectarum in eodem plano praemissus theoriae parallelarum; 2) identitas situs seu positionis in eodem plano attributa duabus rectis diversis, contra notiones communes modi, quo rectae in plano positio dari intelligitur (§. 18. 22.); 3) axiomata tacite supposita in demonstrationibus Prop. 3. 4. (§. 23. 25.): duarum rectarum, quae ab eiusdem tertiae situ in plano aliquo ad easdem partes divergant angulis aequalibus, eandem

esse positionem in plano; et rectam, quae positione vel d rectione differat ab una duarum rectarum eandem in pla positionem habentium, pariter cum altera non habere po tionem eandem: quae, si geometrice enuncientur, ultimo t solvuntur prius quidem in I. 28. Euclidis, posterius in pr positionem: non posse eidem rectae per idem punctum du plures una parallelas."

Huc etiam pertinet Hindenburg. qui in Promtuario Lipsi ensi (Leipz. Magazin der Natürl. Math. und Oekon. 1781. p 145—168 et 342—371.) et brevius, at, ut ipse dicit, accura tius postea in eodem Promtuario (1786. III. St. p. 367—389.) parallelarum theoriam exposuit. Haec theoria eo maxime ni titur, ut ostendatur, rectas, quae eidem tertiae parallelae sint, parallelas esse inter se. Quod quidem casu I. nullo negotio evincitur, si nempe illa tertia, inter duas, cum quibus comparatur, intermedia sit. Casu II. autem, quo illa extra utramque reliquarum posita est, demonstrationem ita instruit auctor, ut dicat, rectas, quae parallelae sint alicui tertiae extra ipsas positae, necessario aut

1) omnes inter se parallelas esse, aut
2) nullam earum parallelam esse uni e reliquis, aut
3) aliquas quidem inter se parallelas esse, alias non.

Iam vero id, quod secundo et tertio loco positum erat, excludere studet, ut itaque primus saltim casus reliquus sit. Nempe tertium quidem casum haud obtinere posse putat: omnes enim rectas, quae alicui tertiae parallelae sint, eo ipso determinatum situm habere: id vero fieri non posse, si earum aliae inter se parallelae esse possint, aliae non. Itaque aut omnes inter se parallelas, aut omnes non parallelas fore. At nec secundum casum locum habere posse, eo enim sumto consequi inde manifesto contradictoria. Quodsi enim sumatur (Fig. 116.), tam AB quam CD parallelas esse rectae EF extra ipsas positae, easque ex hypothesi hic facta inter se parallelas esse non posse, necessario sequi, ut per punctum aliquod I rectae AB duci possit recta GH rectae CD parallela (I. 31. quae ex controverso Ax. 11. non pendet.) Ita tam GH quam

EF parallelas fore rectae CD inter ipsas positae, adeoque ex casu I. parllelas fore inter se. Quum vero etiam CD parallela ponatur rectae EF, ex hypothesi nunc sumta, GH, CD sequire inter se parallelas esse, quod contradicat ei, quod ante sumtum fuerat. Et in hac argumentatione ad casum secundum facta fateor nihil me videre, quod iure reprehendi possit. Ipse autem Hindenburg. aliam adhuc huius casus demonstrationem addit, recta CD circa immotam EF circumvoluta, quam ipse priore adhuc certiorem esse putat, quae vero meo iudicio pluribus adhuc dubiis obnoxia fuerit. Quidquid sit, mihi cardo rei non in hoc secundo casu, sed in tertio, quem ante secundum leviter tantum perstringere visum fuit auctori, versari videtur. Neque enim illud ipsum: rectas, quae eidem tertiae parallelae sint, determinatum situm habere, satis clare expositum est, neque etiam, si id concedatur, inde fluere videtur, non posse harum ita determinatarum rectarum alias inter se parallelas, alias non parallelas esse. Cf. Pfleiderer. Thes. inaug. 1782. Th. 14. et Hoffm. Crit. I. St. p. 230. Pariter ex ratione situs theoriam parallelarum derivat Schwab. (Tentamen novae parallelarum theoriae, notione situs fundatae Stuttg. 1801.) et aliquanto brevius in alio libello (Commentatio in primum Elementorum Euclidis librum Stuttg. 1814.). Est nempe ei situs certus modus, quo plura coexistunt (§. 18. libelli modo citati): angulus planus rectilineus autem diversitas situs duarum rectarum in plano concurrentium §. 26.: rectae autem parallelae sunt, si eundem situm habent, vel si situs unius idem est ac situs alterius §. 27. (Distinguit nempe inter situm et positionem vel directionem.) Duo tandem adiungit axiomata, quorum prius est: si duae rectae habent eundem situm inter se, habebunt situm aeque diversum a situ rectae tertiae. Posterius; si duae rectae habent situm aeque diversum a situ rectae tertiae, habebunt situm eundem inter se. Hinc facile deducuntur propositiones I. 29. I. 28. I. 27. I. 30. ac deinde axioma II. Denique adstruitur, duas rectas parallelas nec inter se concurrere, et vice versa: si duae rectae ex neutra parte con-

currant, esse eas parallelas: denique, rectas parallelas es aequidistantes, et lineam, quae ab alia recta aequidistet, etia ipsam rectam esse. Quae omnia satis inter se cohaerere, et suppositis rite deduci nemo negaverit. At scrupulus restat i ista idea *identitatis* situs *duarum* aut *plurium* rectarum, nec f cile concipitur, qua ratione lineae *diversae eundem* situm h bere dicantur. Praeterea axiomata praemissa, si usitatis i geometria terminis exprimantur, nihil aliud esse videntur quam ipsae propositiones I. 29. et I. 28. Cf. Hoffmanns. Cri I. Th. p. 198. sq. Notandum denique Vermehren. (Versuch die Lehre von parallelen und konvergenten Linien aus einfa chen Begriffen vollständig herzuleiten Giistr. 1816.) ex iis dem fere principiis procedere. Minus tamen exacta videtu eius demonstratio. Sumit enim ut axiomata 1) rectas, qua versus aliquam tertiam eandem directionem habeant, haber eandem directionem inter se, i. e. si consueto more rem ex primas: quae eidem tertiae parallelae sint, parallelas esse inte se, (quod certe Hindenburg. demonstrandum esse putaverat et quod solum omnino sufficit reliquis demonstrandis). 2 Si duae rectae habeant eandem directionem inter se, et una ad tertiam aliquam inclinetur, inclinari ad eam etiam alteram (i. e. rectam, quae unam e duabus parallelis secet, secare etiam alteram, quod pariter solum sufficiebat, at probandum erat). Ohmius etiam, de quo supra, quum de Ptolomaeo sermo esset, diximus, aliqua ex parte huc pertinet. Alterum iam restat genus eorum, qui superficiem planam infinitam, cruribus anguli in infinitum productis interiacentem characterem magnitudinis anguli constituerent (aut pro mensura anguli sumerent), quo pertinet Bertrand. (Développement nouveau de la partie élém. des Mathém. Vol. I. Préf. p. 21. et Vol. II. P. I. Ch. I. §§. 4. et 12—24.) et Schulz. (Entdeckte Theorie der Parallelen 1784. ac denuo in alio libro: Darstellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe seiner Theorie der Parallelen, Königsb. 1786.), quibus adiungi potest Crelle (über Parallelen-Theorieen und das System in der Geometrie, Berlin 1786.) et Lacroix (Elémens de Géom. 1803.). Theoriae Ber-

et Schulzii Epitomen et Epicrisin ab Hindenburgio, et rte a Kaestnero factam continet Promptuarium Lipsiense . Magazin für reine u. angew. Mathem. 1786. 3. St. 2. sqq.) cum quo conferri meretur Karsten. (Mathem. dl. Nr. 11. §. 52—76.). De Crelle videantur Annales lbergenses (Heidelb. Jahrb. der Literat. 1818. Nr. 54.) acroix Hoffm. Crit. I. Th. p. 81. sq. Schulzium etiam n varias eius theoriae oppositas obiectiones defendere stu- Gemichen. (Bestätigung der Schulzischen Theorie der Pa- en, und Widerlegung der Bendavidschen Abhandl. über Parallelliniem, Königsb. 1786.). Olim etiam, quod notat lerer. (Thes. inaugur. 1784. Thes. 6. 7.) fuere, qui an- m pronunciarent esse spatium indefinitum, quod cruribus guli interiacet, nectendis tamen inde consequentiis penitus tinuerunt e. g. Schott. in Cursu Mathem. L. I. C. III. r. II. §. 2. Lamy Elém. de Géom. L. II. Sect. I. Def. 1. Müller. Vorber. zur Geom. C. IV. §. 13. Et Ramus iam Scholar. Math. 1599. p. 145. totam geometriam locis omnibus angulum aut superficiem aut corpus facere dixerat. Cf. etiam Proclus ad I. Def. 8. At hanc rationem nominatim etiam, hac illegitime, ex eadem causa, ob quam longitudinis crurum ratio in ea non haberi debet, reprehenderunt: Orontius Finaeus Geom. L. I. C. IV. §. 1. Maler. Geometrie u. Markscheidek. C. I. §. 50. Bossut. Traité Elém. de Géom. Not. génér. §. 9. Quidquid sit, ii omnes, quos hac ratione theoriam parallelarum tractasse diximus, in eo consentiunt, ut spatium inter duas parallelas infinite productas contentum pro nihilo aut infinite parvo habendum putent, si comparetur cum spatio inter duo alicnius anguli crura infinite producta contento. Quod ita se efficere posse putant, ut dicant, angulum quemcunque pluribus vicibus iuxta se ipsum pon posse, ita, ut tandem omne infinitum spatium circa aliquod punctum in plano positum expleat aut superet; spatium contra intra duas parallelas contentum si totidem, quot angulus ille, vicibus iuxta se ponatur, semper tamen ad utramque sui partem infinitum patium haud expletum relinquere, unde patere putant

hoc inter parallelas contentum spatium pro nihilo habendu esse comparatum cum spatio angulari inter crura infinite pr ducta. His positis deinde axioma 11. Euclidis ita adstrum „Quodsi duae rectae Fig. 117.) AB, CD ab alia recta I ita secentur, ut anguli interni BGH, DHG simul sumti m nores sint duobus rectis, AB, CD productae tandem concu rent. Facile enim patet, angulum DHF maiorem esse angu BGH, unde, si angulus FHI fiat aequalis angulo BGH, rec HI intra angulum DHF cadet, et parallela erit rectae B Iam cum spatium angulare inter crura DH, IH infinite pr ducta contentum ex praecedente infinities maius esse debe spatio inter parallelas HI, GB infinite productas content manifestum est, spatium illud angulare non concludi pos intra terminos huius a parallelis comprehensi spatii i. e. r ctam HD necessario tandem limites rectae GB praetergressu ram esse, seu duas has rectas inter se concurrere." Cont hanc demonstrandi rationem multa praeclare monuerunt Hin denburg. (Allgem. Litter. Zeit. 1785. Nr. 54. et Leipz. Magazi 1786. 3. St. p. 392. sqq.) Karsten. (Mathematische Abhand lungen Nr. II. §. 52—76.) Pfleiderer. (Thes. inaugur. 178 Thes. 6—18. et Thesaur. inauguralis 1786. Thes. 9. 10.) Fischler. (de Theoria parallelarum Schulziana Lips. 1786.) Haec monita eo potissimum redeunt: conceptum superficie angularis non indefinitae sed reapse infinitae haud satis clarum esse, et obstare, quo minus demonstrationes illi innixae pos sint esse aeque evidentes et apodicticae, ac ulla Euclidea neque enim spatia infinita dari et construi posse; principi geometrica, quae tantum de quantitatibus finitis valeant, no minatim principium congruentiae ad demonstranda theoremat de spatiis angularibus infinitis non aeque clare et tuto appli cari posse; spatia evanescentia et nihilo aequiparanda, si no absolute, tamen relative ad alia nec per se accurate sum posse, nec unquam demonstrationem rigorosam, sed aliquam tantum ad verum approximationem admittere; aliis evidenti bus geometriae principiis v. c. axiomati I. 9. „totum sua parte maius esse" manifesto vim fieri, et e geometria elementari erminos etiam infinite magni et parvi esse proscribendos.

Longis his disquisitionibus finem tandem faciemus, adiectis duobus recentioribus tentaminibus, quibus rem, et alter certe novis plane ac hactenus intentatis cuniculis (quod vix fieri posse videbatur) aggressi sunt duo viri doctissimi, Wachter. et Thibaut. Wachter nempe, postquam (*Zeitschr.* für Astron. 1816. P. II. p. 64. sqq.) theoriam parallelarum a Metternich. editam diiudicaverat, eiusque lacunas ostenderat, simul novam methodum breviter indicavit. Postea edito libello singulari (Demonstratio Axiom. Geom. in Euclideis undecimi Gedani 1817.) ex iisdem progressus principiis, alia tamen via ad scopum pervenire conatus est. Nempe priore loco (*Zeitschr.* für Astron. l. c. p. 76. sq.) ostendit, si duae rectae ab aliqua tertia ita secentur, ut altera earum secanti sit perpendicularis, has rectas, si fieri possit, ut ipse inter se non convenisse, propius semper alteram ad alteram accessuras esse, ita ut una asymptota alterius fieri debeat. His autem sumtis manifestam contradictionem inesse ostendere studuit. Deinde in libello postea edito, re ulterius explicata, ostendere annititur, vel nondum stabilita parallelarum theoria demonstrari posse, per quatuor puncta in spatio proutlibet data (addendum tamen: dum non plura duobus punctis sint in eadem recta, nec plura tribus in eodem plano) superficiem sphaericam, et, quod inde consequatur, per tria puncta in dato plano, modo non in una eademque recta iaceant, circulum describi posse. Tum axioma Euclideum ita demonstrari posse docet. Data quaevis recta AB (Fig. 118.) in punctis A, B terminata in C bifariam secetur, et ex puncto C recta CD rectae AB ad perpendiculum ducatur. E punctis A, B ducantur in eodem plano cum AB et CD rectae AE, BF, datae AB ad quemvis angulum recto minorem insistentes (ita nempe, ut sit angulus CAE=CBF). Ex puncto C aliae rectae CG, CH illis AE, BF ad perpendiculum normentur, quae hasce in punctis G, H secent. Producantur CG, CH usque ad I, K, ita, ut sit CI=2CG, CK=2CH, quo facto tribus punctis C, I, K circulus circumscribi potest, cuius centrum, ut quidem ex constructione perspicitur, in recta CD ipsius punctum intersectio-

nis cum recta AG vel BH efficit." Ita quidem ille non necessitatem tantum intersectionis istarum rectarum, sed constructionem exhibere tentat, qui ipsum intersectionis punctum inveniatur. Et illud certum videtur, siquidem sine parallelarum theoria probari possit, posse per tria quaecunque puncta non in eadem recta sita circulum describi, nihil iam difficultatis superfuturum. At, ut verum fateamur, quae Wachterus attulit, quamvis ingeniosa sint, valde tamen dubitamus, an in elementis ita proponere liceat: quin in ipsa etiam demonstratione multa adhuc subobscure dicta videntur, quae subinde quidem promittit auctor se ad summam evidentiam adducturum, aut asserit, facillime ea demonstrari. Antequam autem se ea fide liberarit, nostrum de argumentationis ista iudicium suspendere liceat.

Thibaut autem in libro, cui titulum fecit: Grundriss der reinen Mathematik, Gött. 1818. in eo cum Wachtero convenit, ut earum propositionum, quae ex parallelarum theoria consequuntur, aliquam immediate adstruere tentet, et deinde ordine inverso ab huius demonstratione ad parallelarum theoriam procedat. Ita nimirum ratiocinatur ad I. 32. immediate demonstrandam. Sit (Fig. 119.) triangulum quodcunque ABC, et sumto in latere CA ultra A producto puncto quocunque b' recta Ab' circa A convertatur, usquedum punctum b' in punctum β' rectae AB cadat. Deinde recta Aβ' in recta AB promoveatur, usquedum punctum A cum puncto B coincidat, et β' in b'' cadat. Denuo recta Bb'' circa B convertatur, dum b'' in punctum β'' rectae BC cadat, et iam recta Bβ'' in recta BC descendat, dum punctum B cum puncto C coincidat, et β'' in b''' cadat. Denique recta Cb''' circa C convertatur, dum b''' in punctum β''' rectae CA cadat. Quo facto patere ait, rectam Ab' conversam fuisse tribus vicibus, atque tribus his gyrationibus, dum iterum cum recta CA, in qua primum posita erat, coincideret, angulos tres externos trianguli descripsisse. At, cum iisdem gyrationibus recta Ab' in rectam CA, in qua primum posita erat, iterum redierit (poterat nempe Cβ''' adhuc in CA promoveri, ita ut C cum A et β''' cum b' coincideret), adeo-

que omnes angulos, qui circa unum punctum A esse possunt, i. e. quatuor rectos emensa sit, patere, omnes angulos externos trianguli cuiuscunque aequales esse quatuor rectis. Quum vero anguli externi trianguli cum angulis internis simul sumti aequales sint sex rectis (I. 15. Cor.) anguli interni soli aequales erunt duobus rectis. Atque hinc Ax. 11. facile deduci potest. Et haec quidem satis speciose. Liceat tamen observare, dum recta $A\beta'$ in AB promoveatur, ita ut punctum A cum puncto B coincidat, rectam Ab', angulo β'Ab' invariato, in situm Bd pervenire, ita ut Bd sit parallela rectae Ab' vel CA (I. 28.). Iam vero, quum recta $B\beta''$ in BC promovetur, usquedum B cum C coincidat, recta Bd invariato angulo $dB\beta''$ simul descendet, et ut certi simus, rectam Ab' facta adhuc tertia gyratione ac C nec plus, nec minus iis angulis absolvisse, qui circa unum punctum sunt, demonstrari oportebit, rectam Bd, postquam ad C descenderat, in ipsam rectam CA *cadere*. Quod tum demum certum erit, si demonstratum ante fuerit, angulum $dB\beta''$ aequalem esse angulo β'''Cb' i. e. si I. 29. ante demonstrata fuerit. At I. 29. pendet ex Ax. 11: itaque haud vicissim Ax. 11. ex Thibautii demonstratione propositionis I. 32. derivari poterit.

Caeterum alios etiam, quamvis aliis rationibus, at hactenus non feliciori successu tentasse I. 32. immediate adstruere, et exinde parallelarum theoriam demonstrare, supra iam diximus, quo pertinent Hauff. (Geom. Fundam. solida Gandae 1819.) et le Gendre. Et de hoc quidem, praeter ea, quae supra diximus, cf. Biblioth. Univers. Oct. 1819., ubi auctor anonymus partes le Gendre, suscepit, eumque contra Iohn. Leslie, qui in Elém. of Geom. Edinb. 1817. ipsum reprehenderat, et contra alium geometram Anglum, nescio an satis feliciter, defendere tentavit.

Excussis iam tot et tam variis hac in re conaminibus, in quibus omnibus aliquid adhuc desiderari posse fassi sumus, iniqui tamen fuerimus, si negare velimus, eorum auctores multa subtiliter admodum rimatos esse, et magna perspicaciae atque acuminis specimina dedisse, et miram quaestionis sim-

plicitatem, quae vix permittat, ut ea in simpliciora adhuc resolvi et quasi extenuari possit, maxime in causa esse, cur rem acu tangere nondum contigerit. Neque tamen haec ipsa molimina prorsus inutilia fuisse censenda sunt. Multa enim vel ipsi illi novae alicuius parallelarum theoriae conditores, vel ii etiam, quos nacti sunt, adversarii ingeniose observarunt, quibus doctrina mathematica augeretur; et limitibus certae ac omnibus numeris absolutae scientiae accuratius, ac ante factum, definitis, quam modeste de nostris viribus iudicandum sit, hoc etiam exemplo comprobatum est. Caeterum eam axiomatis controversi *illustrationem*, quam post Wallisium Kaestnerus aliique dederunt, tironibus sufficere posse confidimus.

EXCURSUS II.

AD

ELEMENTORUM

I. 47.

1) Quamvis, quae una aliqua ratione certa esse demonstratum est, multiplicato demonstrationum numero nequeant certiora fieri, unde etiam plures eiusdem theorematis demonstrationes, ne nimii fiamus, plerumque afferre noluimus, in hoc tamen celebratissimo theoremate ab ista regula paululum discedere, et ex iis, quae maxime notatu digna a variis Mathematicis circa eius demonstrationem excogitata esse vidimus, nonnulla certe maxime simplicia seligere, et breviter huc conferre visum fuit. Plenioremvariorum hoc problema demonstrandi conanimum historiam dederunt, ipsasque potiores demonstrationes exhibuerunt Scherz. in Dissertat. de Theoremate Pythagorico Argentor. 1743 et Ietze. pariter in Dissertat. Academ. Praeside Lang. edita Halae Magdeb. 1752, quos secuti sunt Hoffmann.; der Pythagor. Lehrs. mit 32 theils bekannten, theils neuen Beweisen Mainz 1819, et Müller: System. Zusammenstell. der wichtigen bisher bekannten Beweise des Pythag. Lehrsatzes u. s. w. Nürnberg 1819. Et Scherz. quidem et Müller. historiam theorematis ab antiquissimis inde temporibus repetunt; Ietze. et Hoffmann. varias, quae quadrata cathetorum, vel hypotenusae inter se habere possunt, positiones distinguunt, atque inde varias his casibus accommodatas demonstrationes derivant. Praeter Euclidis itaque demonstrationem, quam primam vocabimus!, veritas theorematis etiam adstrui poterit, ut sequitur.

2) Sit (Fig. 120.) triangulum ABC ad B rectangulum, et constituantur super cathetis AB, BC quadrata ABGF, BCDE, et producantur rectae DE, FG, donec in L — pariterque rectae EC, GA, donec in K conveniant, quod necessario fiet (I. 29. Cor. 5.), eruntque ex Constr. EK, GL, pariterque EL, KG parallelae, adeoque GKEL parallelogrammum in E rectangulum, et quum sit EK=AD (I. 34.) =AB+BC, pariterque LE=FC (I. 34.) =FB+BC=AB+BC, erit EK=LE, adeoque GLEK quadratum (I. 29. I. 34. I. Def. 30.). Iam, si sumatur EH=KC=AB (unde erit LH=CE=BC), pariterque sumatur LI=KC=AB (unde erit IG=CE=BC), et ducantur rectae AI, CH, IH; erit AIHC quadratum hypotenusae. Nam, quum EH=KC (ex Constr.), EC=CB (ex Constr.) =AK (I. 34.) et angulus HEC=AKC ex constr.; erit (I. 4.) triangulum HEC=CKA, et nominatim HC=CA, et angulus CHE=ACK, et HCE=CAK. At, quum CHE+HCE= recto (I. 32.), erit etiam ACK+HCE= recto, unde ACH erit rectus (I. 13. Cor. 2.). Eodem modo ostenditur, esse triangulum HLI=CEH=AKC=IGA=CBA, et HI=HC=AC=AI, et angulum HIA rectum, pariter ac IAC, IHC. Erit itaque AIHC quadratum hypotenusae AC (Def. 30.) Et est hoc quadratum, additis quatuor triangulis rectangulis CKA, HEC, ILH, AGI aequale quadrato GLEK. Pariter autem quadrata ABGF, BCDE, additis duobus rectangulis ABCK, BFLD aequalia sunt quadrato GLEK. Adeoque, quum triangula CKA, HEC, ILH, AGI simul aequalia sint rectangulis ABCK, BFLD, erunt quadrata ABGF, BCDE simul sumta aequalia quadrato AIHC. Ad hoc ipsum fere redit demonstratio Henrici Boad. in geometria Londini 1733. edita, ut refert Klügel. (Mathemat. Wörterb. Artik.: Pythagor. Lehrs. III, Th. p. 932. sqq.) et ea, quam habet Thom. Simpson. Elem. of Géom. p. 33. pariterque ea, quam dedit Winkler. Institut. Mathem. Physic. Geom. §. 363. Scherz. Demonstr. 5. et 6., Müller. Demonstr. 1. et Demonstr. 5. apud Develey Elem. de Géom. L. IV. Ch. III. §. 41. Denique patet quadrato hypotenusae ex altera

parte rectae AC constituto, eandem demonstrationem locum habere. Cf. Schmid. Elem. der Form und Gröfse p. 344. Similem demonstrationem ad varias positiones, quae quadrata in Theor. Pythagor. habere possunt, applicat Hoffm. l. c. Dem. 9—16.

3) Sit triangulum (Fig. 121.) ABC ad B rectangulum, et constituantur ut ante super cathetis quadrata ABGF, BCDE, et producantur rectae GF, ED, donec in L conveniant (I. 29. Cor. 5.) ductaque LB cum hypotenusa conveniat in M, eique parallelae agantur rectae AI, CH, quae rectis EL, GL occurrant in punctis H, I, denique iungatur HI. Iam, quum parallelae sint AB, GF (I. 28.) i. e. AB, IL, pariterque ex Construct. AI, BL, erit AIBL parallelogrammum (Def. 36.), adeoque rectae parallelae AI, BL aequales erunt (I. 34.). Eodem modo ostenditur, etiam CH, BL aequales ac parallelas esse. Unde AI, CH aequales (I. Ax. 1.) et parallelae (I. 30.) erunt. Hinc etiam AC, HI aequales ac parallelae sunt (I. 33.). Praeterea, quum BD=BC (I. Def. 30.), pariterque DL=BF (I. 34.) =AB, et angulus BDL, utpote rectus (I. 13.) aequalis sit angulo ABC, erit etiam (I. 4.) BL=AC, et BLD=BAM. Unde, quum sit BL=AI=CH, et BL=AC=IH, erunt AI, CH, AC, IH inter se aequales. Denique, quum sit LBD=BAI (I. 29.) et, uti modo vidimus, BLD=BAM, erit LBD+BLD=BAI+BAM =IAM: at LBD+BLD= angulo recto (I. 32.), adeoque IMA erit rectus, unde omnes anguli parallelogrammi ACHI erunt recti (I. 34. Cor. 10.), adeoque, quum etiam latera aequalia sint, ACHI erit quadratum hypotenusae (I. Def. 30.). Est autem quadratum ABGF= parallelogrammo ABIL (I. 35.) = rectangulo AIMN (I. 35.), pariterque quadratum BCDE= parallelogrammo BCLH (I. 35.) = rectangulo CHMN (I. 35.). Itaque quadrata ABGF, BCDE cathetorum simul sumta aequalia erunt rectangulis AMIN, CHMN simul i. e. quadrato hypotenusae. Cf. Müller., qui l. c. Dem. 7. hanc demonstrationem, quam ex Clavio repetit, omnium hactenus cognitarum simplicissimam et praestantissimum indicat. No-

tandum est, simili constructione ac demonstratione theorema longe generalius exhiberi posse. Nempe, si super duobus lateribus AB, BC trianguli cuiuscunque constituantur parallelogramma quaecunque ABGF, BCDE, et producantur rectae GF, ED, donec in L conveniant, iunctaque LB cum tertio latere ipso vel producto in M conveniat, et rectae LB parallelae ducantur AI, CH, quae rectis GL, EL in punctis, I, H occurrant, denique iungatur IH: erit ACHI parallelogrammum, quod, si punctum M in ipsam AC cadat, summae parallelogrammorum ABGF, BCDE sin in AC productam cadat, differentiae earum aequale erit. Huius propositionis partem potissimam habet Pappus Collect. Mathem. IV. 1. cf. Castillon. Mem. de l'Acad. de Berlin. 1766. p. 345. Clavius p. 88. Gilbert. die Geometrie nach le Gendre etc. p. 298. Klügel. Encyclop. II. Th. Müller. l. c. p. 79.

4) Multum cum praecedente similitudinis habet sequens demonstratio, nisi quod quadratum hypotenusae ex opposita parte describitur. Constructis (Fig. 122.) super AB, BC, AC quadratis ABGF, BCDE, ACKM producantur MA, KC, usquedum rectis EL, GL in H, I occurrant, et, quum angulus ACK rectus sit (I. Def. 30.) rectus erit ACH (I. 15.). at rectus est etiam BCE (I. Def. 30.), unde, si dematur communis BCH, erit ACB=HCE (I. Ax. 3.). Et, quum praeterea BC=CE, et angulus ABC, utpote rectus, = recto CEH (I. Def. 30.), triangulum ABC aequale est triangulo HEC (I. 26.), et nominatim HC=AC=CK. Eodem modo ostenditur, triangulum ABC aequale esse triangulo AGI, et nominatim esse AI=AC=AM. Ducta deinde BL, erit, ob BD=BC, DL=BF=AB, et angulum BDL=ABC, etiam triangulum BDL=CBA (I. 4.), et angulus BLD=BAC=CHE, itaque LB parallela erit rectae HC (I. 28.), adeoque, si LB producatur, dum secet rectas AC, MK in N, O, erit LB perpendicularis ad AC, MK (I. 29.). Et ob AI=AM, rectangulum AMNO aequale erit parallelogrammo ABIL (I. 36.) = quadrato ABGF (I. 35.), pariterque rectangulum KCNO aequale parallelogrammo BCLH (I. 36.) = quadrato BCDE (I.

35.) Itaque quadratum ACKM=ABGF+BCDE simul. Hanc demonstrationem habet Scherz., estque apud ipsum nr. XI. Eadem etiam utitur Thom. Simpson. Elem. of Geom. p. 31. Müller. Dem. 14.

5) Pariter cum praecedente §. 3. similitudinem habet, et satis facilis est ea, quae sequitur, demonstratio. Constructis, ut ante (Fig. 123.) quadratis ABGF, BCDE, erigantur in A, C, rectae AI, CH ad AC perpendiculares, et producantur, usquedum cum rectis GF, DE ipsis, aut productis in I, H conveniant, quod necessario fiet (I. 29. Cor. 3.), et iungatur HI, eritque angulus GAB=IAC, quia uterque rectus est, unde, demto communi IAB, erit angulus GAI=BAC (I. Ax. 3.), et, quum etiam angulus AGI=ABC, et AG=AB (I. Def. 30.), erit (I. 26.) AI=AC. Eodem modo ostendetur, esse CH=AC, unde etiam AI=CH (I. Ax. 1.), et, quum praeterea AI parallela sit rectae CH (I. 28.), erunt etiam HI, AC aequales et parallelae (I. 34.) et ACIH erit quadratum hypotenusae (I. 30.). Et quum triangulum ABI, et quadratum ABGF in eadem basi, et in iisdem parallelis sint, erit quadratum ABGF duplum trianguli ABI (I. 41.): eadem ratione, si per B ducatur recta NBM parallela rectae AI, erit rectangulum AIMN duplum trianguli ABI (I. 41.), unde quadratum ABGF aequale est rectangulo AIMN (I. Ax. 6.). Simili modo ostenditur, esse quadratum BCDE aequale duplo triangulo BHC i. e. rectangulo NMHC. Totum itaque quadratum ACIH aequale est duobus quadratis ABGF, BCDE simul. Hanc demonstrationem habent Clavius (Euclid. Elem. 1591. p. 85.), Sturmius (Mathes. enucleat. p. 32.), Coëtsius (Euclid. Elem. 6. libri prior. 1692. p. 140.), Scherzius l. c. demonstr. III., Ietze l. c. demonstr. XIII., Müller demonstr. 5., Hoffmann. demonstr. 5. Sturmius observat, triangula AGI, HCE ita considerari posse, quasi triangulum ABC circa punctum A vel C conversum in situm pervenisset, quem habent haec triangula.

6) Clavius ibid. et ex eo Ietze l. c. Dem. II., et Müller. Dem. 6. afferunt adhuc hanc demonstrationem. Constructis,

ut ante (Fig. 124.) quadratis ABGF, BCDE, et figura ACIH, quae eodem modo demonstratur esse quadratum hypotenusae AC, ducatur per G recta GKML, parallela rectae AC, quae rectis AI, CF, CH occurrat in punctis K, M, L, pariterque per E recta EQPON parallela rectae AC, quae cum rectis AI, AB, BC, CH in punctis N, O, P, Q conveniat, et ostendetur, ut nr. 5. esse triangula AGI, ABC aequalia, et nominatim GI=BC, vel ob BC=CE, etiam GI=CE. Et, quum praeterea ex constructione GK, EQ, rectae AC parallelae sint, erunt parallelae inter se (I. 30.), et pariter ac AC cum AI, CH rectos angulos efficient (I. 29.). Et, quum pariter rectae GI, EC parallelae sint, erit angulus IGK=CEQ (I. 29. Cor. 5.). Denique anguli ad K et Q recti sunt, erit itaque (I. 26.) triangulum GKI=EQC, et nominatim IK=CQ. Et quum etiam IH=AC (I. 34.), erit rectangulum IKHL=ACNQ (I. 34. Cor. 21.). Est autem ACNQ=ACOE (I. 35.)=BCDE (I. 35.). Itaque quadratum ABGF= parallelogrammo AGMC (I. 35.)= rectangulo ACKL (I. 35.) Itaque quadrata BCDE, ABGF simul aequalia sunt rectangulis IKHL, ACKL simul i. e. quadrato ACHI.

7) Aliam demonstrationem admodum concinnam habet Müller. l. c. Dem. 15. Cf. eiusdem mathem. kritische Bearbeit. des ersten Buchs der Elemente, et Tempelhof. Geometrie für Soldaten etc. Constructis (Fig. 125.) super lateribus trianguli ABC in B rectanguli quadratis BCDE, ABFG, ACMK, constituatur super MK triangulum MIK ita, ut MI=BC et KI=AB, unde ob MK=AC, erit triangulum MIK= triangulo CBA (I. 8.), eidemque triangulo CBA, ducta recta FD, aequale erit triangulum DBF (I. 8.). Porro ducatur recta GB, quae efficiet angulum GBA semirectum (I. 5. et I. 32.), adeoque (Obs. ad I. 15.) in directum erit cum ducta BE, quae angulum DBE ex iisdem rationibus semirectum efficit. Denique ducatur recta BI. Iam, ut breviter dicamus, omnis demonstratio eo redit, ut ostendatur, utrumque quadrilaterorum BAMI, IKCB aequale esse alterutri quadrilaterorum GFDE, GACE, quod, quum tria latera, quae aequalia sunt lateribus

trianguli ABC, et anguli, quos illa latera comprehendunt, utrimque eodem ordine aequalia sint, adeoque figurae congruant, facillime probatur. Ablatis deinde a duobus quadrilateris BAMI, IKCB triangulis MIK, CBA, pariterque a duobus quadrilateris GFDE, GACE, triangulis DBF, CBA relinquitur quadratum ACKM aequale quadratis BAGF, BCDE simul.

8) Aliam demonstrationem ab Euclidea haud multum diversam, nisi quod hic integra parallelogramma adhibentur, ubi Euclides usus fuit saltim triangulis, quae dimidia erant horum parallelogrammorum, habet Scherz. l. c. Dem. XII. Müller. Dem. 13. Constructis nempe (Fig. 126.) quadratis ABFG, BCDE, ACKM, ducantur EH, GL parallelae rectae AC, BO parallela rectae AM, KI parallela rectae BC, eritque iuncta MI parallela rectae AB. Quum enim ex Constr. BCKI sit parallelogrammum, erit KI=BC, et quum KI parallela sit rectae BC ex Constr. et MK parallela rectae AC (I. 21.) erit angulus MKI=ACB (I. 29. Cor. 5.): est autem etiam MK=AC (I. Def. 30.), quare (I. 4.) angulus KMI=CAB. Quum vero etiam sint AMK, PAC aequales, ut recti, aequales erunt (I. Ax. 3.) PAB, AMI, adeoque AB, MI erunt parallelae (I. 28.). Est autem quadratum ABGF= parallelogrammo ACGL (I. 35.). Parallelogrammum ACGL autem = parallelogrammo ABMI (I. 34. Cor. 21.), est enim GA=AB, AC=AM, et angulus GAC=BAM; denique ABMI = rectangulo AMNO (I. 35.), adeoque quadratum ABGF= rectangulo AMNO. Eodem modo ostenditur, esse quadratum BCDE aequale rectangulo CNOK, quare quadrata ABFG, BCDE simul aequalia erunt quadrato ACKM.

9) Aliam satis simplicem theorematis nostri demonstrationem habet Ietze., quae apud ipsum est octava, et ita habet. Construantur (Fig. 127.) super lateribus AB, BC trianguli in B rectanguli, versus partem hypothenusae AC, quadrata BCDE, ABFG, et producatur FG ad M, donec fiat GM= BC, ducaturque AM. Erit itaque, quum AG=AB (I. Def. 30.), GM=BC ex Constr. et angulus AGM, utpote rectus,

=ABC, et (I. 4.) AM=AC, et MAG=BAC, adeoque, addito communi CAG (I. Ax. 2.) MAC=GAB= recto. Ducatur iam MK parallela rectae AC, et CK parallela rectae AM (I. 31.), eruntque MK=AC=AM=CK (I. 34.) et anguli figurae AMCK omnes recti (I. 34. Cor. 10.), unde ACMK erit quadratum hypotenusae. Conveniet autem DE, si opus est, producta, cum recta FG in O (I. 29. Cor. 3.), iungatur OK, eruntque DO, OK in directum. Nam, quum parallelae sint rectae EC, GF (I. 28.), erit DOF=DEC (I. 29.)= recto (I. Def. 30.). At sumtum fuit GM=BC=OF, adeoque erit OM=FG=AB, et ostensa fuit MK=AC, et angulus AMK rectus =AMG+MAG, unde, demto communi AMG, erit OMK=MAG=BAC: itaque (I. 4.) triangulum MOK=ABC, et nominatim angulus MOK=ABC= recto, et OK=BC. At, quum DOF, ut vidimus, rectus sit, DO, OK erunt in directum (Obs. ad I. 15.). Ducatur BO, et producatur, dum cum recta MK conveniat in P; et quum sit OK aequalis et parallela rectae BC, erit etiam BO parallela rectae CK (I. 33.), adeoque BO erit perpendicularis ad AC, MK (I. 29.). His praemissis, erit quadratum BCDE = parallelogrammo BCOK (I. 35.) = rectangulo NCKP (I. 35.): eodemque modo quadratum ABGF =parallelogrammo AMBO (I. 35.) = rectangulo AMNP (I. 35.), adeoque quadrata BCDE, ABGF aequalia rectangulis NCKP, AMNP simul, i. e. quadrato ACMK.

10) Constructis omnibus, ut ad Nr. 5. eodem modo, ut ad Nr. 5. (Fig. 128.) ostendetur, esse ACHI quadratum hypotenusae AC, et triangulum AGI esse aequale triangulo ABC. Pariterque, ob AC=CH, CB=CE (I. Def. 30.) et angulos ad B, E rectos, erit (I. 4.) triangulum ABC=HEC, unde, addito communi BLC, erit triangulum ACL=HEC+BLC i. e. =BCDE+HLD. Est autem, ob HE=AB=GF, et DE=BC=GI, etiam (I. Ax. 3.) HD=IF, et quum praeterea sit angulus FIK=GAI (I. 32.) =BAC=LHD, et anguli ad F et D recti sint, erit (I. 26.) triangulum IFK=HLD. Itaque triangulum ACL = quadrato BCDE addito

triangulo IFK. Denique, quum sit HC=AC, angulus HCK =CHE (I. 29.) =BAC, et angulus CHK rectus, adeoque =ACH, erit triangulum CHK = triangulo ACL, adeoque, demto communi BCL, HLBK=△ABC=△AGI. Itaque △ACL+HLBK+ABKI=BCDE+IFK+AGI+ABKI i. e. quadratum ACHI = quadratis BCDE, ABFG simul. Hanc demonstrationem habet Gregorius a St. Vincentio in opere geometrico de circuli quadratura L. I. P. II. Prop. XLIII. p. 30. Convenit cum ea, quam Schooten Andreae ab Oudtshorn tribuit. Cf. Scherz. l. c. Dem. 10. Müller. Dem. 9.

11) Construatur (Fig. 129.) super BC quadratum BCDE, sumtaque DF=AB, constituatur super DF quadratum FDGI, quod (ob DF=AB) aequale erit quadrato ex AB (I. 46. Cor.), eruntque (ob angulos rectos BDE, FDG) ED, DG in directum (I. 14.). Deinde ducatur recta AI, eritque, ob DF=BA (ex constr.), si auferatur communis BF, AF=BD=BC. Et, quum sit FI=FD=AB, erit (I. 4.) AI=AC, et angulus FAI=ACB, adeoque FAI+FAC=ACB+FAC= angulo recto (I. 32.). Si deinde per C ducatur CH parallela rectae AI, quae cum recta EG conveniat in H, et iungatur HI, erit ACHI quadratum hypotenusae. Nam, quum ex constr. sit CH parallela rectae AI, et CAI=FAI+FAC= angulo recto, erit ACH rectus (I. 29.), adeoque ACH=BCE (I. Def. 30.), vel, demto communi BCH, erit ACB=HCE (I. Ax. 3.). Et quum praeterea sit CB=CE (I. Def. 30.) et ABC=CED (I. Def. 30.), erit (I. 26.) CH=CA=AI, et triangulum CEH=CBA. Quum itaque CH, AI sint aequales et parallelae, erunt etiam AC, HI aequales et parallelae (I. 33.), adeoque etiam angulorum AIH, CHI uterque rectus est (I. 29.) et ACHI quadratum hypotenusae AC. Hoc autem quadratum aequale est quadratis FG, BE simul. Habet enim cum iis communia spatia IFKH, CBK, et triangulum ABC ostensum fuit aequale esse triangulo HEC, pariterque triangulum AFI aequale erit triangulo HGI (I. 4.) ob AI=IH, IF=IG, et angulos AIH, FIG rectos, adeoque, demto communi FIH, angulum

AIF=HIG. Hanc demonstrationem, quam ad Schooteniu refert, habet etiam Christ. Sturmius Math. enuncl. p. 31. e Develey. Elem. de Géom. L. IV. Ch. III. No. 42. Dem. 4.

12) Reliquis constructis et demonstratis ut nr. 10. ducatur (Fig. 130.) per H recta HM parallela rectae BD (quo itaque angulus HMK rectus efficitur) et per L recta OLN parallela rectae BC, et ostendetur, ut No. 10. esse triangulum AGI=ABC, pariterque triangulum IFK=HLD=LOH (I. 34.). Praeterea autem est LDEN=LBMO (I. 43.) et triangulum CNL=KMH (I. 26.): est enim HM=BD (I. 34.) =DE (I. Def. 30.) =LN (I. 34.), angulus M=N (I. Def. 30.), et angulus KHM=EHC (quia, addito communi MHC, utrimque rectus prodit) =NLC (I. 29.). Totum igitur quadratum ex AC= quadratis ex AB, BC simul. Hanc demonstrationem habet Coëtsius p. 158. sqq.

Caeterum, omissis pluribus aliis demonstrationibus, quae habentur apud Coëtsium, Scherzium, Ietzium, qui viginti tres habet, Hoffmannum, qui triginta duas exhibet, Müllerum, aliosque, addimus adhuc nonnullas alias, quae, quamvis nitantur propositionibus ab Euclide posthac demum demonstrandis, vitio tamen logico, quod circulum in demonstrando vocant, minime laborant, quod nempe eae, quibus nostrae hae innituntur, propositiones non vice versa ope theorematis Pythagorici, aut aliorum ab eo pendentium theorematum, sed ita potius demonstrari possunt, ut, si quis velit, ea ante I. 47. ponere possit. Huc pertinet

13) Haud inelegans demonstratio Coëtsii p. 148. sqq. et Sturmii in Mathesi enuncleata p. 183., quam etiam habet Scherz. Dem. 7., Müller. Dem. 3., et Ietze. Dem. XV., qui eandem etiam prolatam dicit ab Hombergero Franco in Dissertatione de Magistro Mathesos. Witemberg. 1701. Praeside Feuerlein. edita. Ea huc fere redit. Triangulum rectangulum ABC aut aequicrurum erit, aut non. Sit 1) aequicrurum, et constructis (Fig. 131.) quadratis BG, BE, ducantur diametri AF, CD, et iungantur FD, eritque ACFD quadratum hy-

potenusae. Nempe △△ABC, ABF, CBD, FBD aequalia sunt (I. 4.), adeoque AC=AF=CD=FD, et ob angulos aequales et semirectos (I. 32. Cor. 7.) BAC=BCA=BCD=BDC=BDF=BFD=BFA=BAF, anguli FAC, ACD, CDF, DFA recti sunt, et figura ACDF est quadratum (I. Def. 30.). Et, quum triangula ABC, ABF, CBD, BFD aequalia sint, quodvis eorum quarta pars est quadrati ACFD. At triangulum ABF est pars dimidia quadrati AG (I. 34.), et triangulum CBD pars dimidia quadrati BE vel quadrati AG: itaque quadrata AG, BE simul aequantur quadrato ACFD. (Hinc, ut hoc obiter notemus, deducitur, in quovis triangulo, rectangulo isoscali quadratum hypotenusae quadruplum esse trianguli propositi.). Sit vero 2) (Fig. 132.) triangulum ABC ad B rectangulum non aequicrurum, sed AB>BC, et a) facile demonstrabitur, quadratum hypotenusae superare triangulum ABC quater sumtum quadrato, quod fit a differentia reliquorum laterum, seu, quod idem est, quadratum hypotenusae esse aequale triangulo proposito quater sumto, una cum quadrato differentiae reliquorum laterum. Nempe, constructis quadratis BG, BE, producantur rectae AG, EC, donec in K conveniant, deinde, constructo super AC quadrato ACHI, ducatur ILN parallela rectae CK (I. 31.) et HNM parallela rectae GK, eritque angulus IAL+KAC utpote rectus (I. Def. 30.) =KCA+KAC (I. 32.), adeoque IAL=KCA, et, ob angulos L, K rectos, et AI=AC, est triangulum IAL =ACK (I. 26.). Eodem modo ostendetur, aequalia esse omnia triangula ACK, IAL, HIN, CHM, CAB. Praeterea, quum sit KL=AL—AK=CK—AK=AB—BC, et eodem modo LN=NM=KM=AB—BC, et anguli K, L, N, M, recti, erit KLMN quadratum differentiae AB—BC, adeoque quadratum ACHI = triangulo ABC quater sumto, una cum quadrato differentiae laterum AB, BC, vel, quod eodem redit, quadratum ACHI aequale est duplo rectangulo sub AB, BC una cum quadrato differentiae horum laterum. Iam vero b) ex II. 7. sumere licet, quadratum differentiae laterum AB, BC aequale esse quadratis ex AB, BC, demto duplo rectan-

gulo sub AB, BC. Itaque quadratum ACHI aequale erit quadratis ex AB, BC.

Aliae adhuc demonstrationes nitun ur doctrina de proportionibus et figurarum similitudine, quam pariter certum est, sine ope theorematis Pythagoraei adstrui et posse et solere. Huc pertinet

14) Sequens demonstratio. Constructo (Fig. 133.) super hypotenusa AC trianguli ABC ad B rectanguli quadrato ACMK, ducatur BNO parallela rectae CK, eritque BN perpendicularis ad AC (I. 29.), itaque similia erunt triangula ABC, ANB, BNC (VI. 8.) unde erit AC : AB = AB : AN (VI. Def. 1.) adeoque quadratum ex AB = rectangulo ex AC, *AN* (VI. 17.) i. e. rectangulo *ANOM*: pariterque *AC* : *BC* = *BC* : *CN* (VI. Def. 1.), adeoque quadratum ex *BC* = rectangulo ex *AC*, *CN* (VI. 17.) i. e. rectangulo *CNOK*. Quadrata igitur ex *AB*, *BC* simul aequalia erunt rectangulis *AO*, *NK* simul i. e. quadrato ex *AC*.

Haec demonstratio est apud Scherzium XIV., et Coëtsius ea utitur in scholio ad VI. 17. Eandem demonstrationem habet Develey. Elém. de Géom. L. IV. Ch. III. Th. 9. Müller. Dem. 16. Hoffmann. Dem. 26. Caeterum eodem ea redit, quo illa, quam a Grusonio exhibitam esse diximus in I. 41. Cor. 6., nisi quod Grusonius rem sine consideratione proportionum ac figurarum similium expedit.

15) Paullo aliter similis demonstratio ita sisti poterit. Triangulum *ABN* (Fig. 133.) erit ad triangulum *ABC*, ut *AB*q ad *AC*q (VI. 19.), et triangulum *BNC* ad triangulum *ABC*, ut *BC*q ad *AC*q (VI. 19.). Hinc $\triangle ABN + \triangle BNC : \triangle ABC = AB^q + BC^q : AC^q$ (V. 24.). Atqui $\triangle ABN + \triangle BNC = \triangle ABC$, itaque $AB^q + BC^q = AC^q$ (V. Def. 5.). Hanc demonstrationem habet Bézout. Elém. de Géom. Hoffmann. Bew. 27.

16) Brevior adhuc erit sequens demonstratio. Quum ex VI. 31. in triangulo rectilineo figura quaecunque rectilinea super hypotenusa descripta aequalis sit duabus similibus et similiter descriptis figuris super cathetis, nominatim idem

valet de quadratis, quippe quae sunt figurae rectilineae similes (VI. Def. 1.). Haec demonstratio ultimo loco habetur apud Scherzium l. c. et Ietze l. c. et apud Coëtsium in scholio 2. ad VI. 31.

17) Finem his demonstrationibus faciat sequens, quae est apud Ietzium 20., et quam ille ad Ioann. Ioachim. Langium Mathes. Prof. Halensem refert. Sit (Fig. 134.) triangulum ad B rectangulum, super hypotenusa AC construatur quadratum $ACHI$ (I. 46.), et centro C radio CA describatur semicirculus LAM, eritque $LB=LC-BC=AC-BC$, et $BM=CM+BC=AC+BC$. Sumta deinde $CE=BC$ (I. 3.) construatur super CE quadratum $CEFD$, quod itaque aequale erit quadrato ex BC, eritque $DH=CH-CD=AC-BC$, pariterque $AE=AC-CE=AC-BC$. Producatur EF, dum cum recta IH conveniat in G, eritque $GI=AE$ (I. 34.) $=AC-BC=DH$. Denique producantur AI et EG ad N et K ita, ut $IN=GK=GH=CE=BC$, et iungatur NK, eritque $IGNK$ rectangulum (I. 33. et 34.), idque = rectangulo $FGHD$ (I. 34. Cor. 21.) quia $FG=IG$, et $GK=GH$. Quadratum igitur $ACHI$ aequale est quadrato $EFDC$ simul cum rectangulis $AEGI$, $FDGH$ i. e. quadrato ex BC una cum rectangulo $AENK$. Hoc ipsum rectangulum autem continetur sub rectis $AE=AC-BC$, et $AN=AI+IN=AC+BC$; itaque quadratum hypotenusae AC aequale est quadrato unius catheti BC, una cum rectangulo, quod continetur sub summa huius catheti et hypotenusae $(AC+BC)$, et sub differentia earum $(AC-BC)$. At, ductis rectis AL, AM angulus in semicirculo rectus erit (III. 31. quae non pendet a I. 47.), adeoque (VI. 8.) erit $LB:BA=BA:BM$, i. e. $AC-BC:BA=BA:AC+BC$, ac proinde (VI. 17.) $BA^2=(AC-BC)\times(AC+BC)$. Itaque quadratum hypotenusae aequale est quadratis ex BC et AB simul.

Cor. Ex hac observatione, quod nempe in triangulo rectangulo ABC semper sit AC−BC : BA = BA : AC+BC facile deduci possunt, quod Langius ad finem dissertationis Ietzii

notat, regulae pro inveniendis numeris integris, quorum quadrata (numeri quadrati) ita comparata sint, ut duo simul aequalia sint tertio. Posito nempe $AC-BC=a$, $BA=b$, erit $a:b=b:\frac{b^2}{a}$, adeoque $AC+BC=\frac{b^2}{a}$, unde $(AC+BC)+(AC-BC)=2AC=a+\frac{b^2}{a}=\frac{a^2+b^2}{a}$; adeoque $AC=\frac{a^2+b^2}{2a}$, $(AC+BC)-(AC-BC)=2BC=\frac{b^2}{a}-a=\frac{b^2-a^2}{a}$, adeoque $BC=\frac{b^2-a^2}{2a}$. Tres igitur rectae AB, BC, AC, vel numeri iis analogi esse poterunt hi: b, $\frac{b^2-a^2}{2a}$, $\frac{b^2+a^2}{2a}$; dummodo duo ultimi sint numeri integri, vel, si omnes per $2a$ multiplicentur: $2ab$; b^2-a^2, b^2+a^2, qui cum sumtis a et b numeris integris quibuscunque omnes sint numeri integri, efficient, quod erat propositum. Hanc ipsam regulam supra ad I. 48. attulimus. Ex ea etiam derivari possunt reliquae dictae, quae ad Pythagoram et Platonem referuntur. Nempe in regula a Pythagora allata numerus, qui hypotenusam exprimit, unitate semper excedit numerum alterius catheti: Quodsi itaque ponas $b^2+a^2-2ab=1$, erit $(b-a)^2=1$; adeoque etiam $b-a=1$, vel $b=a+1$. Iam; si hoc sumas, erunt tres numeri $2ab=2a^2+2a$; $b^2-a^2=2a+1$; $b^2+a^2=2a^2+2a+1$ eadem forma comprehensi, quae supra exhibita fuit. Pariter in regula a Platone data numerus, qui hypotenusam exprimit, binario semper excedit numerum alterius catheti: Quodsi ponas $b^2+a^2=(b^2-a^2)+2$, vel $2a^2=2$; adeoque $a^2=1$, et $a=1$, erit $2ab=2b$; et $b^2-a^2=b^2-1$; et $b^2+a^2=b^2+1$, quae ipsa est regula Platonis. Denique patet, quod Langius observat, multas alias speciales regulas hac generaliore contineri, v. c. si quis velit, ut numerus hypotenusae numerum alterius catheti quaternario superet, erit $b^2+a^2-2ab=4$, adeoque $b-a=2$, vel $b=a+2$, et numeri $2ab=2a^2+4a$; $b^2-a^2=4a+4$; $b^2+a^2=2a^2+4a+4$. Vel

generalius, si ponatur $b^2+a^2-2ab=m^2$, adeoque $b-a=m$, vel $b=a+m$, erit $2ab=2a^2+2am$; $b^2-a^2=2am+m^2$; $b^2+a^2=2a^2+2am+m^2$. Conferri hic meretur Müller. system. Darstell. der wichtigst. bisher. Beweise des pythagor. Lehrsatzes, mit einer ausführlichen Theorie der Zahlen-Dreyecke. Nürnb. 1819.

EXCURSUS. III.

AD

ELEMENTORUM

I. 47. 48. II. 12. 13.

1) Prout in triangulo aliquo angulus aliquis rectus, aut obtusus, aut acutus fuerit, quadratum lateris huic angulo oppositi fore aequale, aut maius, aut minus, quam summa quadratorum duorum reliquorum laterum eiusdem trianguli, et vice versa vidimus ad I. 47. II. 12. 13. Pariter autem angulorum trianguli, laterumque ipsis oppositorum mutua aliqua relatio e sequentibus patebit, quibus praeterea nonnullae propositionum istarum adplicationes continentur. Brevitatis caussa ad initium statim monemus, omnia, quae in hoc excursu sequuntur, ad nr. usque 23. desumta esse e Pfleidereri Schol. saepius citatis 220—245.

2) Si recta a vertice trianguli ad punctum, quo basis bifariam secatur, ducta aequalis est semissi basis, angulus ad verticem est rectus, quod facile deducitur e I. 32. contra angulus ad verticem obtusus vel acutus erit, prout recta ab eo ad punctum, quo basis bisecatur, ducta semisse basis est minor aut maior, quod consequitur ex I. 18. I. 32. I. 13.

3) Et vice versa, si angulus ad verticem trianguli rectus est, recta ab eo ad punctum ducta, quo bifariam secatur basis, aequalis est semissi basis; si ille angulus obtusus fuerit, haec recta minor erit semisse basis; denique, si ille angulus acutus fuerit, haec recta maior erit semisse basis, quod apagogice facile demonstratur.

4) Quae e vertice trianguli aequicruri ad punctum, quo bifariam secatur basis, ducitur recta, ad angulos rectos basi insistit (I. 8. vel Obs. ad I. 10.). Quae autem a trianguli non aequicruri vertice ad punctum bisectionis basis agitur recta, oblique in basin incidit, ita ut angulum obtusum cum ea efficiat ad partes cruris maioris, acutum ad partem cruris minoris (I. 25. I. 13.).

5) In triangulo igitur non aequicruro, cuius anguli ad basin ambo sunt acuti, perpendiculum ab vertice in basin demissum hanc in inaequalia secat, sic, ut maius segmentum adiaceat cruri maiori, minus minori (nr. 4. et Cor. I. 17.). Idem etiam consequitur ex I. 47.

6) In quocunque triangulo non aequicruro differentia quadratorum crurum aequalis est duplo rectangulo sub basi et sub eius segmento duobus intercepto punctis, quorum uno bifariam secatur basis, altero in ipsam incidit perpendiculum ex vertice trianguli super eam demissum.

Sint (Figg. 177. 178. 179.) triangula non aequicrura, nominatim sit $AC > AB$, sintque eorum bases bifariam sectae in puncto G.

a) Si (Fig. 177.) rectus est angulus B, qui cruri maiori opponitur: est $AC^q = AB^q + BC^q$ (I. 47.) $= AB^q + 2GB \times BC$ (II. 2. Cor. 1.).

b) Si (Fig. 178.) angulus ABC est obtusus, et AD perpendicularis ad BC: est $AC^q = AB^q + BC^q + 2BD \times BC$ (II. 12.) $= AB^q + 2GB \times BC + 2BD \times BC$ (II. 2. Cor. 1.) $= AB^q + 2GD \times BC$ (II. 1.).

c) Si (Fig. 179.) angulus ABC est acutus, et AD perpendicularis ad BC: est $AC^q + 2DB \times BC = AB^q + BC^q$ (II. 13.) $= AB^q + 2GB \times BC$ (II. 2. Cor. 1. $= AB^q + 2GD \times BC + 2DB \times BC$ (II. 1.), itaque $AC^q = AB^q + 2GD \times BC$. Proinde in triangulo rectangulo $AC^q - AB^q = 2GB \times BC$, in triangulis obliquangulis $AC^q - AB^q = 2GD \times BC$.

Aliter ita: cum angulus C, qui lateri $AB < AC$ opponitur, acutus sit (I. 28. I. 17.), generatim (Obs. 1. ad II. 13.) est $AC^q + BC^q = AB^q + 2BC \times CD$, seu (II. 2. Cor. 1. et II. 1.)

$AC^q + 2BC \times CG = AB^q + 2BC \times CD$, igitur $AC^q = AB^q + 2BC \times GD$, et $AC^q - AB^q = 2BC \times GD$. Huc redeunt demonstrationes Whistoni p. 61. sq. Gilberti p. 295.

7) Duobus casibus posterioribus nr. praeced. sunt

$AC^q = CD^q + AD^q$; $AB^q = BD^q + AD^q$,

unde $AC^q - AB^q = CD - BD^q$. Porro sunt

$CD^q - BD^q = (CD + BD) \times (CD - BD)$ (II. 5. Cor. 10.),

et casu anguli obtusi $CD + BD = 2GD$, $CD - BD = BC$,

casu autem anguli acuti $CD + BD = BC$, $CD - BD = 2GD$.

Quare utroque casu $CD^q - BD^q = 2BC \times GD$. Utrumque assertum $AC^q - AB^q = CD^q - BD^q = 2BC \times GD$ complectuntur, et posterius ex priore alterutro modo hic indicato inferunt Pappi Lemma 2. vel 4. in Apollonii Locor. Plan. L. II. (Collect. Math. fol. 232. b. sq.), Apollonius von Pergen ebene Oerter p. 13. sq. 27. sq. 208. sq. ac Gilbert. die Geometrie nach le Gendre, Simpson u. s. w. I. Th. Halle 1798. p. 304. sq.). Lemma Pappi de triangulo universim enunciatur. Schema ei adiunctum non nisi casum anguli acuti exhibet, demonstratio tamen aeque ad casum anguli obtusi pertinet. Ac II. Prop. 1. Apollonii, quae posteriore huius lemmatis parte nititur, eam non solum ad hos casus, sed etiam ad casum anguli recti extensam requirit.

8) Cuiusvis trianguli quadrata duorum crurum simul dupla sunt quadratorum dimidiae basis ac rectae ab vertice trianguli ductae ad punctum, quo basis bifariam secatur.

Triangulorum ABC (Fig. 177—180.) bases BC bifariam in puncto G secentur, et ab verticibus A ad puncta G ducantur rectae AG.

a) Cum in triangulo aequicruro (Fig. 180.) recta AG sit basi perpendicularis (Obs. ad I. 10.), ideoque sit $AC^q = AB^q = GC^q + AG^q = GB^q + AG^q$ (I. 47.) est $AC^q + AB^q = 2(GB^q + AG^q)$.

Sint, ut (Fig. 177—179.) triangulorum ABC crura inaequalia, nempe $AC > AB$. Cum in his recta AG oblique in basin BC incidat (nr. 4.): sit α) ipsum crus minus AB basi BC perpendiculare: tum $AC^q = AG^q + GC^q + 2CG \times GB$ (nr.

4. et II. 12.) $=AG^q+GB^q+2GB^q$, ob $CG=GB$ (constr.): itaque $AC^q+AB^q=AG^q+AB^q+GB^q+2GB^q=2AG^q+2GB^q$, ob $AB^q+GB^q=AG^q$ (I. 47.). Aliter ita: $AC^q=AB^q+BC^q$ (I. 47.) $=AB^q+4GB^q$ (Constr. et II. 4. Cor. 2.), quare $AC^q+AB^q=2AB^q+4GB^q=2(AB^q+GB^q)+2GB^q=2AG^q+2GB^q$ (I. 47.). β) Si etiam crus minus AB basi BC oblique insistat, ex vertice A demittatur in basin BC perpendiculum AD, quod ad partes anguli acuti AGB cadet (nr. 4.). Tunc cum angulus AGC sit obtusus, AGB acutus, sunt $AC^q=AG^q+CG^q+2CG\times GD$ (II. 12.) $=AG^q+GB^q+2GB\times GD$, ob $CG=GB$ (Constr.) at $AB^q=AG^q+GB^q-2GB\times GD$ (II. 13. et Obs. 1. ad II. 13.). Quare $AC^q+AB^q=2(AG^q+GB^q)$.

Aliter ita: $AC^q=AD^q+CD^q$ (I. 47.)

$AB^q=AD^q+BD^q$;

igitur $AC^q+AB^q=2AD^q+CD^q+BD^q$

$=2AD^q+2GD^q+2GB^q$ (II. 9. aut II. 10.)

$=2AG^q+2GB^q$ (I. 47.).

9) Propositionem nr. praeced. traditam exhibent Pappi lemma 4. vel 6. in Apollonii Locor. Planor. Lib. II. Collect. Mathem. fol. 234. b. sq.; Apollonius von Pergen ebene Oert. p. 15. 29. 254. sq.; Serenus de Coni sectione Prop. 16. p. 46. sq.; Clavius Euclid. Elem. Francof. 1607. p. 208. sq.; Gregorius a St. Vincentio p. 28. sq.; Franc. a Schooten. Exercitat. Mathem. libr. V. Lugd. Bat. 1657. Prop. Geom. Prop. 18. p. 62. sq.; Viviani de locis solidis libr. III. Prop. 6. p. 34. sq.: Whiston. p. 62.; Playfair. p. 65. sq.; van Swinden. p. 78.; Gilbert. p. 307. sq.; Thom. Simpson. Elem. of Geom. Lond. 1800. p. 37. Et Simpson. quidem facile adhuc inde et ex I. 34. Cor. 1. deducit sequens theorema: si e puncto aliquo intra rectangulum ducantur rectae ad quatuor eius angulos, summa quadratorum duarum rectarum ad duos oppositos angulos ductarum aequalis est summae quadratorum duarum reliquarum rectarum. Idem theorema van Swinden. Anfangsgr. der Mefsk. Iena 1797. p. 74. ex I. 47. et I. 34. deducit. Pappus ac Whiston. casum

nr. b. β. solum, hic priori, ille posteriori methodo demonstratum sistunt, propositum autem generatim enunciant, quod et supponit Apollonii libr. II. Prop. 5., cui apud Pappum illud inservit. Clavius ac Franc. a Schooten. omnes recensent ac demonstrant casus: ille casum nr. b. α. modo posteriori, hic priori; alterum nr. b. β. uterque modo posteriori. Gregorius casu nr. a. omisso casum nr. b. α. adstruit methodo priori: et casum nr. b. β. in duos dividit, quorum priorem, ubi nempe triangulum est rectangulum, pariter modo priori, alterum posteriori stabilit. Serenus, Viviani, Gilbert. hic exposito, illi strictim indicato et ad I. 47. remisso casu nr. a. duos casus nr. b. una demonstratione complectuntur; Viviani quidem ac Gilbert. priori modo iuxta Obs. 1. ad II. 13., cui hic et alteram casus nr. b. β. demonstrationem subiungit, Serenus autem sequenti methodo simili priori nr. b. β. Cum ob $AC > AB$ (supp.) sit (Fig. 181—183.) angulus AGC obtusus, AGB acutus (nr. 4.): ad huius partes cadit perpendiculum BF ex puncto B in rectam AG demissum, quicunque sint anguli ABC, BAG; et perpendiculum CK ex puncto C in eandem AG demissum in ipsam ultra AG productam incidit ad partes anguli CGK deinceps positi obtuso AGC (I. 17. Cor. 5.): atque ob $GC = GB$ (Constr.) et angulos $K = BFG$ (Constr.), $CGK = BGF$ (I. 15.), est $GK = GF$ (I. 26.). Proinde $AC^q = AG^q + GC^q + 2AG \times GK$ (II. 12.) $= AG^q + GB^q + 2AG \times GF$. $AB^q = AG^q + GB^q - 2AG \times GF$ (Obs. 1. ad II. 13.), et $AC^q + AB^q = 2(AG^q + GB^q)$. Textui Sereni praeter figuras trianguli aequicruri et acutanguli adiuncta est tertia angulum ABC sistens obtusum: eo itaque saltim modo extensam supponens propositionem II. 13. qui Obs. 1. a. ad II. 13. indicatur: quod tamen ad propositum universim evincendum haud sufficit.

10) Casum propositionis praecedentis (Fig. 180.), quo $AB = AC$,

adeoque $AC^q + AB^q$ seu $2AB^q = 2(AG^q + GB^q)$

et $AB^q = AG^q + GB^q$,

etiam expromit assertum: trianguli isosceli quadratum cruris

aequari quadrato rectae ab vertice trianguli ductae ad punctum bisectionis basis et rectangulo sub segmentis basis, in quae puncto illo dividitur, simul. Quod assertum perstat, quodcunque basis punctum M loco puncti bisectionis G accipiatur. Etenim

$$AB^q = AG^q + GB^q \text{ (I. 47.)}$$
$$= AG^q + GM^q + BM \times MC \text{ (II. 5.)}$$
$$= AM^q + BM \times MC \text{ (I. 47.)}.$$

Sed, si (Fig. 184.) punctum M sumitur in basi BC producta: fit

$$AB^q = AG^q + GB^q \text{ (I. 47.)}$$
$$= AG^q + GM^q - BM \times MC \text{ (II. 6.)}$$
$$= AM^q - BM \times MC \text{ (I. 47.)}$$

seu $AB^q + BM \times MC = AM^q$.

Trianguli igitur isoscelis quadratum cruris excedit quadratum rectae ab vertice trianguli ad punctum quodcunque ipsius basis ductae, rectangulo sub segmentis basis, quae punctum hoc dirimit: sed quadratum rectae ab vertice trianguli ad quodlibet basis continuatae punctum ductae excedit quadratum cruris, rectangulo sub rectis, quae pariter puncto illi et extremis basis interiacent.

Generatim differentia quadratorum cruris trianguli isoscelis, et rectae ab vertice eius ductae ad punctum quodcunque basis ipsius, vel productae, aequalis est rectangulo sub rectis, quae puncto illi et extremis basis interiacent.

Lemma hoc Rob. Simson. praemittit propositioni 76. datorum (p. 107 sq.). Priorem eius partem demonstrationi primae eiusdem propositionis apud ipsos 67., ex veteri Scholiaste subiungit Claud. Hardy. (p. 121. sq.); in nota annectit Dav. Gregorius (p. 503). Eandem propositionem tradit Gilbert. (p. 351. 357.) et Grugon. eam pro novo affert l. c. supra in I. 41. Cor. 4. §. 21.

11) Quodsi autem ab trianguli non aequicruri ABC vertice A ducitur AM recta (Fig. 185. 186.) ad punctum quodcunque M basis BC, ab puncto bisectionis eius G diversum; bifariam vero in L secatur AM, et iungitur GL recta: quadrata cruruum trianguli simul excedunt quadratum rectae AM

et quadruplum quadratum rectae GL, duplo rectangulo sub segmentis BM et MC. Et si ad basis productae (Fig. 187. 188.) punctum quodcunque M ab vertice A recta AM agitur, pariterque in L bifariam secatur, ac recta GL iungitur: quadratum rectae AM et quadruplum rectae GL quadratum simul excedunt summam quadratorum crurum trianguli duplo sub BM et MC rectangulo. Nempe ducta AG recta, sunt

$AC^q + AB^q = 2AG^q + 2GB^q$ (nr. 8.)

$= 2AG^q + 2GM^q + 2BM \times MC$ si M in ipsa basi situm est

$= 4AL^q + 4GL^q + 2BM \times MC$ (nr. 8.)

$= AM^q + 4GL^q + 2BM \times MC$ (II. 4. Cor. 2.)

vel $= 2AG^q + 2GM^q - 2BM \times MC$ si M in producta basi fuerit,

$= 4AL^q + 4GL^q - 2BM \times MC$ (nr. 8.)

$= AM^q + 4GL^q - 2MB \times MC$ (II. 4. Cor. 2.).

12) Eadem constructio applicatur ad triangulum aequicrurum (vid. Fig. 180. 184.). Tum vero, ob angulum AGM rectum (Obs. ad I. 10.) est $GL = AL = ML$ (nr. 3.); $2GL = AM$; $4GL^q = AM^q$ (II. 4. Cor. 2.). Unde ex praeced. si punctum M in ipsa basi fuerit,

erit $AC^q + AB^q$ seu $2AB^q = 2AM^q + 2MB \times MC$

$AB^q = AM^q + BM \times MC$

si vero punctum M sit in basi producta, erit

$AC^q + AB^q$ seu $2AB^q = 2AM^q - 2BM \times MC$

et $AB^q = AM^q - BM \times MC$

conformiter nr. 10.

13) Si in trianguli aequicruri alterutrum crus perpendicularis demittitur ex vertice oppositi anguli ad basin; rectangulum sub hoc crure et sub eius segmento, quod basi et perpendiculo interiacet, dimidium est quadrati basis (Pappi Theor. 1. subiunctum. Prop. XXV. lib. V. Collect. mathem. fol. 89.).

Ob angulos ad basin BC trianguli aequicruri ABC (Fig. 189—191 acutos (I. 5. I. 32.), ad partes anguli C cadit perpendiculum BD in crus AC demissum ex vertice B anguli

oppositi ad basin (I. 17. Cor. 5.): idemque cum altero crure BA coincidit (Fig. 189.), si trianguli ad verticem A angulus est rectus; intra triangulum in crus ipsum CA cadit (Fig. 190.), si angulus A est acutus; extra triangulum in productum crus CA incidit (Fig. 191.), si trianguli ad verticem angulus BAC est obtusus (I. 17. Cor. 5.).

Primo casu est $BC^q = AB^q + AC^q$ (I. 47.) $= 2CA^q$, ideoque

$$CA^q = \tfrac{1}{2}BC^q.$$

Secundo casu est $BC^q + 2CA \times AD = AB^q + AC^q$ (II. 13.)

$= 2CA^q = 2CA \times AD + 2AC \times CD$ (II. 2.)

igitur $BC^q = 2AC \times CD$

et rectang. $AC \times CD = \tfrac{1}{2}BC^q$.

Tertio casu est $BC^q = AB^q + AC^q + 2CA \times AD$ (II. 12.)

$= 2(AC^q + CA \times AD) = 2AC \times CD$ (II. 3.), itaque

rectang. $ACD = \tfrac{1}{2}BC^q$.

Ita Pappus apud Commandinum. Succinctius et generatim ob angulum C acutum est omnibus casibus

$$AB^q + 2AC \times CD = BC^q + AC^q \text{ (Obs. 1. ad II. 13.)}$$

et ob $AB = AC$, $2AC \times CD = BC^q$

rectang. $AC \times CD = \tfrac{1}{2}BC^q$.

11) Sit 1) ABCD parallelogrammum rectangulum (Fig. 192.), cuius iungantur diagonales AC, BD, erit

$$AZ^q = AB^q + BC^q \text{ (I. 47.)}$$

$$BD^q = \left.\begin{matrix} AB^q \\ CD^q \end{matrix}\right\} + DA^q$$

ideoque $AC^q + BD^q = AB^q + BC^q + CD^q + DA^q$

$$= 2(AB^q + BC^q).$$

Posterius immediate etiam inde consequitur, quod parallelogrammi rectanguli diagonales invicem sunt aequales (I. 34. Cor. 17.).

2) Sit (Fig. 193.) ABCD parallelogrammum obliquangulum, cuius igitur duo anguli, qui eidem lateri e. gr. AB adiacent, et qui (I. 29.) simul valent duos rectos, sunt unus DAB acutus, alter CBA obtusus. Ductis eius diagonalibus AC, BD (quarum prior, quae vertices angulorum acutorum parallelogrammi iungit, seu obtusis eius angulis opponitur,

altrea maior est (I. 34. Cor. 17.); in latus parallelogramm quodlibet AB, si parallelogrammum est aequilaterum, et i laterum contiguorum maius AB, si parallelogrammum no est aequilaterum, ab extremis D, C lateris oppositi CD de mittantur perpendicula DE, CF: quorum prius, ob angulu

$DBA \overset{=}{<} DAB$ (Supp. et I. 5. I. 18.) ideoque acutum (I. 17 Cor. 1.), pariterque (Supp.) acutum DAB intra triangulu ABD, alterum ob angulum CBA obtusum, extra triangulu ABC cadit (I. 17. Cor. 5.), ita ut sit BF=AE (I. 26.), o BC=AD (I. 34.) atque angulos CBF=DAF (I. 29.) et F= AED rectos (Constr.).

Igitur $AC^q = AB^q + BC^q + 2AB \times BF$ (II. 12.)

$BD^q = AB^q + AD^2 - 2AB \times AE$ (Obs. 1. a. ad II. 13.)

$= CD^q + AD^q - 2AB \times BF$ (I. 34. et Dem.)

atque $AC^q + BD^q = AB^q + BC^q + CD^q + AD^q = 2(AB^q + BC^q)$

Proinde in omni parallelogrammo quadrata diagonalium aequalia sunt quadratis laterum simul, seu dupla sunt quadratorum duorum laterum contiguorum.

Et eo, qui hic traditur, modo (simpliciter tamen pr BD^q in subsidium vocata II. 13. nec indicata lateris AB, i quod perpendicula deducuntur determinatione, quae demum ad quaecunque triangula iuxta Obs. 1. b. extensa proposition II. 13. superflua fit) propositum de parallelogrammis demonstrant Lagny (sur une proposition de géometrie élémentaire Mém. de l'Ac. des Sc. de Paris. Ann. 1707. Amst. p. 412 sq.) Baermannus p. 55.

15) Idem Gregorius a S. Vincentio p. 33.; Viviani de locis solidis L. III. p. 110. sq.; Gilbert. p. 313. inferunt e propositione demonstrata nr. 8. Nempe cum diagonales parallelogrammi ABCD se mutuo bifariam secent (I. 34. Cor. 1.) sunt $AB^q + BC^q = 2GB^q + 2GA^q$

$CD^q + DA^q = 2GD^q + 2GA^q$ (nr. 8.)

$= 2GB^q + 2GA^q$.

Quare $AB^q + BC^q + CD^q + DA^q = 4GB^q + 4GA^q = BD^q + AC^q$ (II. 4. Cor. 2.).

16) Vicissim propositum de triangulis ex propositione nr. 14. de parallelogrammis demonstrata potest deduci. Trianguli enim cuiuscunque ABD (Fig. 192. 193.) basi BD bifariam in puncto G secta: tum ab trianguli vertice A ad punctum G ducta AG recta, eaque continuata, donec sit GC = GA, et ab extremis B, D basis ad punctum C ductis BC, DC rectis: ob GB = GD, GA = GC (Constr.) et angulum AGB = CGD (I. 15.); sunt (I. 4.) AB = CD, et angulus CAB = ACD, igitur rectae AB, CD parallelae (I. 27.), et aequales (Dem.). Proinde (I. 33.) quadrilaterum ABCD est parallelogrammum. Cf. I. 34. Cor. 8. Et hinc 2(AB q + AD q) = AC q + BD q (nr. 14.) = 4AG q + 4GB q (Constr. et II. 4. Cor. 2.) ideoque AB q + AD q = 2AG q + 2GB q.

17) Cum parallelogrammi utraque diagonalis alteram secet bifariam (I. 34. Cor. 1.) et vicissim quadrilaterum, cuius ambae diagonales se mutuo bifariam secant, sit parallelogrammum (nr. 16. vel I. 34. Cor. 8.); sequitur: quadrilateri non parallelogrammi, seu trapezii ambas diagonales se mutuo bifariam non secare.

1. Bifariam in E secet (Fig. 194. 195.) trapezii ABCD diagonalis BD ipsa, vel producta, alteram AC; ipsa autem BD bifariam secta sit in puncto F. Erunt:

$$\left.\begin{array}{l} AB\,q + BC\,q = 2AE\,q + 2BE\,q \\ CD\,q + DA\,q = 2AE\,q + 2DE\,q \end{array}\right\} \text{(nr. 8. sq. 15.)}$$

igitur $AB\,q + BC\,q + CD\,q + DA\,q = 4AE\,q + 2BE\,q + 2DE\,q$,

Sed $BE\,q + DE\,q \qquad 2DF\,q + 2EF\,q$ (II, 9. 10.).

Quare $AB\,q + BC\,q + CD\,q + DA\,q = 4AE\,q + 4DF\,q + 4EF\,q$

$= AC\,q + BD\,q + 4EF\,q$ (II. 4. Cor. 2.).

2. Neutra trapezii ABCD diagonalis (Fig. 196. 197.) ipsa, vel producta alteram secet bifariam; seu ab puncto, in quo diagonales AC, BD se mutuo secant, diversa sint puncta E, F, quibus bifariam secantur ipsae AC, BD; rectae igitur BE, DE triangulum constituant super diagonali BD, intra quod cadit EF recta. Tum rursus

$$AB^q + BC^q = 2AE^q + BE^q$$
$$CD^q + DA^q = 2AE^q + 2DE^q \quad \text{(nr. 8. sq. 15.).}$$

Quare $AB^q + BC^q + CD^q + DA^q = 4AE^q + 2(BE^q + DE^q)$.

Sed pariter $BE^q + DE^q = 2BF^q + 2EF^q$ (nr. 8. sq. 15.)

Etiamnunc itaque $AB^q + BC^q + CD^q + DA^q$

$$= 4AE^q + 4BF^q + 4EF^q$$
$$= AC^q + BD^q + 4EF^q \quad \text{(II. 4. Cor. 2.).}$$

In quovis igitur trapezio, seu quadrilatero non parallelogrammo quadrata laterum simul aequalia sunt quadratis diagonalium et quadruplo quadrato rectae interceptae punctis, quibus diagonales bifariam secantur.

18) Theorema hoc, quod singularem proprietatem omnium quadrilaterorum notatu maxime dignam complecti iure praedicat, et nusquam adhuc neque prolatum, neque demonstratum esse profitetur Leonh. Eulerus in dissertatione inscripta: Variae demonstrationes geometricae ac Novis Comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. I. ad annum 1747. et 1748. (Petrop. 1750.) inserta, ipse (§. 25. sqq. p. 63. sqq.) ab parallelogrammorum proprietate nr. 14. sq. ostensa sic fere deducit: circa trapezii ABCD (Fig. 198.) latera contigua AB et AD, BC et CD compleantur parallelogramma ABKD, BCDL, et praeter trapezii ac parallelogrammorum diagonales AC, BD, AK, CL, ducantur rectae AL, CK. Ita erunt anguli CDB = DBL, KDB = DBA (I. 29.). Quare (I. 4.) CK = AL, et angulus CKD = LAB. Sed et angulus DKA = BAK (I. 29.). Igitur angulus CKA = LAK, ideoque (I. 27.) CK, AL sunt parallelae. Quare, cum et aequales sint (Demonstr.) ALKC pariter est parallelogrammum (I. 33.). Igitur

$$2(BC^q + CD^q) = BD^q + CL^q$$
$$CL^q + AK^q = 2(AC^q = CK^q) \quad \text{(nr. 14. sq.).}$$

Unde $2(BC^q + CD^q) + AK^q = BD^q + 2(AC^q + CK^q)$.

Sed et $2(AB^q + AD^q) = BD^q + AK^q$ (nr. 14. sq.).

Ergo $2(AB^q + AD^q) + 2(BC^q + CD^q) = 2BD^q + 2(AC^q + CK^q)$.

$$AB^q + BC^q + CD^q + DA^q = BD^q + AC^q + CK^q$$

h. e. summa quadratorum laterum trapezii excedit summam quadratorum diagonalium eius quadrato rectae CK, qua tra-

pezii ABCD et parallelogrammi ABKD tria puncta D, A, B communia habentium, puncta diversa C, K iunguntur, atque ut ait Eulerus (§. 26. p. 65.) discrimen trapezii a parallelogrammo exponitur.

Porro per punctum F, in quo parallelogrammi ABKD diagonales AK, BD se mutuo secant, idque bifariam (I. 34. Cor. 1.), per quod proinde etiam transit altera parallelogrammi BCDL diagonalis CL (I. 34. Cor. 1.) rectis AC, CK parallelae agantur FM, FE, itaque describatur parallelogrammum FMCE, cuius latera EC=FM, EF=CM (I. 34.). Cum, ob AF=FK (I. 34. Cor. 1.) et angulos FAE=KFM, AFE=FKM (I. 29.), etiam sint (I. 26.) AE=FM, EF=MK: erunt AE=EC (h. e. AC bifariam in E secabitur) et CM=MK=EF, adeoque CK=2EF CK q=4EF q (II. 4. Cor. 2.) et AB q +BC q+CD q+AD q=BD q+AC q+4EF q.

Eiusdem propositionis, ab Eulero sine subiuncta demonstratione cum ipso communicatae demonstrationem analytico trigonometricam eodem in T. Commentar. Petrop. p. 131. sq. dedit Kraftius. Demonstrationem Euleri etiam exponunt Wucherer. Einige geometr. Saetze. Progr. 1780. §. 30. ff. Kleine Schriften Carlsruhe 1799. S. 133. f. ac Gilbert. p. 314. sq.

19) In quadrilateris igitur summa quadratorum laterum vel adaequat (nempe in parallelogrammis nr. 14. sq.) vel excedit (nimirum in non parallelogrammis nr. 17. sq.) summam quadratorum diagonalium: nunquam ea est minor; seu nullum exhiberi potest quadrilaterum, in quo summa quadratorum laterum minor sit, quam summa quadratorum diagonalium (Euler. l. c. p. 65.).

20) In trapezio, cuius duo latera opposita sunt parallela, latera haec inaequalia sunt (Append. ad I. 34. nr. 3.) et neutra diagonalis alteram secat bifariam (Append. ad I. 34. nr. 5.). At, quae in trapezio, cuius duo latera parallela sunt, iisdem lateribus per punctum bisectionis unius diagonalis parallela agitur recta, bifariam quoque secat alteram diagonalem (Append. ad I. 34. nr. 6.); ipsaque recta, punctis, quibus

diagonales bifariam secantur, intercepta, est semidifferentia laterum parallelorum trapezii (Append ad I. 34. nr. 7.): unde consequitur, in trapezio, cuius latera sunt parallela, quadrata laterum simul aequalia esse quadratis diagonalium, et quadrato differentiae laterum parallelorum. Sint enim (Fig. 199.) in trapezio ABCD parallela latera AB, CD, et AB>CD. Bifariam in E secetur altera eius diagonalis AC et per punctum E agatur lateribus AB, CD parallela EF, diagonalem BD secans in puncto F, eritque $EF=\frac{AB-CD}{2}$ (Append. ad I. 34. nr. 7.), ideoque $2EF=AB-CD$, $4EF^q=(AB-CD)^q$ (II. 4. Cor. 2.); itaque (nr. 18. sq.) $AB^q+BC^q+CD^q+DA^q=AC^q+BD^q+(AB-CD)^q$.

21) Ob $AB^q+CD^q=2AB\times CD+(AB-CD)^q$ (II. 7.)

porro fit $BC^q+DA^q+2AB\times CD+(AB-CD)^q$

$=AC^q+BD^q+(AB-CD)^q$ (nr. 20.)

vel $BC^q+DA^q+2AB\times CD=AC^q+BD^q$,

h. e. in trapezio, cuius duo latera sunt parallela, quadrata diagonalium simul aequalia sunt quadratis laterum nonparallelorum, et duplo sub lateribus parallelis rectangulo.

22) Trapezii ABCD (Fig. 200.) latera AB, CD sint parallela, atque altera duo AD, BC sint aequalia: et sit AB>CD. Per C ducta lateri AD parallela CN; sunt (I. 34.) $AN=CD$, $CN=AD=CB$. Itaque angulus $CBN=CNB$ (I. 5.) $=DAB$ (I. 29.). Et hinc ob $BC=AD$, $AB=AB$, est $AC=BD$ (I. 4.): et $2AC^q=2BC^q+2AB\times CD$ (nr. 21.) vel $AC^q=BC^q+AB\times CD$. Trapezii igitur, cuius duo latera sunt parallela, et altera duo aequalia, diagonales invicem sunt aequales, et cuiuslibet diagonalis quadratum aequale est rectangulo sub lateribus parallelis trapezii et quadrato unius laterum nonparallelorum simul. Caeterum ob triangulum BNC isosceles, et $AN=CD$ (Demonstr.) immediate etiam ex parte posteriori propositionis 10. consequitur, esse

$$AC^q=BC^q+2CD\times AB.$$

23) Pariter propositum nr. 21. potest ad partem posteriorem nr. 11. reduci. In trapezio enim ABCD (Fig. 201.) cu-

ius latera AB, CD sunt parallela, et AB > CD, per punctum C ducta CN lateri AD parallela: fit ANCD parallelogrammum, cuius igitur latera AN = CD, CN = AD (I. 34.), ac diagonales AC, DN se mutuo bifariam secant in L (I. 34. Cor. 1.). Per punctum L agatur alteri trapezii ABCD diagonali BD parallela LG, et per punctum G, ubi haec lateri AB occurrit, recta GI parallela rectae DN. Erunt (I. 34.) GL = DI, GI = DL. Quare ob DL = NL (Dem.), etiam GI = NL. Praeterea sunt anguli IGB = LNG, IBG = LGN (I. 29.), ideoque (I. 26.) BG = GN, BI = GL. Sed et DI = GL (Dem.). Ergo BD = 2GL. Trianguli igitur BNC basin BN bifariam dividit punctum G: et ad basis huius BN productae punctum A ab trianguli vertice C ducta est AC recta, quae pariter bifariam dividitur puncto L: proinde est (nr. 11.) $AC^q + 4GL^q = BC^q + CN^q + 2NA \times AB$.

Sed et 2GL = BD, CN = DA, NA = CD (Dem.). Ergo

$$AC^q + BD^q = BC^q + DA^q + 2CD \times AB.$$

24) Quae nr. 17. 18. de trapeziis dicta sunt, possunt sequentem in modum ad figuras rectilineas plurium laterum adplicari. Sit v. c. (Fig. 202.) ABCDEFGH figura rectilinea octo lateribus comprehensa, in qua ducantur primo a quovis angulo figurae diagonales ad angulum qui secundus ab ipso est, nempe AC, BD, CE, DF etc. (has diagonales primi ordinis vocabimus); pariterque ducantur a quovis angulo figurae diagonales ad tangulum, qui tertius ab ipso est, nempe AD, BE, CF, DG etc. (quas diagonales secundi ordinis vocabimus), et efficient singulae hae diagonales secundi ordinis cum ternis lateribus figurae propositae trapezia, quorum diagonales eaedem erunt, ac diagonales figurae, quas primi ordinis diximus. Quodsi igitur singulae hae diagonales primi ordinis bisecentur in punctis a, b, c, d etc. et iungantur ab, bc, cd, de etc.

erit ex nr. 17. 18. in trapezio ABCD

$$AB^q + BC^q + CD^q + DA^q = AC^q + BD^q + 4bc^q.$$

Pariter in trapezio BCDE erit

$$BC^q + CD^q + DE^q + EB^q = BD^q + CE^q + 4cd^q$$

in trapezio CDEF

$$CD^q + DE^q + EF^q + FC^q = CE^q + DF^q + 4de^q$$

in trapezio DEFG

$$DE^q + EF^q + FG^q + GD^q = DF^q + EG^q + 4ef^q$$

in trapezio EFGH

$$EF^q + FG^q + GH^q + HE^q = EG^q + FH^q + 4fg^q$$

in trapezio FGHA

$$FG^q + GH^q + HA^q + AF^q = FH^q + GA^q + 4gh^q$$

in trapezio GHAB

$$GH^q + HA^q + AB^q + BG^q = GA^q + HB^q + 4ha^q$$

denique in trapezio HABC

$$HA^q + AB^q + BC^q + CH^q = HB^q + AC^q + 4ab^q$$

Quodsi itaque omnia in unam summam colligamus, erit

$$3(AB^q + BC^q + CD^q + DE^q + EF^q + FG^q + GH^q + HA^q)$$
$$+ AD^q + BE^q + CF^q + DG^q + EH^q + FA^q + GB^q + HC^q$$
$$= 2(AC^q + BD^q + CE^q + DF^q + EG^q + FH^q + GA^q + HB^q)$$
$$+ 4(ab^q + bc^q + cd^q + de^q + ef^q + fg^q + gh^q + ha^q)$$

i. e. erit triplex summa quadratorum laterum figurae, si ei addas summam quadratorum diagonalium secundi ordinis, aequalis duplici summae quadratorum diagonalium primi ordinis, si ei adiicias quadruplicem summam quadratorum earum rectarum, quae puncta proxima bisectionis diagonalium primi ordinis coniungunt. Et facile patet, etiam in figuris plurium laterum, quotcunque ea fuerint, eandem valere demonstrationem. Caeterum, quum diagonales secundi ordinis primum in Pentagonis locum habeant (in quibus ipsis tamen coincidunt cum diagonalibus primi ordinis) etiam hoc propositum, saltim si verba sensu proprio ac solito sumantur, incipiendo tantum a Pentagonis valebit, sensu tamen improprio illud etiam ad ipsa trapezia, quin ad triangula adeo adplicare possis, dum nempe in illis pro diagonalibus secundi ordinis ipsa trapezii ABCD latera sumas, diagonales primi ordinis autem *quatuor* nempe AC, BD, CA, DB in computum ducas, pariterque rectas, quae earum bisectionis puncta iungunt (quarum proprie una tantum est) quatuor (unam nempe quater repetitam a prima diagonali ad secundam, a secunda ad tertiam,

a tertia ad quartam, et a quarta denuo ad primam) numeres; in trianguli autem diagonales secundi ordinis nullae sunt, diagonales primi ordinis autem cum lateribus trianguli coincidunt.

25) Quodsi polygonum sit regulare v. c. octogonum regulare (Fig. 203.), erunt non tantum omnia latera polygoni inter se aequalia, verum etiam omnes diagonales primi ordinis, ut facile ex I. 4. patet, pariterque omnes diagonales secundi ordinis, et omnes rectae, quae duo proxima puncta bisectionis diagonalium primi ordinis coniungunt. Quare tum in omnibus polygonis $3AB^q + AD^q = 2AC^q + 4ab^q$.

26) Hoc casu, si nempe polygonum sit regulare, AD, diagonalis secundi ordinis aequalis est $AB + 2ab$ nempe lateri polygoni et duplo rectae, quae duo proxima puncta bisectionis diagonalium primi ordinis coniungit. Quum enim (I. 4.) triangula ABH, BAC, CBD etc. sint aequalia, et nominatim sit $HB = AC = BD$ etc. et $ABH = CBD = CDB$ etc. erit triang. $HAC = HBC$ (I. 8.) et nominatim $AHC = BCH$. Quum vero etiam $HAB = ABC$ (Hyp.), erit $AHC + HAB = BCH + ABC$, adeoque, quum omnes anguli quadrilateri $ABHC$ sint quatuor rectis aequales (I. 32. Cor. 12.) erunt $AHC + HAB$ aequales duobus rectis, adeoque AB et HC parallelae (I. 29.): eodemque modo ostenditur, esse BC, AD parallelas. Et, quum in trapezio $ABCD$ recta bc bisecet (Hyp.) utramque diagonalem AC, BD, erit $bc = \frac{AD - BC}{2}$ (nr. 7. Append. ad I. 34.), vel $2bc = AD - BC$, vel $AD = BC + 2bc = AB + 2ab$.

27) Quum nr. 25. sit $3AB^q + AD^q = 2.AC^q + 4ab^q$, et $AD = AB + 2ab$ adeoque $AD^q = AB^q + 4AB.ab + 4ab^q$ (II. 4.) erit $4AB^q + 4AB.ab + 4ab^q = 2AC^q + 4ab^q$, vel $4AB^q + 4AB \times ab = 2AC^q$, vel $2AB^q + 2AB \times ab = AC^q$ vel $AB^q + 2AB \times ab = AC^q - AB^q$, vel $AB \times (AB + 2ab) = AC^q - AB^q$, vel $AB \times AD = AC^q - AB^q$. In polygono regulari quocunque igitur rectangulum contentum inter latus polygoni et diagonalem secundi ordinis aequale erit excessui, quo quadratum diagonalis primi ordinis superat quadratum lateris polygoni.

Caeterum ea, quae nr. 25—27. de polygono regulari diximus, etiam in quovis trapezio $ABCD$ locum habent, cuius tria latera AB, BC, CD aequalia sunt, et quod etiam diagonales AC, BD aequales habet. In eo quippe semper AD, BC parallelae erunt (I. 29.), quum in triangulis aequalibus (I. 8.) ABC, BCD, anguli ABC, BCD, pariterque in triangulis aequalibus (I. 8.) BAD, CDA anguli BAD, CDA sint aequales, adeoque $ABC+BAD=BCD+CDA=2$ rectis (I. 32. Cor. 12.). Unde ex nr. 22. erit $3AB^q+AD^q=2AC^q+(AD-BC)^q$, vel (nr. 7. Append. ad I. 34.) $3AB^q+AD^q=2AC^q+4ab^q$, unde consequitur, ut supra, esse $AB\times AD=AC^q-AB^q$.

28) Quae nr. 24. de relatione mutua quadratorum laterum figurae alicuius, et quadratorum diagonalium primi et secundi ordinis dicta sunt, porro in poligonis, quorum numerus laterum maior est, generalius adhuc exprimi possunt, in computum vocatis etiam quadratis diagonalium tertii, quarti et aliorum superiorum ordinum. Et, si quis tentare, et loco trapeziorum $ABCD$, $BCDE$ etc. (Fig. 202.) iam pentagona $ABCDE$, $BCDEF$ etc. considerare, et ad haec dicta nr. 24. adplicare velit, facile regulam generalem analogam ei, quam nr. 24. habuimus, satis simplicem locum habere, deprehendet. Nos tamen haec talia, quamvis haud infructuosa esse videantur, quum elementorum fines excedere fere videantur, aut certe, ne nimis longi simus, consulto praetermittimus.

EXCURSUS IV.

AD

ELEMENTORUM

III. 16.

Diximus ad III. 16. tertiam eius partem in textu graeco affirmare, angulum semicirculi (i. e. ut volunt, angulum, quem circumferentia circuli cum diametro efficiat) maiorem esse quovis angulo acuto rectilineo; angulum contra, quem circumferentia cum recta, diametro in puncto eius extremo ad angulos rectos ducta efficiat (quem angulum contingentiae vel contactus vocant) minorem esse quovis angulo acuto rectilineo.

Iam super hac tertia Prop. III. 16. parte magnae apud nonnullos Euclidis interpretes lites ortae sunt, quarum brevem commemorationem, quamvis non admodum magni momenti esse videantur, noluimus tamen hoc loco praetermittere. Et constat, praecipuos huius disceptationis coryphaeos Peletarium fuisse ac Clavium, quorum illo quidem primus in editis ab ipso Euclidis Elementis monuit, angulum illum contactus quem vocant, re vera non esse angulum, nec omnino quantitatem. Namque ita saltim geometriam sibi ipsi constare, et multa paradoxa, et sibi ipsis repugnantia, quae e contraria opinione nascerentur, declinari posse putavit. Paradoxa autem illa, quorum partem iam Campanus, Cardanus, aliique observaverant, erant fere eiusmodi:

1) Euclidem docere X. 1.: si a maiore duarum magnitudinum auferatur maius quam dimidium, et a residuo ma-

ius quam dimidium, et id semper fiat, relinqui tandem magnitudinem, quae minor sit minore duarum, quae primo exhibitae erant, magnitudinum. Atqui, si is, quem circumferentiam cum contingente efficere dicant, angulum, vere pro angulo habere velis, isque ex propositione hac III. 16. minor sit quovis angulo acuto rectilineo, consequens esse, angulum acutum rectilineum, quamvis ei semper plus quam dimidium detrahas, partem tamen relinquere angulo illo contactus maiorem, quod cum X. Prop. 1. conciliari nequeat. Idem fere aliter, ut Cardanus habeat (libro de subtilitate), ita exprimi posse: aliquam quantitatem (angulum contactus) posse continue, atque adeo infinite augeri, alteram autem (angulum aliquem acutum) infinite minui, et tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper fore huius decremento.

2) Si angulus circumferentiae (quem circumferentia cum diametro efficiat) maior sit quovis angulo acuto rectilineo, posse transiri a minori (angulo acuto) ad maius (angulum rectum), vel contra per omnia media, neque tamen transiri per aequale (nempe per angulum aequalem angulo semicirculi), quod Campanus moneat. His aliisque difficultatibus se expedire se posse putat Peletarius, si asserat, angulum illum, quem dicunt, contactus re vera non esse angulum, nec omnino quantitatem; rectam, quae circulum contingat, in puncto contactus potius cum circumferentia coincidere, non ad eam inclinari, quod ipsum tamen ad naturam anguli pertineat, qui in *sectione* consistat, non in *contactu*; angulum autem semicirculi omnino rectum esse, vel recto rectilineo aequalem; circulos autem se contingentes, sive extra, sive intra id fiat, angulum non efficere.

Clavius autem se paradoxa illa, quae e Cardano et Campano afferantur, nec negare nec reformidare testatur, eam vero, quam inter III. Prop. 16. et X. 1. intercedere dicat Peletarius discrepantiam, aut contradictionem potius neminem anxium reddere debere, non enim veram esse illam discrepantiam, Euclidem quippe X. Prop. 1. de quantitatibus tantum *homogeneis* loqui, angulos autem rectilineos non eius-

dem generis esse ac angulum contactus, quamvis etiam hic veri nominis quantitas sit, quod inde pateat, quod et ipse non quidem per lineam rectam, at per arcus maioris circuli in infinitum dividi possit.

Caeterum Euclidem, si angulum contactus nihilum prorsus, et angulum semicirculi angulo recto aequalem esse putasset, non tantopere desudaturum fuisse ut demonstraret, angulum contactus esse minorem quovis angulo acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem.

Haec praecipua fere erant, de quibus Peletarium inter ac Clavium, edita etiam a Peletario Apologia, cui iterum respondit Clavius, variis hinc inde argumentis disputabantur. Quamvis autem postea plerique summi geometrae quoad partem potissimam in Peletarii sententiam abierint, cum quo hodie etiam tantum non omnes faciunt, ut nempe angulum illum contactus non esse veri nominis angulum affirment, negari tamen nequit, post Peletarium demum rem omnem a viris sagacissimis perfecte expositam ac dilucidatam fuisse. Et Vieta quidem (Varior. cap. XIII.) primus fuisse videtur, qui tertiam illam partem propositionis III. 16. spuriam, et a Proclo aliove additam iudicaret, et Peletarii sententiam firmioribus rationibus stabiliret, quas postea adoriri tentavit Iohannes Camillus Gloriosus Neapolitanus (Dec. II. Exercitat. Mathem.). Galilaeus contra in epistola ad Gloriosum missa (Dec. III. Exercitat. Mathem.) dubia Gloriosi refellere satagit, eique adstipulatur etiam Vincentius Viviani. Cf. Carlieri Elementi Piani e Solidi d'Euclide Firenze 1769. P. I. p. 148. Galilaeus maxime angulum illum contactus, quem dicunt, et a circumferentia circuli rectaque contingente effici volunt, non esse veri nominis angulum, quin ne quantitatem quidem, ita potissimum ostendere studet, ut circuli circumferentiam comparet cum perimetro figurae regularis illi inscriptae. Rectam AB (Fig. 281.), quae ad latus CD alicuius polygoni ita applicetur, ut illud non secet, sed cum eo coincidat, nullum certe cum hoc latere angulum efficere sit, quem demum constituat cum latere proxime sequente DE, eandem

autem esse rationem circumferentiae circuli comparatae cum recta eum contingente, quae lateris *CD* cum recta *AB*; angulo hic non locum esse. Et, quod alii obiiciant, posse tamen locum inter circumferentiam circuli rectaeque illum contingentis per arcus maioris circuli in infinitum dividi, nihil ad rem facere. Idem enim obtinere circa perimetros similium poligonorum (Fig. 282.) his circulis inscriptorum *BIOS* . . . *BCDF* . . . quorum latera *BI*, *BC* coincidant, adeoque cum recta *AE* circulos in *B* contingente unum eundemque angulum *IBE*, vel *CBE* efficiant. Nempe in his quoque perimetrum polygoni maioris locum quidem inter contingentem *BE* et perimetrum polygoni minoris interceptum pertransire ac dividere, ipsum autem angulum *IBE* non secare aut dividere. Iam si cogitare velis polygonum laterum numero infinitorum maiori circulo inscriptum, ita ut angulus *CBE* infinite parvus evadat, semper tamen minori circulo polygonum totidem laterum ac in priore polygono sunt, inscriptum cogitari posse, quod habiturum sit angulum *IBE* aequalem angulo *CBE*, nunquam itaque talem angulum dividi a recta *CB*, quodsi autem dividi non possit, non esse quantitatem, si quantitas non sit, non esse veri nominis angulum, sed aequivoce ita dictum. Viviani praeterea illud maxime urget, ex ipsa Euclidis anguli plani definitione (I. 18. Def.), qua dicat, angulum planum esse duarum linearum in plano se tangentium, et *non in directum iacentium* mutuam inclinationem, satis apparere, illi sermonem tantum esse de angulis, qui a lineis rectis efficiantur: in his solis enim evenire posse, ut una alteri in directum iaceat, quoad angulos igitur, quos Proclus L. II. ad Def. 8. aliique curvilineos aut mixtilineos vel corniformes, aut quos alios effingant, prorsus superfluam futuram fuisse Euclidis illam determinationem. Accedere, quod nullibi ille ex professo, ut dicunt, theorema aliquod aut problema de angulis istiusmodi proponat, unde cum Vieta (Oper. Mathem. p. 386.) suspicari licere, fuisse eorum mentionem in libro tertio factam ab alio quodam adsutam. Ab eodem forte etiam mutatam fuisse (I. Def. 8.), quae primum ita habuerit: angulus est

mutua inclinatio duarum rectarum in eodem plano positarum, quae quum in eodem puncto sibi occurrant, non tamen in directum iacent. Si quis vero haec neget, et (I. Def. 8.) Euclideam esse affirmet, circumferentiam tamen circuli, cuius diversae partes aliam aliamque versus rectam contingentem inclinationem habeant, non dici posse certum aliquem angulum cum ea efficere, atque ex his pariter ac ex allatis a Galilaeo rationibus consequi, angulum illum contactus, quem dicant, non esse veri nominis angulum aut quantitatem. Idem fere, quamvis e rationibus paullo diversis dilucide explicatum iistit (nempe diverticulum illud contingentiae, ut vocat, non esse angulum, et circulum efficere cum tangente non unicam sed infinitas inclinationes) Borellius in Euclide restituto. Aliter paullo, ut, ut mihi videtur, minus feliciter rem aggressus erat Tacquet., qui affirmat, nullum angulum esse quantitatem, sed modum tantum quantitatis. Esse enim angulum linearum inclinationem, inclinationem autem non magis esse quantitatem ac curvitatem aut inflexionem et fractionem. Atque ita ille omnes scopulos evitare posse putat, quod (X. 1.), quae de quantitatibus tantum agat, non applicari possit ad non-quantitates. At nescio, an non in alios graviores incidat, dum aequalitatem adeo aut inaequalitatem angulis abiudicandum esse, nec nisi sensu improprio pro similitudine ac dissimilitudine de iis praedicari censet.

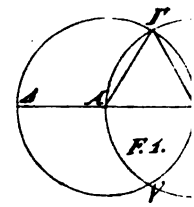
Caeterum eadem fere ac Tacqueti opinio fuisse videtur Gregorii a St. Vincentio, qui in opere suo, Geometr. Quadraturae circuli p. 871. angulos tam rectilineos, quam curvos et mixtos ad quantitatem tantum *spectare*, nec ipsos *esse* quantitatem dixit, sed tantum aliquid ad quantitatem pertinens. Nisi enim hoc sumatur, putat, necessario consequi, omnes angulos contactus a maioribus, minoribusque circulis factos esse aequales, adeoque totum esse aequale parti. Hanc Gregorii opinionem contra Vincentii Leotaud., qui in cyclometria ab ipso edita cum Clavio fere in hac re consentiebat, obiectiones defendere studuit Aynsoom. Expositio ac dilucidatio Geometr. Quadrat. Circuli Gregorii a St. Vincent. 1656

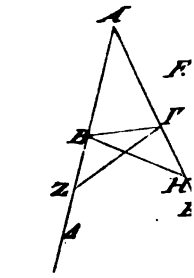
Longe autem copiosissime, et perspicue pariter ac subtiliter in causa hac versatus est Wallisius, in omni Oper. Mathem. Tom. II. 1693. p. 605—661. peculiaris est tractatus de angulo contactus et semicirculi editus ante iam 1656, cum nova, quae 1685, ei accesserat, defensione prelo iam repetitus. Is nempe ante omnia monet, ex Euclidis definitione I. 8. *angulum planum esse mutuam ὀλίσθησιν seu inclinationem duarum rectarum in plano se tangentium, et non in directum positarum* rem diiudicandam esse. Quamvis igitur non requiratur, ut lineae (quod Peletarius voluerat) productae se invicem *secent*, id certe requiri, ut lineae, quae angulum constituunt, mutuo erga se *inclinentur*. Ideo, si quae lineae concurrant, nec tamen inclinentur, quod ipsum fiat, quum circumferentia a recta aliqua contingatur, eas nullum inter se angulum constituere. Angulum praeterea iudicari non nisi ex ea linearum concurrentium inclinatione, quam sortiantur in ipso concursus puncto. Denique verba: (μὴ) ἐπ' εὐθείας κειμένων aliter, ac vulgo sumuntur, explicare studet. Putat nempe, ea significare non lineas tantummodo rectas continuatas, sive duo segmenta contigua eiusdem rectae (sic enim continuatam peripheriam in singulis sui punctis angulum formare dicendam fuisse, quod tamen nec Euclides nec alius quisquam affirmet), sed per *lineas in directum positas* eas intelligi, quae se mutuo continuare dici possint, ut exinde una linea fiat. Et quamvis admodum dubitemus, an haec ultima verborum ἐπ' εὐθείας κειμένων explicatio, quam caeterum iam Clavius ad I. Def. 8. proposuerat, probari, et cum usu loquendi conciliari possit, caetera tamen pleraque, quae Wallisius habet, ita comparata sunt, ut facile omnium assensum extorquere debeant. Nempe angulum, quem contactus vocant, cum Peletario nullum esse statuit, quod recta circulum contingens ad circumferentiam in contactus puncto non inclinetur, sed super ipsam ὀρθογώνιος haeat, vel cum ipsa coincidat, angulum autem semicirculi rectum esse affirmat, et simul Clavio ad ea, quae Peletario opposuerat, et postea Leotaudo quoque respondet. Omnia huc referre longum fuerit. Summa haec

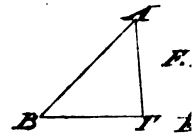
fere redit. Verum quidem esse, nonnisi magnitudines eiusdem generis inter se comparari posse, at angulos curvilineos et mixtilineos (ubi nempe pro directione curvae in puncto contactus semper sumitur recta curvam in hoc puncto contingens) tam inter se, quam cum rectilineis eiusdem generis esse, quod variis modis, maxime quod unus multiplicatus alterum superare possit, demonstrari queat. Itaque necesse esse e rationibus a Peletario allatis angulum contactus pro nullo, angulum autem semicirculi pro angulo recto habere. Multa praeterea ingeniose excogitata ad stabiliendam suam sententiam adiicit. Et sane post ea, quae Peletarius, Galilaei, Viviani et Wallisius, quibus nostra aetate praecipue adhuc accesserunt Karsten. in libro inscripto: Mathem. Abhandl. Halle 1786., ubi p. 396—422. de hac re fusius disputat, et se prorsus cum Wallisio consentire fatetur, et Gilbert: die Geometrie nach le Gendre p. 122. sqq. ad rem diiudicandam contulere, nihil prorsus superesse videtur, de quo ulla ratione ambigi possit. Res omnino eo fere redit. Curvae quaecunque, quum earum partes aliae alio diriguntur, non dici possunt *integrae* certam aliquam directionem, vel constantem erga aliam lineam, nominatim erga rectam aliquam, inclinationem habere. Proprie loquendo igitur non sermo esse potest de angulo, quem curva aliqua integra cum alia curva, aut cum linea recta efficiat, sed tantum de angulo, quem elementa eius in puncto contactus cum illis facturae essent, siquidem eam, quam ibi habent, directionem ulterius prosequi possent. At haec elementorum curvae directio, ut ipsum directionis vocabulum indicat, coincidit cum directione rectae curvam in hoc puncto contingentis i. e. cum ipsa hac recta contingente. Curva igitur, vel potius curvae elementum in ipso contactus puncto cum recta contingente, cum qua in hoc puncto coincidit, nullum angulum efficit, cum ea autem recta, quae ad rectam contingentem perpendicularis est, curva, aut potius curvae elementum contactus puncto proximum etiam ipsum angulum rectum efficere dicendum erit, siquidem angulum appellare velis inclinationem *elementi infinite parvi* ad

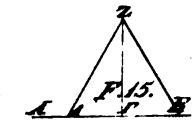
rectam contingenti perpendicularem. Itaque pars tertia III. Prop. 16., ut in Elementis legitur, nihil prorsus continet, quod non etiam in parte secunda contineatur, et poterat illa, sive ab Euclide sit, sive, quod multi, nominatim Rob. Simson. putant, ab alio quodam addita fuerit, egregie omitti, quod etiam factum videmus tum ab antiquioribus, tum a recentioribus nonnullis, nominatim a Giordano da Bitonto, Borellio, Coëtsio, Playfairo, Roberto Simson, et nobis fortasse excusatione opus fuerit, quod rei, quae simulac tite evoluta fuerit, nihil difficultatis habere potest, tam diu immorati simus: noluimus tamen hanc causam intactam relinquere, vel, quod ad historiam geometriae pertinere videbatur, vel quod, ut monet Karstenius (mathem. Abhandl. p. 106. sqq.) subinde adhuc sunt, qui in sublimioribus quoque Matheseos partibus doctrina de angulo contactus male intellecta abutuntur ad falsas suas de infinite parvi natura notiones tuendas ac fulciendas.

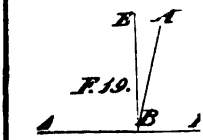
BONNAE,
EX OFFICINA BÜSCHLERIANA
APUD ANTONIUM HACKEBUM.

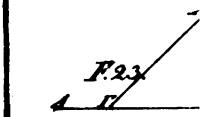

F.1.

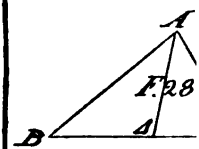


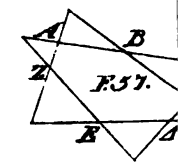


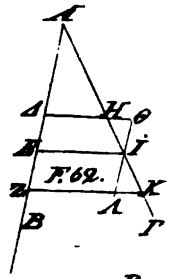

F.15.

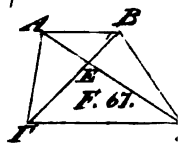

F.19.

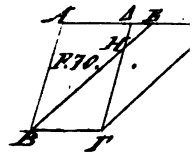

F.23.

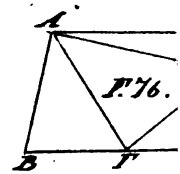

F.28

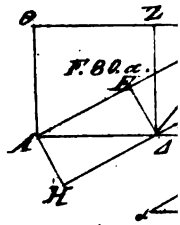

A
B
Z
F.57.
E
Δ

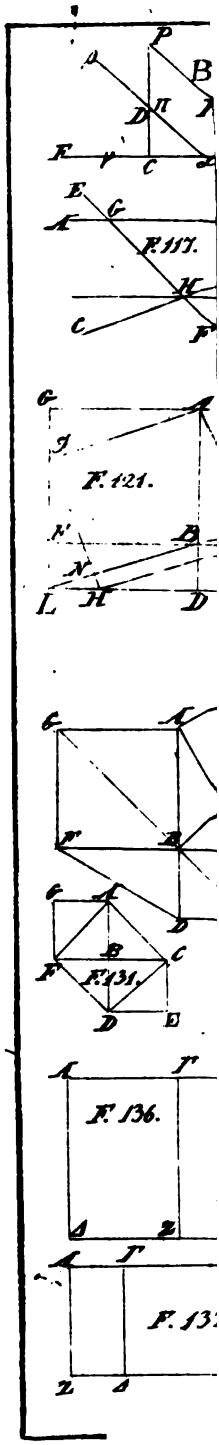

A
Δ
H
Θ
E
I
F.62.
Z
K
Λ
B
Γ


A
B
E
F.67.
Γ


A
Δ
B
H
F.70.
B
Γ

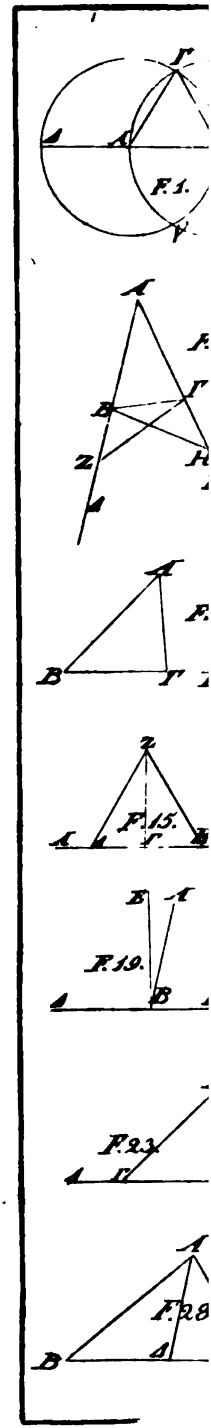

A
F.76.
B
Γ


Θ
Z
F.80.α.
E
A
Δ
H


P
B
D
F
C
E
G
A
F. 117.
H
C
F
G
I
F. 121.
N'
B
N
L
H
D
G
A
F
B
G
A
D
B
C
F
F. 131.
D
E
A
T
F. 136.
Δ
Z
A
T
F. 13
Z
Δ

rectam contingenti perpendicularem. Itaque pars tertia III. Prop. 16., ut in Elementis legitur, nihil prorsus continet, quod non etiam in parte secunda continetur, et poterat illa, sive ab Euclide sit, sive, quod multi, nominatim Rob. Simson. putant, ab alio quodam addita fuerit, egregie omitti, quod etiam factum videmus tum ab antiquioribus, tum a recentioribus nonnullis, nominatim a Giordano da Bitonto, Borellio, Coëtsio, Playfairo, Roberto Simson, et nobis fortasse excusatione opus fuerit, quod rei, quae simulac rite evoluta fuerit, nihil difficultatis habere potest, tam diu immorati simus: noluimus tamen hanc causam intactam relinquere, vel, quod ad historiam geometriae pertinere videbatur, vel quod, ut monet Karstenius (mathem. Abhandl. p. 108. sqq.) subinde adhuc sunt, qui in sublimioribus quoque Matheseos partibus doctrina de angulo contactus male intellecta abutuntur ad falsas suas de infinite parvi natura notiones tuendas ac fulciendas.

BONNAE,
EX OFFICINA BÜSCHLERIANA
APUD ANTONIUM HACKERUM.


F.1.
F.15.
F.19.
F.23.
F.28

EUCLIDIS

ELEMENTA

GRAECE ET LATINE.

COMMENTARIIS INSTRUCTA

EDIDERUNT

IOANNES GUILELMUS CAMERER

ET

CAROLUS FRIDERICUS HAUBER.

BEROLINI
SUMTIBUS G. REIMERI
MDCCCXXV.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBRI SEX PRIORES

GRAECE ET LATINE

COMMENTARIO E SCRIPTIS VETERUM AC RECENTIORUM MATHEMATICORUM ET PFLEIDERERI MAXIME ILLUSTRATI.

EDIDIT

IOANNES GUILELMUS CAMERER

GYMNASII STUTTGARDIANI RECTOR.

TOM. II. COMPLECTENS LIBR. IV—VI.

CUM VI. TABULIS.

BEROLINI

SUMTIBUS G. REIMERI

MDCCCXXV.

QA
31
.E88
S72
C2

Hist of sci
Bangalore
3-8-29
18679

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBRI SEX PRIORES.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

ΟΡΟΙ.

α΄. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

β΄. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

γ΄. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅτάν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ΄. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας [1].

ε΄. Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται [2].

1) Ita rectius omnino cum Cod. a. legit Peyrardus. Priores editiones habebant: ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

2) Si vera sunt, quae e Rob. Simson. ad III. Def. 2. notavimus, hic legendum fuerit ἐφάπτηται.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

1. Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptae figurae angulus tangit unumquodque latus eius, in qua inscribitur.

2. Figura autem similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptae tangit unumquemque angulum eius, circa quam circumscribitur.

3. Figura vero rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque angulus circumscriptae tangit circuli circumferentiam.

4. Figura autem rectilinea circa circulum circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptae contingit circuli circumferentiam.

5. Circulus vero in figura similiter dicitur inscribi, quando circuli circumferentia unumquodque latus eius, in qua inscribitur contingit.

DEFIN.

Obs. Campanus habet tantum duas primas huius libri definitiones. At illae ipsae nusquam adhibentur. Hinc du-

ε'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, οταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμετρου ἡ Δ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλοῦ διάμετρος ἡ ΒΓ. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ

bium videri possit, annon serius adiectae fuerint ad analogiam sequentium.

PROPOSITIO I.

Obs. Quum punctum Γ in circumferentia pro lubitu sumi queat, patet, innumeris modis problema solvi posse, nisi nova adhuc determinatio accedat. Eiusmodi determinatio ea esse potest, si punctum Γ datum esse sumere velis. Verum, etiam hoc sumto, duplex tamen, quod et Commandinus monuit, solutio locum habebit: aeque enim ducta recta ΓΖ ad punctum Ζ, in quo circuli iterum sibi occurrunt, problemati satisfaciet, ac recta ΓΑ. Alia determinatio haec esse poterit, ut recta circulo inscribenda vel ipsa, vel producta, per datum punctum transeat, quod non sit in circuli circumferentia; vel ut illa parallela sit rectae positione datae. Et,

6. Circulus autem circa figuram circumscribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ipsius, circa quam circumscribitur, tangit.

7. Recta in circulo aptari dicitur, quando termini eius in circumferentia sunt circuli.

PROPOSITIO I. (Fig. 283.)

In dato circulo datae rectae, quae non maior sit diametro circuli, aequalem rectam aptare.

Sit datus circulus $ABΓ$, data autem recta $Δ$ non maior circuli diametro, oportet igitur in circulo $ABΓ$ rectae $Δ$ aequalem rectam aptare.

Ducatur circuli $ABΓ$ diameter $BΓ$. Si quidem igitur $BΓ$ aequalis est $Δ$, factum erit propositum. Aptata est enim in circulo $ABΓ$, $BΓ$ rectae $Δ$ ae-

si quidem illud postuletur, ut recta circulo dato inscribenda per datum punctum transeat, problema unum ex iis est, quae Pappo testante in Praefat. ad libr. VII. Collect. Math. Apollonius in libris περὶ νεύσεων tractavit. (Cf. Apollonii Pergaei Inclinat. Libri duo ed. Horsley Oxon. 1770. et: Die Bücher des Apollonius von Perga de Inclinationibus von Diesterweg Berlin. 1823.). Et particulare illud problema facile solvetur sequentem in modum.

Anal. Puta factum, et Fig. 284. recta AB, quae aequalis sit rectae datae $Δ$ diametro non maiori, inscripta sit circulo dato ABZ, eaque ipsa aut producta per datum punctum $Γ$ transeat, quod non sit in circuli dati circumferentia. Et 1) quidem, si recta data sit aequalis diametro circuli, recta circulo inscribenda erit diameter per datum punctum ducta. Si autem non fuerit diameter, erit ex hyp. minor diametro,

Δ εὐθεῖα ἴση ἡ ΒΓ. Εἰ δὲ οὐ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, καὶ κείσθω [1]) τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. Ἀλλὰ τῇ Δ ἡ ΓΕ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ [2]), μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴση ἐνήρμοσται ἡ ΓΑ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

1) Peyrardus cum Cod. a legit: εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείσθω. Nos restituimus lectionem ed. Oxon.

2) Peyrardus cum Cod. a. omittit verba μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου et eorum loco ponit τῇ Δ: nos ista verba, quae necessariam omnino determinationem continent, restituimus.

adeoque extra centrum E transibit (III. 15.). Demissa igitur in eam e centro perpendicularis $E\Theta$ eam bisecabit (III. 3.), adeoque, ob datam AB, data erit dimidia $A\Theta$, adeoque data erit, vel inveniri poterit in triangulo ad Θ rectangulo $A\Theta E$, in quo etiam EA datur, recta $E\Theta$ (I. 47. Cor. 20.) vel distantia, qua recta AB a centro E abest, vel, ut aliter dicamus, notum erit, in qua distantia a centro E situm esse debeat punctum Θ, nempe in circulo centro E, radio $E\Theta$ descripto. (Quod ipsum brevius e III. 15. Cor. derivari poterat.). Qui circulus si describatur, continget eum recta AB

qualis. Sin minus, maior est $B\Gamma$ ipsa Δ, et ponatur ipsi Δ aequalis ΓE (I. 3.), et centro Γ, intervallo vero ΓE, circulus describatur AEZ (Post. 3.), et iungatur ΓA.

Quoniam igitur punctum Γ centrum est circuli AEZ, aequalis est ΓA ipsi ΓE. Sed ΓE ipsi Δ est aequalis; et Δ igitur ipsi ΓA est aequalis.

In dato igitur circulo $AB\Gamma$, datae rectae, quae non maior est diametro circuli, aequalis aptata est ΓA. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO II. (Fig. 285.)

In dato circulo inscribere triangulum aequiangulum dato triangulo.

Sit datus circulus $AB\Gamma$, datum vero triangulum ΔEZ; oportet in circulo $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ aequiangulum triangulum inscribere.

in Θ (III. 16.), adeoque tota extra eum posita erit. Unde, ut recta AB transire posit per punctum datum Γ, necesse est, ut punctum Γ non sit intra circulum centro E, radio $E\Theta$, descriptum. Quodsi non fuerit, problema reductum est ad hoc: e puncto dato Γ, quod non sit intra circulum datum, ducere ad hunc circulum rectam, quae eum contingat, i. e. ad III. 17.

Compositio problematis itaque huc redit. Si recta data Δ aequalis sit diametro circuli dati, ducatur per punctum datum Γ diameter circuli. (Punctum nempe Γ a centro E diversum esse sumitur, quodsi non foret, quaevis diameter problemati satisfaceret.). Sin autem recta data minor sit diametro circuli dati, sumatur in circumferentia circuli punctum quodcunque H, et ex IV. 1. circulo inscribatur recta $HK=\Delta$, et, demisso in HK perpendiculo EI, centro E, radio EI, describatur circulus. Quodsi iam punctum datum Γ sit intra hunc circu-

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ κατὰ τὰ Α, καὶ συνεστάτω πρὸς μὲν τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ πρὸς δὲ τῇ ΗΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΖΔΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΑ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον.

lum, problema solvi nequit. Si autem HK transeat per punctum Γ, factum erit, quod petebatur. Sin minus ex puncto Γ ducatur recta $A\Gamma B$ circulum interiorem contingens (III. 17. vel III. 16. Cor.) eritque illa $=HK$ (Obs. 4. ad III. 18.) $=\Delta$. Et patet ex III. 17. duas semper solutiones locum habere, excepto eo casu, quo punctum Γ est in circumferentia circuli interioris, qui non nisi unam solutionem admittit. Notari meretur, ad facillimum hoc et simplicissimum problema facile reduci posse alia magis composita v. c. problema, circulo dato inscribendi triangulum, cuius duo latera parallela sint duabus rectis positione datis, et cuius tertium latus transeat per datum punctum, vel generalius problema circulo dato inscribendi Polygonum quodcunque, quod imparem laterum numerum habeat, ita, ut eius latera omnia, uno excepto, sint parallela rectis positione datis, reliquum autem latus transeat per punctum datum, vel etiam, ut omni polygoni

Ducatur recta $H\Theta$ contingens circulum $AB\Gamma$ in A (III. 17.), et constituatur ad rectam $\Delta\Theta$ et ad punctum in ea angulo ΔEZ aequalis $\Theta A\Gamma$ (I. 23.); rursus, ad rectam HA et ad punctum in ea A angulo $Z\Delta E$ aequalis HAB, et iungatur $B\Gamma$.

Quoniam igitur circulum $AB\Gamma$ contingit aliqua recta ΘA, a contactu autem ad A in circulo ducta est recta $A\Gamma$, angulus $\Theta A\Gamma$ aequalis est angulo $AB\Gamma$ in alterno circuli segmento (III. 32.). Sed angulus $\Theta A\Gamma$ ipsi ΔEZ est aequalis; angulus igitur $AB\Gamma$ ipsi ΔEZ est aequalis. Ex eadem ratione et angulus $A\Gamma B$ ipsi $Z\Delta E$ est aequalis, et reliquus igitur $BA\Gamma$ reliquo $EZ\Delta$ est aequalis (I. 32.). Triangulum igitur $AB\Gamma$ aequiangulum est triangulo ΔEZ, et inscriptum est in circulo $AB\Gamma$.

latera transeant per puncta data, aliaque huius generis plura, quod primum ostendit Annibale Giordano di Ottaiano (Memorie di Fisica e di Math. della Società Italiana T. IV.), et post eum eodem loco Malfatti. Cf. l'Huilier Elémens d'Analyse Géométrique et d'Analyse Algébraique §. 146. sqq. Klügel. Wörterb. T. III. p. 155. Meier. Hirsch. Samml. geom. Aufg. I. Th. §. 150. sqq. Carnot. Géom. de Position. Transeamus iam ad aliud, de quo ante diximus, problema. Inscribenda nempe sit circulo dato recta AB aequalis rectae datae Δ, quae non maior esse ponitur, quam circuli diameter, ita, ut recta AB simul parallela sit rectae positione datae. Praetermisso eo casu, quo recta data Δ aequalis est diametro, ostendetur, ut in problemate praecedente, rectam AB esse contingentem circuli ex eodem centro cum circulo dato descripti: cuius radii quadratum aequale sit differentiae quadrati radii circuli dati, et quadrati dimidiae rectae Δ. Quum itaque

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ κατὰ τὰ Α, Β, Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α, Β, Γ [1]) σημεῖα ἐπιζευγνύμεναί εἰσιν αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ· ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Α,

1) Verba: ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α, Β, Γ, quae cum Cod. a. omittit Peyrardus, ex antiq. ed. restituimus, quod magis determinate exprimunt, rectas *ex centro* ductas esse.

hic circulus eodem ac ante modo describi possit, problema redit ad id, de quo Obs. 5. ad III. 17. diximus. Aliam et faciliorem huius problematis solutionem tradunt Commandinus et ex eo Clavius. Nempe ducta diametro rectae positione datae parallela, abscindantur in ea e centro ex utraque parte segmenta aequalia dimidiae rectae Δ, atque ex horum extremitatibus erigantur ad diametrum perpendicula, quae *inter se* comprehendent segmenta circuli, quorum singulae chordae

In dato igitur circulo triangulum dato triangulo aequiangulum descriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO III. (Fig. 286.)

Circa datum circulum dato triangulo aequiangulum triangulum circumscribere.

Sit datus circulus $AB\Gamma$, datum autem triangulum ΔEZ; oportet circa $AB\Gamma$ circulum triangulo ΔEZ aequiangulum triangulum circumscribere.

Producatur EZ ex utraque parte ad H, Θ puncta, et sumatur centrum K circuli $AB\Gamma$ (III. 1.), et ducatur utcunque recta KB, et constituatur ad KB rectam et ad punctum in ea K angulo ΔEH aequalis BKA, angulo vero $\Delta Z\Theta$ aequalis $BK\Gamma$ (I. 23.) et per puncta A, B, Γ ducantur rectae AAM, MBN, $N\Gamma A$ circulum $AB\Gamma$ contingentes.

Et quoniam contingunt circulum $AB\Gamma$ rectae AM, MN, NA in punctis A, B, Γ, ex centro K autem ad puncta A, B, Γ ductae sunt KA, KB, $K\Gamma$, recti sunt anguli ad puncta A, B, Γ (III. 18.). Et

propositum efficient. Caeterum (ope III. 20.) ad hoc problema facile reducitur illud: circulo dato inscribere triangulum, cuius singula latera parallela sint rectis positione datis, quae omnes se intersecant.

PROPOSITIO II.

Obs. In hoc quoque problemate punctum A in circumferentia pro lubitu sumi, aut datum esse, aut nova aliqua alia conditio accedere potest. Praeterea, etiam si punctum A datum sit, triangulum circulo inscribendum sex diversis modis in circulo poni poterit. Nempe angulus $\Theta A\Gamma$ cuilibet angulorum E, Δ, Z aequalis fieri potest, quo ipso iam tres

B, Γ σημείοις γωνίαι. Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ ΑΜΒΚ, καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΜΑΚ, ΚΒΜ γωνίαι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΑΝΜ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΑΝ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΜΝ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

modi trianguli constituendi efficiuntur. Deinde, cuicunque angulorum *E*, *Δ*, *Z* angulum *ΘΑΓ* aequalem faciae, duo reliqui adhuc anguli locum inter se mutare possunt, quo itaque sex omnino modi prodeunt. Magnitudo tamen laterum trianguli semper eadem est, quamvis variari possit eorum positio. Facile etiam patet, reduci hoc problema posse (ut a Borellio factum est) ad Prop. III. 34. adeoque etiam ad alteram, quae ibi allata est, solutionem, vel eam quoque, quam tum habuimus, conditionem admittere.

Cor. Nominatim itaque circulo dato triangulum aequi-

quoniam quadrilateri *AMBK* quatuor anguli quatuor rectis aequales sunt (I. 32.), quippe in duo triangula dividitur *AMBK*, et sunt recti anguli *MAK*, *KBM*; reliqui igitur *AKB*, *AMB* duobus rectis aequales sunt; sunt autem et *ΔEH*, *ΔEZ* duobus rectis aequales (I. 13.); anguli igitur *AKB*, *AMB* angulis *ΔEH*, *ΔEZ* aequales sunt, quorum *AKB* ipsi *ΔEH* est aequalis; reliquus igitur *AMB* reliquo *ΔEZ* est aequalis. Similiter ostendetur et angulum *ΛNM* ipsi *ΔZE* esse aequalem; et reliquus igitur *MΛN* reliquo *EΔZ* est aequalis. Triangulum igitur *ΛMN* aequiangulum est triangulo *ΔEZ*, et circumscribitur circum *ABΓ* circulum.

Circa datum igitur circulum dato triangulo aequiangulum triangulum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO IV. (Fig. 287.)

In dato triangulo circulum inscribere.

Sit datum triangulum *AΓB*; oportet in triangulo *ABΓ* circulum inscribere.

angulum, adeoque (I. 6.) aequilaterum inscribetur ope I 1. quod ipsum fieri posse in IV. 16. sumitur.

PROPOSITIO III.

Obs. Similes hic observationes locum habent ac in praecedente. Nempe punctum *B* pro lubitu, ὡς ἔτυχε, in circumferentia sumi aut etiam datum esse, aut quacunque alia ratione determinari potest. Deinde etiam determinato puncto *B* sex variis modis trianguli *AMN* situs variari potest, quamvis magnitudo laterum non varietur. Praeterea iure quidem

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δίχα ταῖς ΒΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΒΓ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτὰς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ Δ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ γραφόμενος

observat Austin., demonstrari oportere, contingentes *ΔΜ*, *ΒΝ*, *ΓΛ* inter se convenire, quod facillimum est, ducta v. c. recta *ΑΒ*, quae tum, quum anguli *ΚΑΜ*, *ΚΒΝ* recti sint, summam angulorum *ΜΑΒ*, *ΜΒΑ* duobus rectis minorem efficiet, unde res consequitur ope 11. axiom. vel I. Post. 5., verum eandem demonstrationem iam dederat Tacquet. Denique notandum Peletarium et Borellium aliam adhuc huius problematis solutionem exhibere, in qua, ope praecedentis propositionis primum circulo triangulum dato aequiangulum inscribitur, et deinde ope problem. in Obs. 5. ad III. 17.

Secentur $AB\Gamma$, $A\Gamma B$ anguli bifariam a rectis $B\Delta$, $\Gamma\Delta$ (I. 9.), et conveniant inter se in puncto Δ, et ducantur a Δ ad AB, $B\Gamma$, ΓA rectae perpendiculares ΔE, ΔZ, ΔH (I. 12.).

Et quoniam aequalis est angulus $AB\Delta$ angulo $\Delta B\Gamma$, est autem et rectus $BE\Delta$ recto $BZ\Delta$ aequalis; duo igitur sunt triangula $EB\Delta$, $ZB\Delta$, duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus uni lateri aequale, et utrique commune $B\Delta$, quod uni aequalium angulorum subtenditur; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt (I. 26.); aequalis igitur ΔE ipsi ΔZ. Ex eadem ratione et ΔH ipsi ΔZ est aequalis. Tres igitur rectae ΔE, ΔZ, ΔH aequales inter se sunt; ergo centro Δ, et intervallo una ipsarum ΔE, ΔZ, ΔH circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget AB, $B\Gamma$, ΓA rectas, propterea quod recti sunt ad E, Z, H puncta anguli. Si enim secet ipsas, recta diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta intra ipsum cadet circulum, quod absurdum ostensum est (III. 16.); circulus igitur centro Δ, intervallo autem una ipsarum ΔE, ΔZ, ΔH descriptus non secat rectas AB,

rectae inscripti huius trianguli lateribus parallelae circulum contingentes ducuntur. Caeterum de simili problemate generaliore vide infra ad IV. 7. Obs. 2.

PROPOSITIO IV.

Obs. 1. Analysis huius problematis ita institui potest. Quum centrum circuli esse debeat ex III. 17. Obs. 1. in recta, quae angulum $AB\Gamma$ bifariam dividit, dividat eum bifariam recta $B\Delta$, eritque in $B\Delta$ centrum circuli (vel, ut aliter geometrarum more dicamus, erit recta $B\Delta$ locus centri circuli

κύκλος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Ἐγγεγράφθω ὡς ΖΕΗ [1]).

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ ΕΖΗ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Δ, Ε σημείων ταῖς ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΖΕ· συμπεσοῦνται δὲ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

1) Verba: Ἐγγεγράφθω ὡς ΖΕΗ, quae in edd. Oxon. et Basil. omissa sunt, recte omnino e Cod. a restituit Peyrardus. Pariter certe in Prop. 5. 9. 13. 14. ad finem similia verba adiecta legimus. Eadem tamen ad finem Prop. 8. desunt.

describendi). Eodem modo, quum id centrum esse debeat in recta, quae angulum ΑΓΒ bifariam dividit, dividat eum bifariam recta ΓΔ, eritque in recta ΓΔ centrum circuli. Erit itaque in concursu utriusque rectae. Rectas autem ΒΔ, ΓΔ necessario concurrere, facile patet. Quum enim anguli ΑΒΓ ΑΓΒ simul minores sint duobus rectis (I. 17.), multo magis anguli ΑΒΓ, ΑΓΒ simul (quippe dimidii priorum) minores erunt duobus rectis, adeoque rectae ΒΔ, ΓΔ convenient (Ax. 11. vel I. Post. 5.).

Obs. 2. Cor. 1. Quum etiam rectae ΑΕ, ΑΗ circulum contingant, recta quoque ΑΔ, quae angulum ΒΑΓ bifariam dividit, in eodem puncto Α, centro circuli, convenient (III. 17. Obs. 1.). Itaque tres rectae, quae angulos trianguli alicuius bifariam secant, in eodem intra ipsum puncto conve-

BΓ, *ΓA*; contingit igitur ipsas, et erit circulus descriptus in triangulo *ABΓ* (IV. Def. 5.). Inscribatur ut *ZHE*.

In dato igitur triangulo *ABΓ* circulus inscriptus est *EZH*. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO V. (Fig. 290.)

Circa datum triangulum circulum circumscribere.

Sit datum triangulum *ABΓ*; oportet circa datum triangulum *ABΓ* circulum circumscribere.

Secentur *AB*, *AΓ* rectae bifariam in *Δ*, *E* punctis (I. 10.), et punctis *Δ*, *E* ipsis *AB*, *AΓ* ad rectos angulos ducantur *ΔZ*, *ZE* (I. 11.). Convenient autem vel intra triangulum *ABΓ*, vel in recta *BΓ*, vel extra *BΓ*.

niunt. Et vice versa: Recta, quae ex puncto *Δ*, in quo conveniunt rectae, quae duos angulos *B* et *Γ* trianguli bisecant, *ad tertium* angulum ducitur, hunc quoque bisecat (Obs. 2. ad I. 26. Cas. 5.). Cf. Pfleiderer., e cuius annotationibus *partim* manuscriptis, etiam in hoc libro plura hausimus, Schol. in VI. Elem. P. I. §§. 41. 42. Caeterum ipsam *propositionem* IV. 4. Euclides ex absurdo demonstrat, Rob. Simson. paullo brevius directe. Neque vero cum Matthiae (*Auszug* aus Rob. Simsons Uebersetzung) dixerim, verba ἐὰν γὰρ τεμεῖ αὐτὰς κ. τ. λ. usque ad finem demonstrationis *manifesto otiosum* esse additamentum. Ad *indirectam* demonstrationem omnino necessaria sunt.

Obs. 3. Cor. 2. Et, quae a puncto, in quo tres rectae conveniunt, quae angulos alicuius trianguli bisecant, ad latera *eius* trianguli demittuntur, sunt inter se aequalia.

Obs. 4. Cor. 3. Et, quum sit *AE*=*AH*, et *ΓZ*=*ΓH* (III. 17. Obs. 5.), erit itaque *BZ*+*BE*, vel, quod eodem redit, 2*BE* excessus, quo summa duorum laterum *BA*, *BΓ*

Συμπιπτέτωσαν οὖν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ Ζ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΔ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Περιγραφέσθω ὡς ὁ ΑΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῇ ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ

superat tertium ΑΓ, quo ipso propius determinatur I. 20. Hanc observationem Clavius ad Ioann. Baptistam Benedictum refert.

Obs. 5. Facile patet, eadem ratione solvi problema generalius, quo iubetur circulus describi, qui contingat tres rectas positione datas, quae non omnes tres inter se sunt parallelae. Erunt enim vel a) (Fig. 288.) duae rectarum positione datarum ΑΒ, ΓΔ parallelae, et secabuntur a tertia ΑΓ in punctis Α, Γ, et tum eodem modo ostendetur, si anguli ΓΑΒ, ΑΓΔ bifariam secentur rectis ΓΕ, ΑΕ, has rectas in puncto aliquo Ε convenire, et demissa ex Ε in rectas perpendicula ΕΖ, ΕΘ, ΕΗ esse inter se aequalia, adeoque cir-

Conveniant igitur primum intus in Z, et iungantur ZB, $Z\Gamma$, ZA. Et quoniam $A\Delta$ aequalis est $B\Delta$, communis autem et ad rectos angulos ΔZ; basis igitur AZ basi ZB est aequalis (I. 4.). Similiter ostendemus et rectam ΓZ rectae AZ esse aequalem, quare et ZB aequalis est $Z\Gamma$; tres igitur ZA, ZB, $Z\Gamma$ aequales inter se sunt. Ergo circulus centro Z, intervallo autem una ipsarum ZA, ZB, $Z\Gamma$ descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circulus circumscriptus (IV. Def. 6.) circa $AB\Gamma$ triangulum. Circumscribatur ut $AB\Gamma$.

Sed ΔZ, EZ conveniant in recta $B\Gamma$ in Z, ut in secunda figura, et iungatur AZ. Similiter ostendemus punctum Z centrum esse circuli circa $AB\Gamma$ triangulum circumscripti.

Sed ΔZ, EZ conveniant extra triangulum $AB\Gamma$, rursus in Z, ut in tertia figura, et iungantur AZ, BZ, ΓZ. Et quoniam rursus $A\Delta$ aequalis est ΔB, communis autem et ad rectos angulos ΔZ; basis igi-

culum centro E, radio EZ descriptum tres rectas in Z, Θ, H contingere. Et eodem modo etiam ex altera rectae $A\Gamma$ parte invenietur circulus, qui propositum efficiet. Aliter, ducto ad utramque rectarum parallelarum perpendiculo quocunque ZH, eoque in E bifariam diviso, ac per E ducta recta $E\epsilon$ parallela rectis AB, $\Gamma\Delta$, ostendetur, in hac parallela esse centra describendorum circulorum. (Vel (Fig. 289.) b) nulla rectarum positione datarum parallela erit alteri. Omnes igitur tres AB, $B\Gamma$, $A\Gamma$ inter se convenient, vel triangulum $AB\Gamma$ efficient, adeoque problema idem erit, quod nostrum IV. 4. et invenietur centrum Δ circuli intra triangulum describendi, qui tres rectas AB, $B\Gamma$, $A\Gamma$ contingat.

δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΑ ἐστὶν ἴση, ὥςτε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση, ὁ ἄρα πάλιν κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Καὶ γεγράφθω ὡς ΑΒΓ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστιν· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τριγώνου πίπτει [1]), ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν ἐλάττονι

1) Ita sane recius Peyrardus ex Cod. a habet, quam vulgata lectio: ὅταν ἐκτὸς τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει. Ceterum iam Gregorius in versione latina veram lectionem expressit.

Facile autem patet, eodem modo intra spatia ΚΒΓΘ, ΑΒΑΝ, ΜΓΑΟ describi posse circulos, qui rectas ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ extra triangulum ΑΒΓ contingant. Nolumus huic problemati, quod unum ex iis est, quae Apollonius in libris de Tactionibus tractavit, plenius evolvendo insistere. Plura scitu digna, quae ad illud pertinent, et ex hac constructione derivari possunt, congessit Pfleiderer. ebene Trigonometrie Tüb. 1802. Ita v. c. facile patet, esse $Αε = Αη = \frac{ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ}{2}$, pariter ac in Obs. 4. vidimus esse $ΑΕ = \frac{ΑΒ + ΑΓ - ΒΓ}{2}$, et angulum ΑΒδ esse rectum etc.

basi ZB est aequalis (I. 4.). Similiter osten-
et $Z\Gamma$ aequalem esse ZA, quare et ZB ae-
st $Z\Gamma$; ergo rursus circulus centro Z, inter-
tem una ipsarum ZA, ZB, $Z\Gamma$ descriptus
per reliqua puncta, et erit circa triangulum
circumscriptus. Describatur igitur ut $AB\Gamma$.

a datum igitur triangulum circulus circumscri-
st. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

manifestum est, quod si centrum circuli intra
ulum cadit, angulus $BA\Gamma$, in segmento maiore
semicirculo positus, minor sit recto; si au-
centrum in rectam $B\Gamma$ cadit, angulus $BA\Gamma$, in
irculo positus, rectus sit; si vero centrum cir-
extra triangulum cadit, angulus $BA\Gamma$, in seg-
o minore quam semicirculo, maior sit recto.

PROPOSITIO V.

Obs. 1. Rob. Simson. putat, demonstrationem huius
positionis ab aliquo vitiatam esse, non enim ostendere,
tas, quae latera trianguli bifariam et ad angulos rectos se-
nt, inter se convenire, et inepte dividere propositionem in
s casus, cum una eademque demonstratio omnibus inser-
int, ut iam Campanus observarit. Et illud quidem, rectas,
ae ex Δ et E ad angulos rectos lateribus ducuntur, inter
convenire, facile, ut est apud Campanum, probatur, ducta
ecta ΔE, unde res eodem modo ex Ax. 11. vel I. Post. 5.
atet, ac in IV. 3. de rectis circulum contingentibus. Quod
utem rectae ΓZ, EZ nec in unam lineam coincidere possint,
nde patet, quod si id fieret, rectae AB, $A\Gamma$ forent inter se
arallelae (I. 28.), quod est contra hypothesin. Rob. Simson.
ectas ΔZ, EZ convenire inde probat, quod si non conveni-

τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὥςτε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται αἱ ΔΖ, ΕΖ· ὅταν δὲ ὀρθή, ἐπὶ τῆς ΒΓ· ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου [1]).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθω αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

1) Ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ex coniectura, quam iam versiones Campani, Clavii, Gregorii, Rob. Simsonis aliorumque habent, posuimus pro vulgata omnium editionum (in Paris. ex sphalmate typographico est ἐντὸς pro ἐκτὸς) ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

rent parallelae forent; at si parallelae forent ΔΖ, ΕΖ, parallelae quoque forent ΑΒ, ΑΓ, qui iis sunt ad angulos rectos. Hanc demonstrationem reprehendit Matthias Auszug aus Rob. Sims. Uebersetzung et Austin., quod propositio illa, rectas, quae perpendiculares sint ad duas parallelas, ipsas etiam parallelas esse, non praecedat. Facillime tamen res ad I. 28. reducitur. Caeterum poterat quoque Analysis addi simili ratione ac in IV. 4. facile deducenda ex III. 1. Cor. 1.

Obs. 2. Cor. 2. Quum centrum circuli describendi esse debeat (III. 1. Cor. 1.) in recta ΔΖ, quae rectam ΑΒ bifariam et ad angulos rectos secat, pariterque in recta ΕΖ, quae rectam ΑΓ bifariam et ad angulos rectos secat, et denique eodem modo in recta, quae rectam ΒΓ bifariam et ad angulos rectos secat, patet, hoc, quod ultimo loco diximus, perpendiculum cum duobus reliquis in uno eodemque puncto convenire debere.

Quare et si datus angulus minor est recto, intra triangulum convenient ΔZ, EZ; si autem rectus, in $B\Gamma$; si vero maior recto, extra triangulum $AB\Gamma$.

PROPOSITIO VI. (Fig. 291.)

In dato circulo quadratum inscribere.

Sit datus circulus $AB\Gamma\Delta$; oportet in circulo $AB\Gamma\Delta$ quadratum inscribere.

Ducantur circuli $AB\Gamma\Delta$ duae diametri $A\Gamma$, $B\Delta$ ad rectos angulos inter se (I. 11.), et iungantur AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA.

Obs. 3. Cor. 3. Et quae ab hoc communi trium perpendiculorum concursu ad angulos trianguli A, B, Γ ducuntur rectae ZA, ZB, $Z\Gamma$ aequales sunt. Casu itaque figurae secundae (Fig. 290. b.) quo angulus $BA\Gamma$ rectus est, centrum Z circuli circumscribendi facillime invenitur, bisecando tantum latus recto angulo oppositum. Cf. III. 31. Cor. 2.

Obs. 4. Eodem modo per tria puncta, quae non in eadem recta sunt, circulus describetur.

Obs. 5. Corollarii 1., quod in graeco textu legitur, pars prior non est apud Campanum, neque omnino ex hac constructione consequitur, sed patet ex III. 31. Pars posterior consequitur ex conversa III. 31. vid. Obs. ad III. 31. In parte posteriore corollarii praeterea, ut Rob. Simson. notat, sermo est de angulo *dato*, quum tamen propositio nihil habeat, nec habere possit de angulo dato, atque hinc ille corollarium hoc manifeste vitiatum esse concludit. Austin. id omnino ex hoc loco eliminandum esse putat.

PROPOSITIO VI.

Obs. A sexta inde huius libri propositione Euclides non nisi de figuris quibusdam regularibus tractat, et de his iis,

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, κέντρον γὰρ τὸ Ε, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΑ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΑΔ ἴση ἐστίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΑ, ΑΔ ἴση ἐστὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΔ εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ ὀρθή ἐστιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. Καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον.

Εἰς ἄρα δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

quae Prop. 2—5 generatim de triangulis docuerat, similia proponit. Neque enim poterant ad figuras multilateras quascunque illa omnia applicari. Nonnulla tamen de aliis quoque figuris non regularibus valent. Propositio sexta, ut de hac iam dicamus, de quadrato idem docet, quod Prop. 2. de triangulo dato alicui aequiangulo. Quodvis autem quadratum etiam cuivis alii quadrato est aequiangulum. Nec vero generaliter iam proponi poterat problema: in dato circulo inscribere quadrilaterum dato quadrilatero aequiangulum. Vidimus nempe in Obs. 2. ad III. 22., ut quadrilaterum circulo inscribi possit, necesse esse, si quaestio sit de figuris, quae nullos angulos gibbos habent, ut duo anguli oppositi simul sumti aequales sint reliquis duobus angulis. Itaque etiam, si circulo dato

Et quoniam BE aequalis est $E\Delta$, centrum enim E, communis autem et ad rectos angulos EA; basis igitur AB basi $A\Delta$ aequalis est (I. 4.). Ex eadem ratione et utraque rectarum $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ utrique rectarum BA, $A\Delta$ aequalis est; aequilaterum igitur est quadrilaterum $AB\Gamma\Delta$. Dico autem et rectangulum. Quoniam enim recta $B\Delta$ diameter est circuli $AB\Gamma\Delta$, semicirculus igitur est $BA\Delta$; quare angulus $BA\Delta$ rectus est (III. 31.). Ex eadem ratione et unusquisque angulorum $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$ rectus est; rectangulum igitur est quadrilaterum $AB\Gamma\Delta$. Ostensum est autem et aequilaterum; quadratum igitur est. Et inscriptum est in dato circulo $AB\Gamma\Delta$.

In dato igitur circulo $AB\Gamma\Delta$ quadratum inscriptum est $AB\Gamma\Delta$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO VII. (Fig. 293.)

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus $AB\Gamma\Delta$; oportet circa circulum $AB\Gamma\Delta$ quadratum circumscribere.

inscribi debet quadrilaterum dato quadrilatero aequiangulum, in dato quadrilatero eadem conditio obtinere debet. Quod si fuerit, poterit non modo, et quidem ita, ut punctum in circumferentia, per quod unum laterum quadrilateri inscribendi transeat, datum sit, aut pro lubitu sumatur, res fieri, sed innumeris modis fieri poterit, vel, ut aliter dicamus, problema generaliter sumtum erit indeterminatum. Nempe, si propositum sit, dato circulo $AB\Gamma$ (Fig. 292.) inscribere quadrilaterum, quod aequiangulum sit dato quadrilatero $BZ\Theta H$, cuius anguli oppositi $ZBH+Z\Theta H=Z+H=2$ rectis, ita, ut unum eius latus transeat per punctum datum A in circumferentia circuli, fieri id poterit sequentem in modum. Abscindatur per III. 34. recta $A\Gamma$ segmentum $A\Delta\Gamma$, quod ca-

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΕΑ· αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ

piat angulum aequalem angulo *H*, ductaque *ΘE* fiat angulus *ΓΑΔ=ΘΕΗ*, et *ΓΑΒ=ΘΕΖ*, et iungantur *ΒΓ*, *ΔΓ*, eritque, ut facile ex III. 22. consequitur, quadrilaterum *ΑΒΓΔ* aequiangulum quadrilatero *ΕΖΘΗ*. Neque vero solum quadrilaterum *ΑΒΓΔ* propositum efficiet. Quodsi enim v. g. ducta fuisset recta *ζϑ* parallela rectae *ΖΘ*, iunctaque *Εϑ*, angulus *ΓΑϑ=ϑΕΗ*, et angulus *ΓΑβ=ϑΕζ* constitutus esset, quadrilaterum *ΑβΓϑ* pariter scopo respondisset, atque ita innumera alia, quae idem praestarent, exhiberi poterant. Nominatim, si circulo dato inscribenda fuerit figura quadrato aequiangula, innumera rectangula problema solvent. At, si figura inscribenda ipsa etiam quadratum esse, et per punctum in circumferentia datum *Α* transire debet, una tantum figura his conditionibus satisfaciet. Si circulo inscribi iubetur figura multilatera aequiangula figurae datae, ante omnia, an res fieri possit, ex observatis ad III. 22. diiudicari debet, et si fieri possit, problema plerumque erit indeterminatum. Caeterum propositioni VI. 6. addi potest hoc

Cor. Circulus quoque (Fig. 291.) diametris *ΑΓ*, *ΒΔ* in quatuor segmenta aequalia dividitur (III. 26.).

PROPOSITIO VII.

Obs. 1. Rectas circulum contingentes *ΗΖ*, *ΘΚ* cum contingentibus *ΗΘ*, *ΖΚ* convenire, patet ex I. 29. Cor. 3.

Cor. 1. Quodvis quadrati circumscripti latus aequale est diametro circuli, cui circumscribitur (I. 34.).

Ducantur circuli $AB\Gamma\Delta$ duae diametri $A\Gamma$, $B\Delta$ ad rectos angulos inter se (I. 11.); et per puncta A, B, Γ, Δ ducantur rectae ZH, $H\Theta$, ΘK, KZ circulum $AB\Gamma\Delta$ contingentes (III. 17.).

Quoniam igitur ZH contingit circulum $AB\Gamma\Delta$ centro autem E ad contactum A ducta est EA; anguli ad A recti sunt (III. 18.). Ex eadem ratione et anguli ad B, Γ, Δ puncta recti sunt. Et quoniam

Cor. 2. Si ductis rectis AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA eidem circulo quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum duplum quadrati inscripti, hoc nempe erit aequale duplo quadrati radii (I. 47.), illud autem quadrato diametri Cor. 1.

Cor. 3. Circulus etiam hic diametris $A\Gamma$, $B\Delta$ in quatuor segmenta aequalia dividitur (III. 26.).

Cor. 4. Pariter latera quadrati circumscripti diametris $A\Gamma$, $B\Delta$ bisecantur. Est nempe $HA=BE$ (I. 34.) et $ZA=E\Delta$. At $BE=E\Delta$, itaque et $HA=ZA$.

Obs. 2. Quum quodvis quadratum aequiangulum sit cuivis alii, etiam haec propositio conferri potest cum propositione IV. 3. Et facile patet, propositionem IV. 3. longe generalius, et certe ad figuram rectilineam quamcunque, quae angulos gibbos non habet, extendi posse. Factis nempe (Fig. 294.) ut in IV. 3. angulis ad centrum O circuli dati ex ordine aequalibus iis, qui deinceps sunt angulis figurae datae $Z\Theta HKA$, nempe angulo $\alpha O\varepsilon=$ angulo, qui Z deinceps est $\alpha O\beta$ ei, qui Θ deinceps est etc. ductisque per puncta ε, α, β etc. (quorum unum etiam datum esse potest) rectis circulum contingentibus, demonstrabitur, ut in IV. 3. rectarum harum contingentium unamquamque convenire cum duabus ipsi proxime positis, et esse figuram ita enatam aequiangulam datae $Z\Theta HKA$. Nec generaliter omnes ii casus excludentur, quibus figura data angulos gibbos habet: in figura autem datae aequiangula circa circulum circumscripta latera angulos gibbos comprehendentia non ipsa, sed producta tantum intra figuram circulum con-

σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΑΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος. Ὥςτε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ τῇ ΒΕΔ ἐστὶ παράλληλος. Παραλληλόγραμμα ἐστὶ τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ΑΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΖΚ, ἡ δὲ

tingent, et anguli quoque ad centrum situm aliquatenus diversum obtinebunt, quae omnia, quum singulis casibus evolvendis haud vacet, hic et in sequentibus praeterimus.

Obs. 3. In figuris circulo alicui circumscriptis (hic quoque praeterimus eas, quae angulos gibbos habent) observari potest circa latera aliquid admodum simile ei, quod in figuris circulo inscriptis circa angulos observavimus Obs. 2. sq. ad III. 22. Nempe, si parem laterum numerum habuerint, et latera, initio facto a quocunque eorum ordine numeris indicentur, erit summa laterum numeris imparibus notatorum aequalis summae laterum numeris paribus notatorum. Sit v. c. talis figura, quae nullos angulos gibbos habet ΑΒΓΔΕΖ (Fig. 295.), quae circulum contingat in punctis α, β, γ, etc. eritque ex III. 17. Obs. 1.

$$A\alpha = A\zeta$$
$$B\alpha = B\beta$$
$$\Gamma\gamma = \Gamma\beta$$
$$\Delta\gamma = \Delta\delta$$
$$E\varepsilon = E\delta$$
$$Z\zeta = Z\varepsilon$$

unde $(A\alpha + B\alpha) + (\Gamma\gamma + \Delta\gamma) + (E\varepsilon + Z\zeta) = (B\beta + \Gamma\beta) + (\Delta\delta + E\delta) + (Z\varepsilon + A\zeta)$

i. e. $AB + \Gamma\Delta + EZ = B\Gamma + \Delta E + ZA$.

Similis demonstratio locum habet in figuris, quae plura ha-

rectus est angulus AEB, rectus autem est et EBH; $H\Theta$ parallela erit $A\Gamma$ (I. 28.) Ex eadem ratione et $A\Gamma$ parallela est ZK; quare et $H\Theta$ parallela est ZK (I. 30.). Similiter ostendemus et utramque ipsarum HZ, ΘK ipsi $BE\Delta$ esse parallelam. Parallelogramma igitur sunt HK, $H\Gamma$, AK, ZB, BK; aequalis igitur est HZ quidem ipsi ΘK, $H\Theta$ vero ipsi ZK. Et quoniam $A\Gamma$ aequalis est $B\Delta$, sed et $A\Gamma$ utrique ipsarum $H\Theta$, ZK, $B\Delta$ vero utrique ipsarum HZ, ΘK est aequalis; et utraque $H\Theta$, ZK utrique HZ,

bent latera. Hinc consequitur, rectangulum et rhomboiden circulo AE circumscribi non posse.

Obs. 4. Simile quid obtinet in figuris circulo circumscriptis, quae numerum laterum imparem habent. In illis nempe, si unius cuiuscunque lateris v. c. (Fig. 296.) in pentagono $AB\Gamma\Delta E$ lateris EA partes As, et sE in quae in puncto contactus dividitur, separatim numeremus, pariter summa laterum numeris imparibus notatorum aequalis erit summae numeris paribus notatorum, quod eodem modo demonstrabitur.

Obs. 5. In quadrilateris propositio, quam Obs. 3. habuimus, valet etiam converso. Nempe si quod quadrilaterum ita comparatum sit, ut summa duorum laterum oppositorum aequalis sit summae duorum reliquorum laterum oppositorum, poterit illi circulus inscribi. Demonstrari id potest vel directe, vel indirecte. Directa demonstratio haec erit. Sit (Fig. 297.) quadrilaterum $AB\Gamma\Delta$, in quo summa laterum $AB+\Gamma\Delta$ aequalis est summae laterum $B\Gamma+\Delta A$, poterit ei circulus inscribi. Nam ex Obs. 5. ad IV. 4. circulus potest describi, qui tria quaecunque contigua latera v. c. AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ contingat in punctis α, β, γ, adeoque erit, si O huius circuli centrum sit, $O\alpha = O\delta$, et $O\alpha^2 = O\gamma^2$. Est autem $O\alpha^2 = OA^2 - A\alpha^2$, et $O\gamma^2 = O\Delta^2 - \Delta\gamma^2$ (I. 47. Cor. 2.), adeoque erit $OA^2 - A\alpha^2 = O\Delta^2 - \Delta\gamma^2$. Et, quum sit ex hyp. $AB+\Gamma\Delta = B\Gamma+\Delta A$, et

ΒΔ ἑκατέρᾳ· τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΗΒΕΑ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. Καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἡ.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΔΑ δίχα κατὰ τὰ Ζ, Ε σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚ· παραλληλό-

$B\alpha = B\beta$, $\Gamma\gamma = \Gamma\beta$ (Obs. 1. ad III. 17.) erit, aequalibus utrimque demtis, $A\alpha + \Delta\gamma = \Delta A$. Iam erit vel $A\alpha = \Delta\gamma$ (Fig. 297. a), vel alterutra earum maior altera (Fig. 297. b.): Utroque casu, demisso ex O in $A\Delta$ perpendiculo $O\delta$, dico esse $O\delta = O\gamma$. Nam, si 1) $A\alpha = \Delta\gamma$, erit tam $A\alpha$, quam $\Delta\gamma = \frac{\Delta A}{2}$. Et, quum $OA^2 - A\alpha^2 = O\Delta^2 - \Delta\gamma^2$, erit $OA^2 = O\Delta^2$, adeoque $OA = O\Delta$, unde perpendiculum $O\delta$ rectam $A\Delta$ bisecabit in δ (I. 26. Cor. 3.), eritque $\Delta\delta = \frac{\Delta A}{2} = \Delta\gamma$. Est autem $O\delta^2 = O\Delta^2 - \Delta\delta^2$ et $O\gamma^2 = O\Delta^2 - \Delta\gamma^2$, itaque $O\delta^2 = O\gamma^2$, adeoque $O\delta = O\gamma$. Sin autem non sit $A\alpha = \Delta\gamma$, sit alterutra earum v. c.

ΘK est aequalis. Aequilaterum igitur est $ZH\Theta K$ quadrilaterum. Dico et rectangulum. Quoniam enim parallelogrammum est $HBE\Delta$, et est rectus angulus AEB; rectus igitur et AHB. Similiter ostendemus et angulos ad Θ, K, Z rectos esse; rectangulum igitur est quadrilaterum $ZH\Theta K$. Ostensum est autem et aequilaterum; quadratum igitur est. Et circumscriptum est circa $AB\Gamma\Delta$ circulum.

Circa datum igitur circulum quadratum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 299.)

In dato quadrato circulum inscribere.

Sit datum quadratum $AB\Gamma\Delta$; oportet in quadrato $AB\Gamma\Delta$ circulum inscribere.

Secetur utraque ipsarum AB, $A\Delta$ bifariam in punctis E, Z (I. 10.), et per E alterutri rectarum AB, $\Gamma\Delta$ parallela ducatur $E\Theta$ (I. 31.); per Z vero alterutri rectarum $A\Delta$, $B\Gamma$ parallela ducatur ZK (I.

$\Delta\gamma$ maior altera $A\alpha$. Quoniam igitur $OA^2-A\alpha^2=O\Delta^2-\Delta\gamma^2$: erit $\Delta\gamma^2-A\alpha^2=O\Delta^2-OA^2$. At, demisso ex O in rectam $A\Delta$ perpendiculo $O\delta$, est $O\Delta^2-OA^2=\Delta\delta^2-A\delta^2$ (I. 47. Cor. 3), itaque $\Delta\gamma^2-A\alpha^2=\Delta\delta^2-A\delta^2$ i. e. rectangulum $(\Delta\gamma+A\alpha)$ $(\Delta\gamma-A\alpha)$ = rectang. $(\Delta\delta+A\delta)$ $(\Delta\delta-A\delta)$ (II. 4. Cor. 4.) Quum autem sit $\Delta\gamma+A\alpha=A\Delta-\Delta\delta+A\delta$, erit $\Delta\gamma-A\alpha=\Delta\delta-A\delta$ (Obs. 3. ad I. 40.), adeoque erit $\Delta\Gamma+A\alpha+\Delta\Gamma-A\alpha=\Delta\delta+A\delta+\Delta\delta-A\delta$ i. e. $2\Delta\gamma=2\Delta\delta$, vel $\Delta\gamma=\Delta\delta^2$, et quum $O\delta^2=O\Delta^2-\Delta\delta^2$ et $O\gamma^2=O\Delta^2-\Delta\gamma^2$, erit $O\delta^2=O\gamma^2$, et $O\delta=O\gamma$, adeoque utroque casu circulus radio $O\gamma$ descriptus etiam per δ transibit, et continget rectam $A\Delta$ in δ (III. 16. Cor. 1.). Hinc consequitur quadrato et rhombo circulum posse inscribi.

γραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσίν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια ἡ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσίν, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΗ, ΗΕ ἐστὶν ἴση. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἁφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Θ, Κ γωνίας· εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς ΑΒ,

Obs. 6. In figuris autem, quae plura quam quatuor latera habent, propositio, quam Obs. 3. habuimus, pariterque altera Obs. 4. exhibita converti nequit, quod similiter fere demonstratur ac Obs. 6. ad III. 22. Sit nempe (Fig. 298.) figura *ΑΒΓΔΕΖ* circulo, cuius centrum est *O*, radius *Oα* circumscripta, et contingat ille latera in punctis *α*, *β*, *γ*, *δ*, *ε*, *ζ*, iam sumantur duo quaecunque latera contigua v. c. *ΔΖ*, *ΕΖ*, et producatur utrumque ultra *Z* usque ad *Θ* et *H* eadem quantitate, nempe ita, ut sit *ΖΘ=ΖΗ*, et centro *Δ* radio *ΔΘ*, pariterque centro *Ε* radio *ΕΗ* describantur circuli, qui se intersecabunt in puncto aliquo *Κ*, ita ut ductis *ΔΚ*, *ΕΚ* sit punctum *Z* inter *ΔΚ* et *ΕΚ*, orieturque novum polygonum *ΑΒΓΔΕΚ*, quod a priore *ΑΒΓΔΕΖ* tantum quoad latera *ΔΚ*, *ΕΚ*, eorumque positionem discrepabit, caeterum vero,

31.); parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum AK, KB, $A\Theta$, $\Theta\Delta$, AH, $H\Gamma$, BH, $H\Delta$, et opposita ipsorum latera aequalia sunt (I. 34.). Et quoniam $A\Delta$ aequalis est AB, et ipsius quidem $A\Delta$ dimidia est AE, ipsius vero AB dimidia AZ, aequalis erit et AE ipsi AZ; quare et opposita aequalia sunt, ergo ZH aequalis HE. Similiter ostendemus et utramque $H\Theta$, HK utrique ZH, HE esse aequalem. Quatuor igitur HE, HZ, $H\Theta$, HK aequales inter se sunt. Circulus igitur centro H, intervallo vero aequali uni ipsarum HE, HZ, $H\Theta$, HK descriptus transibit et per reliqua puncta; et continget rectas AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA, propterea quod recti sunt anguli ad E, Z, Θ, K anguli; si enim secat circulus rectas AB $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA, quae diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, intra circulum cadet, quod absurdum ostensum est (III. 16.) Circulus igitur centro H, intervallo vero aequali uni ipsarum HE, HZ, $H\Theta$, HK descriptus non secat rectas

quum polygonum $AB\Gamma\Delta EZ$ circulo circumscriptum sit, erit ex Obs. 3. $AB+\Gamma\Delta+EZ=B\Gamma+\Delta E+ZA$, adeoque, quum $EK=EZ+ZH$, et $KA=ZA+Z\Theta$, sumtum autem sit $ZH=Z\Theta$, erit etiam $AB+\Gamma\Delta+EK=B\Gamma+\Delta E+KA$. Polygonum itaque $AB\Gamma\Delta EK$ etiam ita comparatum est, ut numerus laterum alterne numeratorum aequalis sit numero reliquorum laterum, et tamen manifestum est, huic polygono circulum inscribi non posse. Si enim inscribi posset, idem etiam latera AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ex ea parte lateris $B\Gamma$ contingere deberet, ex qua sunt reliqua latera. At, qui hoc efficit, unicus circulus est, nempe is, qui centro O radio $O\alpha$ describitur. Is autem, quum latera EZ, AZ contingat, nequit simul latera EK, AK extra illa posita contingere.

ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθείας. Ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπεζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΑ, ΕΒ εὐθειῶν ἑκατέρᾳ τῶν ΕΓ, ΕΔ ἴση ἐστίν. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ,

Obs. 7. In figuris circulo circumscriptis, quae numerum laterum imparem habent, propositio, quam Obs. 4. habuimus, etiam ita exprimi poterit: erit in illis summa laterum primi, tertii, quinti etc. aequalis summae laterum secundi, quarti etc. si huic addas duplum segmentum primi lateris, quod inter punctum contactus et eum eius terminum iacet, a quo numerare coeptum est, v. c. (Fig. 296.) in pentagono

AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA. Continget igitur ipsas et erit inscriptus in quadrato $AB\Gamma\Delta$.

In dato igitur quadrato circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO IX. (Fig. 291.)

Circa datum quadratum circulum circumscribere.

Sit datum quadratum $AB\Gamma\Delta$; oportet circa quadratum $AB\Gamma\Delta$ circulum circumscribere.

Iunctae $A\Gamma$, $B\Delta$ sese secent in E.

Et quoniam ΔA aequalis est AB, communis autem $A\Gamma$, duae ΔA, $A\Gamma$ duabus BA, $A\Gamma$ aequales sunt, et basis $\Delta\Gamma$ basi $B\Gamma$ aequalis; angulus igitur $\Delta A\Gamma$ aequalis est $BA\Gamma$ (I. 8.); angulus igitur ΔAB bifariam sectus est ab $A\Gamma$. Similiter ostendemus et unumquemque angulorum $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$ bifariam sectum esse a rectis $A\Gamma$, ΔB. Et quoniam aequalis est angulus ΔAB angulo $AB\Gamma$, et est ipsius ΔAB dimidius angulus EAB, et ipsius $AB\Gamma$ dimidius angulus EBA; et EAB igitur angulo EBA erit aequalis. Quare et latus EA lateri EB est aequale (I. 6.). Similiter ostendemus, et utramque rectarum EA, EB utrique $E\Gamma$, $E\Delta$ aequalem esse; quatuor igitur EA, EB, $E\Gamma$, $E\Delta$ aequales inter se

circulo circumscripto, quod supra delineatum fuit, erat, si a puncto A versus B numerare incipias ex Obs. 4. $AB+\Gamma\Delta+E\varepsilon=B\Gamma+E\Delta+A\varepsilon$ unde si utrimque addas $A\varepsilon$, erit $AB+\Gamma\Delta+EA=B\Gamma+E\Delta+2A\varepsilon=B\Gamma+E\Delta+2A\alpha$. Hinc consequitur, si latera figurae circulo circumscriptae, quae numerum laterum imparem habet, omnia data sint, data etiam esse segmenta, in quae illa in puncto contactus dividuntur. Erit nempe $2A\alpha$

ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. Περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διαπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθεῖα ἡ ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ

=ΑΒ+ΓΔ+ΕΑ—ΒΓ—ΔΕ. Caeterum haec disquisitio a tertia inde observatione instituta primum facta est a Pitot. (Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris 1725. p. 45.). Cf. Kraft. Geom. Sublim. §. 104.

sunt. Circulus igitur centro E, et intervallo aequali uni rectarum EA, EB, $E\Gamma$, $E\Delta$ descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus circa quadratum $AB\Gamma\Delta$. Circumscribatur ut $AB\Gamma\Delta$.

Circa datum igitur quadratum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X. (Fig. 301.)

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum ad basin duplum reliqui.

Ponatur aliqua recta AB, et secetur in puncto Γ, ita ut rectangulum sub AB, $B\Gamma$ contentum aequale sit quadrato ex ΓA (II. 11.); et centro A, et intervallo AB describatur circulus $B\Delta E$ (Post. 3.), et aptetur in circulo $B\Delta E$ rectae $A\Gamma$, quae non maior est diametro circuli $B\Delta\Gamma$, aequalis recta $B\Delta$ (IV. 1.); et iungantur $A\Delta$, $\Gamma\Delta$, et circumscribatur circa triangulum $A\Gamma\Delta$ circulus $A\Gamma\Delta$.

Et quoniam rectangulum sub AB, $B\Gamma$ aequale est quadrato ex $A\Gamma$, $A\Gamma$ autem aequalis $B\Delta$, rectangulum igitur sub AB, $B\Gamma$ aequale est quadrato ex $B\Delta$. Et quoniam extra circulum $A\Gamma\Delta$ sumptum est aliquod punctum B, et a B in circulum $A\Gamma\Delta$ cadunt duae rectae BA, $B\Delta$, quarum altera quidem ipsum secat, altera vero in eum incidit; et est rectangulum

PROPOSITIO VIII.

Obs. Si cui rhombo dato $AB\Gamma\Delta$ (Fig. 300.) circulus inscribendus est, quod ex Obs. 5. ad praeced. semper fieri potest, centrum quidem circuli inscribendi eadem ratione inveniri potest, ut hic pro quadrato ostensum fuit, ductis nempe

τῆς ΒΔ· ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. Ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. Ἀλλ' ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ εἰσὶ διπλασίονες. Ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ διπλῆ. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶ διπλῆ.

rectis ZK, $E\Theta$ per puncta, quae latera rhombi opposita bifariam dividunt, eruntque adhuc ut ante $ZH = HK = HE = H\Theta = \frac{AA}{2}$: at circulus inscribendus iam alium radium habebit, qui invenitur, demisso ex H ad unum laterum rhombi v. c. AA perpendiculo $H\epsilon$, quod, ut facile probatur, aequale est perpendiculo cuicunque ex H in reliqua latera demisso v. c. $H\zeta$. Est enim in triangulis $H\epsilon E$, $H\zeta Z$, $HE = HZ$, angulus $E = Z$ et ad ϵ et ζ sunt anguli recti, unde ex I. 26. est $H\epsilon = H\zeta$, et circulus centro H radio $H\epsilon$ descriptus etiam per puncta ζ, ϑ.

sub AB, $B\Gamma$ aequale quadrato ex $B\Delta$, recta $B\Delta$ contingit circulum $A\Gamma\Delta$ (III. 37.). Quoniam igitur $B\Delta$ contingit, a contactu vero ad Δ ducta est $\Delta\Gamma$; angulus igitur $B\Delta\Gamma$ aequalis est angulo $\Delta\Gamma A$ in alterno circuli segmento (III. 32.). Quoniam igitur aequalis est angulus $B\Delta\Gamma$ angulo $\Delta A\Gamma$, communis addatur $\Gamma\Delta A$. Totus igitur $B\Delta A$ aequalis est duobus $\Gamma\Delta A$, $\Delta A\Gamma$. Sed angulis $\Gamma\Delta A$, $\Delta A\Gamma$ aequalis est exterior $B\Gamma\Delta$ (I. 32.); angulus igitur $B\Delta A$ aequalis est angulo $B\Gamma\Delta$. Sed angulus $B\Delta A$ angulo $\Gamma B\Delta$ est aequalis, quoniam et latus ΔA lateri AB est aequale (I. 5.); quare et ΔBA ipsi $B\Gamma\Delta$ est aequalis. Tres igitur $B\Delta A$, ΔBA, $B\Gamma\Delta$ aequales inter se sunt. Et quoniam aequalis est angulus $\Delta B\Gamma$ angulo $B\Gamma\Delta$, et latus $B\Delta$ aequale est lateri $\Delta\Gamma$ (I. 6.). Sed $B\Delta$ ipsi ΓA ponitur aequalis; et $A\Gamma$ igitur ipsi $\Gamma\Delta$ est aequalis; quare et angulus $\Gamma\Delta A$ angulo $\Delta A\Gamma$ est aequalis (I. 5.); anguli igitur $\Gamma\Delta A$, $\Delta A\Gamma$ anguli $\Delta A\Gamma$ sunt dupli. Aequalis autem et $B\Gamma\Delta$ angulis $\Gamma\Delta A$, $\Delta A\Gamma$ (I. 32.); et $B\Gamma\Delta$ igitur anguli $\Delta A\Gamma$ est duplus. Aequalis autem et $B\Gamma\Delta$ utrique angulorum $B\Delta A$, ΔBA, uterque igitur angulorum $B\Delta A$, ΔBA anguli $B\Delta A$ est duplus.

* transit, et rhombum in his punctis contingit (III. 16. Cor. 1.). Paullo brevius centrum H invenietur, ductis diagonalibus $A\Gamma$, $B\Delta$, quae pariter in H se intersecant.

PROPOSITIO IX.

Obs. Eadem constructione etiam circa rectangulum non aequilaterum circulus circumscribetur, quod fieri semper posse patet ex Obs. 5. ad III. 22. Demonstratio tantum paulo diversa erit, et absolvetur ope I. 34. Cor. 1. et I. 34. Cor. 17.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑφ' ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ τῇ βάσει ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ

merum habentibus una regula comprehendi, nempe, si numerus laterum polygoni describendi sit $=N$, eius descriptio pendebit a descriptione trianguli isoscelis, in quo utervis angulus ad basin sit $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ plus anguli ad verticem. Tum vero, ut facile (IV. 10. Cor. 2.) probatur, simul in potestate erit describere triangulum isosceles, cuius angulus ad verticem sit $(N-2)$ plus utriusvis anguli ad basin, et vice versa. Possunt autem etiam polygona, quae parem laterum numerum habent, quando is non est formae $2n$, reduci ad polygona, quae imparem laterum numerum habent; si autem est formae 2^n, ad quadrata.

PROPOSITIO XII.

Obs. 1. Probandum erat ante omnia, quod Austin. monet, rectas ΘΚ, ΚΑ, ΔΜ etc. inter se convenire, quod, ductis rectis ΒΓ, ΓΔ etc. facile eodem modo probatur, ac in IV. 3. vidimus.

Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum $AB\Gamma\Delta E$; oportet in pentagono $AB\Gamma\Delta E$ circulum inscribere.

Secetur uterque angulorum $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta E$ bifariam ab utraque rectarum ΓZ, ΔZ (I. 9.); et a puncto Z, in quo conveniunt inter se rectae ΓZ, ΔZ, ducantur rectae ZB, ZA, ZE. Et quoniam $B\Gamma$ aequalis est $\Gamma\Delta$, communis autem ΓZ, duae $B\Gamma$, ΓZ duabus $\Delta\Gamma$, ΓZ aequales sunt, et angulus $B\Gamma Z$ angulo $\Delta\Gamma Z$ aequalis est; basis igitur BZ basi ΔZ est aequalis (I. 4.), et triangulum $BZ\Gamma$ triangulo $\Delta Z\Gamma$ est aequale, et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt, quos aequalia latera subtendunt; aequalis igitur angulus ΓBZ angulo $\Gamma\Delta Z$. Et quoniam duplus est $\Gamma\Delta E$ anguli $\Gamma\Delta Z$, aequalis autem angulus $\Gamma\Delta E$ angulo $AB\Gamma$, angulus vero $\Gamma\Delta Z$ angulo ΓBZ, et angulus ΓBA

Obs. 2. Generaliter pariter demonstratur, si ad puncta circumferentiae, in quae incidunt anguli polygoni regularis circulo inscripti, ducantur rectae circulum contingentes, enasci exinde polygonum regulare eundem habens laterum numerum, eique circulo circumscriptum. Circumscriptio polygoni regularis circa circulum datum itaque pariter pendet a divisione circuli in tot partes aequales, quot polygonum latera habet. Caeterum in hoc et praecedente problemate unum punctorum in circumferentia v. c. A pro lubitu sumi aut datum esse potest.

PROPOSITIO XIII.

Obs. 1. Quamvis hypothetice sumi possit pentagonum regulare vel aequilaterum et aequiangulum super aliqua recta $\Gamma\Delta$ descriptum esse, etiamsi modus illud describendi antea ostensus non fuerit, multi tamen geometrae hac occasione docuerunt, quomodo super data recta describi possit pentagonum

δ'χα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ· ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση. Καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

culi BAE pro lubitu sumi aut datum esse posse. Compositio deinde fiet, ut apud Euclidem.

Cor. 1. Quum $ABA = AAB = 2BAA$, erit $BAA = \frac{ABA+AAB+BAA}{5}$, vel, quum $ABA+AAB+BAA=2$ rectis (I. 32.), erit $BAA=\frac{2 \text{ Rect.}}{5} = \frac{4 \text{ Rect.}}{10}$, et angulus $ABA=\frac{4 \text{ Rect.}}{5}$.

Cor. 2. Simul cum nostro problemate solutum est etiam hoc: Isosceles triangulum constituere, cuius angulus ad verticem triplus sit utriusque anguli ad basin. Id nempe est triangulum $AΓΔ$, quod vidimus esse isosceles, nempe $AΓ=ΓΔ$, et in quo angulus $AΓΔ=ABΔ+BAΓ=3BAΓ=3ΓΔA=$

ctis ΓE, ΔB; quinque igitur anguli $\Delta A\Gamma$, $\Delta\Gamma E$, $E\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta B$, $B\Delta A$ aequales inter se sunt. Aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistunt (III. 26.); quinque igitur circumferentiae AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE, EA aequales inter se sunt. Aequales autem circumferentias aequales rectae subtendunt (III. 29.); quinque igitur rectae AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE, EA aequales inter se sunt; aequilaterum igitur est $AB\Gamma\Delta E$ pentagonum. Dico et aequiangulum. Quoniam enim circumferentia AB circumferentiae ΔE est aequalis, communis addatur $B\Gamma\Delta$; tota igitur circumferentia $AB\Gamma\Delta$ toti circumferentiae $E\Delta\Gamma B$ est aequalis. Et insistit quidem circumferentiae $AB\Gamma\Delta$ angulus $AE\Delta$, circumferentiae vero $E\Delta\Gamma B$ angulus BAE, et angulus BAE igitur angulo $AE\Delta$ est aequalis (III. 27.) Ex eadem ratione unusquisque angulorum $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta E$ alterutri angulorum BAE, $AE\Delta$ est aequalis; aequiangulum igitur est pentagonum $AB\Gamma\Delta E$. Ostensum est autem et aequilaterum.

$3\Gamma A\Delta$. Et vice versa, si quis construere sciat triangulum isosceles $A\Gamma\Delta$, in quo $A\Gamma\Delta = 3\Gamma A\Delta$, construere quoque poterit triangulum isosceles $BA\Delta$, in quo $BA\Delta = \frac{AB\Delta}{2}$.

Obs. 2. Campanus et Peletarius, ut bene monet Clavius, sine causa se excruciant, ut probent, rectam $B\Delta$ contingere circulum $A\Gamma\Delta$, quum id ex III. 37. manifesto consequatur. Id autem iure observat Campanus, circulos $A\Gamma\Delta$, $B\Delta E$ se in puncto Δ non contingere, sed se iterum secare in puncto aliquo E, ita, ut arcus maioris circuli $\Delta E = B\Delta$, pariterque arcus minoris circuli $\Delta E = \Gamma\Delta$. Quod facile ita probatur. Hi circuli se non contingunt in Δ, si enim contingerent, recta $B\Delta$, quae minorem contingit, contingeret etiam maiorem (Obs. 2. ad III. 17.). Eadem autem maiori inscripta est

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥςτε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας· καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ· καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

q. e. s. Secent igitur se in B, eritque, ductis rectis AE, ΔE, angulus $AE\Delta = B\Gamma\Delta$ (III. 22. Cor. 1.) $= AB\Delta$. Est autem etiam, ob $AE = A\Delta$ (I. Def. 15.) $A\Delta E = AE\Delta$ (I. 5.) $= AB\Delta = A\Delta B$. Itaque (I. 32.) aequiangula sunt triangula $A\Delta E$, $A\Delta B$, et nominatim angulus $\Delta AE = BA\Delta$, unde et arcus maioris circuli $\Delta E = \Delta B$ (III. 26.) et recta $\Delta E = B\Delta$ (III. 29.) $= \Gamma\Delta$, adeoque et arcus minoris circuli $\Delta E = \Gamma\Delta$. Peletarius addit, rectam $\Gamma\Delta$ vel $A\Gamma$ esse latus pentagoni regularis circulo $A\Gamma\Delta$ inscripti. Nempe quum, ut vixdum vidimus, sit arcus $\Delta E = \Gamma\Delta$, recta autem $\Gamma\Delta = A\Gamma$, erit etiam arcus $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E$ (III. 28.). Eodem modo, quum recta $AE = A\Delta$, erit arcus $AZB = A\Gamma\Delta$ (III. 28.), adeoque, si is bifariam secetur, circulus $A\Gamma\Delta$ in quinque arcus aequales divisus erit, quorum chordae aequales sunt (III. 29.) et binae proximae angulos aequales comprehendunt (III. 27.).

In dato igitur circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII. (Fig. 303.)

Circa datum circulum pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Sit datus circulus $AB\Gamma\Delta E$; oportet circa circulum $AB\Gamma\Delta E$ pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Intelligantur inscripti pentagoni angulorum puncta A, B, Γ, Δ, E, ita ut aequales sint AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE, EA circumferentiae; et per A, B, Γ, Δ, E ducantur rectae circulum contingentes $H\Theta$, ΘK, $K\Lambda$, ΛM, MH (III. 17.); et sumatur circuli $AB\Gamma\Delta E$ centrum Z, et iungantur ZB, ZK, $Z\Gamma$, $Z\Lambda$, $Z\Delta$.

PROPOSITIO XI.

Cor. (Clavii.) Quum ex IV. 10. Cor. 1. angulus $\Gamma A\Delta$ sit 2/3 rect. sit autem $BA\Gamma = \Gamma A\Delta = \Delta AE$, sequitur, angulum BAE pentagoni regularis complecti sex quintas unius recti, vel tres quintas duorum rectorum, quod consentit cum I. 32. Cor. 18.; angulus autem $ABE = AEB$ erit (I. 32.) quinta pars duorum rectorum: itaque angulus BAE triplus est anguli ABE. Cf. IV. 10. Cor. 2. Caeterum simpliciorem propositionis IV. 11. solutionem dabit XIII. 10.

Obs. Eodem modo, quo hic ostensum fuit, descriptionem pentagoni regularis in dato circulo pendere a constructione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basin uterque duplus sit reliqui — dum nempe ope huius trianguli, aliusque illi aequicruri in dato circulo descripti circulus in quinque partes aequales divisus fuit, quo facto res erat facillima — generaliter demonstrabitur, descriptionem polygoni regularis cuius-

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΒ κύκλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΒΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἐστὶν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ΓΖΔ ἐστὶ διπλῆ· ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΔ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. Καί ἐστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΔΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΔΖΓ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΔ ἴση. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΚΓ, ΖΔΓ

cunque, quod numerum laterum imparem $=2n+1$ habeat, pendere a descriptione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basin uterque sit n plus reliqui anguli, ita ut v. gr. pro heptagono angulus ad basin triplus esse debeat anguli ad verticem; in enneagono 4 plus etc. vel, quod eodem redit, et pro

Et quoniam recta $K\Delta$ contingit circulum $AB\Gamma\Delta E$ in Γ, a centro autem Z in contactum ad Γ ducta est $Z\Gamma$; erit $Z\Gamma$ perpendicularis ad $K\Delta$ (III. 18.); rectus igitur est uterque angulorum ad Γ. Ex eadem ratione anguli ad puncta B, Δ recti sunt. Et quoniam rectus est angulus $Z\Gamma K$, quadratum ex ZK aequale est quadratis ex $Z\Gamma$, ΓK (I. 47.). Ex eadem ratione et quadratis ex ZB, BK aequale est quadratum ex ZK; quare quadrata ex $Z\Gamma$, ΓK quadratis ex ZB, BK aequalia sunt, quorum quadratum ex $Z\Gamma$ quadrato ex ZB est aequale; reliquum igitur ex ΓK reliquo ex BK est aequale; aequalis igitur recta ΓK rectae BK. Et quoniam aequalis est ZB ipsi $Z\Gamma$, et communis ZK, duae BZ, ZK duabus ΓZ, ZK aequales sunt, et basis BK basi ΓK est aequalis; angulus igitur BZK angulo $KZ\Gamma$ est aequalis (I. 8.), angulus autem BKZ angulo $ZK\Gamma$ est aequalis; duplus igitur angulus $BZ\Gamma$ anguli $KZ\Gamma$, angulus autem $BK\Gamma$ anguli $ZK\Gamma$. Ex eadem ratione et angulus $\Gamma Z\Delta$ anguli $\Gamma Z\Delta$ est duplus, angulus autem $\Gamma\Delta\Delta$ anguli $\Gamma\Delta Z$. Et quoniam aequalis est circumferentia $B\Gamma$ ipsi $\Gamma\Delta$, aequalis est et angulus $BZ\Gamma$ angulo $\Gamma Z\Delta$ (III. 27.). Et est angulus $BZ\Gamma$ anguli $KZ\Gamma$ duplus, angulus autem $\Delta Z\Gamma$ duplus anguli $\Delta Z\Gamma$; aequalis igitur et $KZ\Gamma$ ipsi $\Delta Z\Gamma$; est autem et angulus $Z\Gamma K$ angulo $Z\Gamma\Delta$ aequalis. Duo itaque triangula sunt $ZK\Gamma$, $Z\Delta\Gamma$ duos angulos duobus an-

omnibus polygonis regularibus valet, a divisione circuli in tot partes aequales, quot latera habere debet polygonum describendum. Sin autem polygonum parem laterum numerum $=2n$ habeat, pendebit eius descriptio a descriptione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basin uterque sit $(n-1/2)$

τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. Καί ἐστιν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση [1]· καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΛ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ, ΚΛΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

1) Edd. Oxon. et Basil. habent: καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ, καὶ ἐστι διπλῆ ἡ μὲν ΚΛ τῆς ΚΓ, ἡ δὲ ΘΚ τῆς ΒΚ· καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση: quae verba, quum sint mera repetitio eius, quod modo dictum erat, cum Peyrardo et Cod. a. omisimus.

plus reliqui anguli, ita ut v. c. pro octogono angulus ad ba-

gulis aequales habentia utrumque utrique, et unum latus uni lateri aequale, commune ipsis $ZΓ$, et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo (I. 26.); aequalis igitur recta $KΓ$ rectae $ΓΛ$, angulus vero $ZKΓ$ angulo $ZΛΓ$. Et quoniam aequalis est $KΓ$ ipsi $ΓΛ$, dupla igitur $KΛ$ ipsius $KΓ$. Ex eadem ratione et $ΘK$ ipsius BK dupla ostendetur. Et est BK ipsi $KΓ$ aequalis; et $ΘK$ igitur ipsi $KΛ$ est aequalis. Similiter ostendetur et unaquaeque rectarum $ΘH$, HM, $MΛ$ alterutri ipsarum $ΘK$, $KΛ$ aequalis; aequilaterum igitur est pentagonum $HΘKΛM$. Dico autem et aequiangulum. Quoniam enim aequalis est angulus $ZKΓ$ angulo $ZΛΓ$, et ostensus est anguli $ZKΓ$ duplus angulus $ΘKΛ$, anguli autem $ZΛΓ$ duplus angulus $KΛM$; et angulus $ΘKΛ$ angulo $KΛM$ est aequalis. Similiter et unusquisque angulorum $KΘH$, $ΘHM$, $HMΛ$ ostendetur alterutri angulorum $ΘKΛ$, $KΛM$ aequalis; quinque igitur anguli $HΘK$, $ΘKΛ$, $KΛM$, $ΛMH$, $MHΘ$ aequales inter se sunt. Aequiangulum igitur est pentagonum $HΘKΛM$. Ostensum est autem et aequilaterum, et circumscriptum est circa circulum $ABΓΔE$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 304.)

In dato pentagono, aequilatero et aequiangulo, circulum inscribere.

sin $(4-1/2)$ plus vel $7/2$ plus anguli ad verticem esse debeat. Cf. Tacquet. Euclid. ed. Whiston. Schol. 1. ad V. 11.; Barrow. Euclid. Schol. ad IV. 11.; Clavius Schol. ad IV. 16.; Boermannus Schol. 3. ad IV. 11. aliique. Potest etiam haec observatio pro polygonis imparem aut parem laterum nu-

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑφ' ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ τῇ βάσει ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσίν, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ

merum habentibus una regula comprehendi, nempe, si numerus laterum polygoni describendi sit $=N$, eius descriptio pendebit a descriptione trianguli isosceles, in quo utervis angulus ad basin sit $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ plus anguli ad verticem. Tum vero, ut facile (IV. 10. Cor. 2.) probatur, simul in potestate erit describere triangulum isosceles, cuius angulus ad verticem sit $(N-2)$ plus utriusvis anguli ad basin, et vice versa. Possunt autem etiam polygona, quae parem laterum numerum habent, quando is non est formae 2_n, reduci ad polygona, quae imparem laterum numerum habent; si autem est formae 2^n, ad quadrata.

PROPOSITIO XII.

Obs. 1. Probandum erat ante omnia, quod Austin. monet, rectas ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ etc. inter se convenire, quod, ductis rectis ΒΓ, ΓΔ etc. facile eodem modo probatur, ac in IV. 3. vidimus.

Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum $AB\Gamma\Delta E$; oportet in pentagono $AB\Gamma\Delta E$ circulum inscribere.

Secetur uterque angulorum $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta E$ bifariam ab utraque rectarum ΓZ, ΔZ (I. 9.); et a puncto Z, in quo conveniunt inter se rectae ΓZ, ΔZ, ducantur rectae ZB, ZA, ZE. Et quoniam $B\Gamma$ aequalis est $\Gamma\Delta$, communis autem ΓZ, duae $B\Gamma$, ΓZ duabus $\Delta\Gamma$, ΓZ aequales sunt, et angulus $B\Gamma Z$ angulo $\Delta\Gamma Z$ aequalis est; basis igitur BZ basi ΔZ est aequalis (I. 4.), et triangulum $BZ\Gamma$ triangulo $\Delta Z\Gamma$ est aequale, et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt, quos aequalia latera subtendunt; aequalis igitur angulus ΓBZ angulo $\Gamma\Delta Z$. Et quoniam duplus est $\Gamma\Delta E$ anguli $\Gamma\Delta Z$, aequalis autem angulus $\Gamma\Delta E$ angulo $AB\Gamma$, angulus vero $\Gamma\Delta Z$ angulo ΓBZ, et angulus ΓBA

Obs. 2. Generaliter pariter demonstratur, si ad puncta circumferentiae, in quae incidunt anguli polygoni regularis circulo inscripti, ducantur rectae circulum contingentes, enasci exinde polygonum regulare eundem habens laterum numerum, eique circulo circumscriptum. Circumscriptio polygoni regularis circa circulum datum itaque pariter pendet a divisione circuli in tot partes aequales, quot polygonum latera habet. Caeterum in hoc et praecedente problemate unum punctorum in circumferentia v. c. A pro lubitu sumi aut datum esse potest.

PROPOSITIO XIII.

Obs. 1. Quamvis hypothetice sumi possit pentagonum regulare vel aequilaterum et aequiangulum super aliqua recta $\Gamma\Delta$ descriptum esse, etiamsi modus illud describendi antea ostensus non fuerit, multi tamen geometrae hac occasione docuerunt, quomodo super data recta describi possit pentagonum

ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. Ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν ΖΓ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθέτῳ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστίν. αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Η, Θ, Κ, Λ, Μ

regulare. Et Clavius quidem ad IV. 11. ita hoc problema solvit. Sit super recta data ΓΔ (Fig. 302.) describendum pentagonum regulare. Fiat triangulum aequicrurum ΖΗΘ tale, ut uterque angulus ad basin duplus sit reliqui (IV. 10.). Deinde circa triangulum ΑΓΔ, quod super basi ΓΔ ope I. 23. triangulo ΖΗΘ aequiangulum construitur, describatur circulus (IV. 5.), huicque inscribatur ex IV. 11. ope eiusdem trianguli ΑΓΔ pentagonum regulare. Eodem fere redit constructio

igitur anguli ΓBZ est duplus; aequalis igitur angulus ABZ angulo $ZB\Gamma$. Ergo angulus $AB\Gamma$ bifariam secatur a recta BZ. Similiter ostendetur et utrumque angulorum BAE, $AE\Delta$ bifariam secari ab utraque rectarum $Z\Delta$, ZE. Ducantur autem a puncto Z ad AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE, EA rectae perpendiculares ZH, $Z\Theta$, ZK, $Z\Lambda$, ZM (I. 12.). Et quoniam aequalis est angulus $\Theta\Gamma Z$ angulo $K\Gamma Z$, est autem et rectus $Z\Theta\Gamma$ recto $ZK\Gamma$ aequalis, duo triangula sunt $Z\Theta\Gamma$, $ZK\Gamma$ duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus uni lateri aequale, commune scilicet utrique $Z\Gamma$, subtendens unum aequalium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt (I. 26.); aequalis igitur perpendicularis $Z\Theta$ perpendiculari ZK. Simi iter ostendetur et unamquamque rectarum $Z\Lambda$, ZM, ZH, alterutri rectarum $Z\Theta$, ZK aequalem esse; quinque igitur rectae ZH, $Z\Theta$, ZK, $Z\Lambda$, ZM aequales inter se sunt. Ergo circulus centro Z, intervallo vero una ipsarum ZH, $Z\Theta$, ZK, $Z\Lambda$, ZM descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, AE, EA rectas; propterea quod recti sunt anguli ad puncta H, Θ, K, Λ, M. Si enim ipsas non contingit, sed secat, eveniet ut recta diametro circuli ad rectos angulos ab

Peletarii, quam habet ille ad IV. 10. Alia Clavii solutio nititur observatione in Cor. ad IV. 10. et in Cor. ad IV. 11. facta. Nempe, quum in triangulo $ZH\Theta$ (Fig. 302.) uterque angulorum ad basin sit ex IV. 10. Cor. $= \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$, erit angulus ei deinceps, qui basi producta oritur, $= 2 \text{ Rect.} - \frac{4 \text{ Rect.}}{5}$ (I. 13.) $= \frac{6 \text{ Rect.}}{5}$ i. e. ex Cor. IV. 11. $=$ angulo, quem duo

σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτὰς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς πίπτειν τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας. Ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν. Γεγράφθω ὡς ὁ ΗΘΚΛΜ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

latera contigua pentagoni regularis comprehendunt. Sufficit igitur, ad punctum Γ extremum rectae datae ΓΔ angulum applicare, qui aequalis sit ei, qui angulo ΖΗΘ deinceps est, et rectam sub hoc angulo ductam aequalem facere rectae datae ΓΔ, atque ita per omnem describendi pentagoni ambitum rem continuare.

Obs. 2. Simili ratione in polygono regulari quocunque circulus inscribetur.

PROPOSITIO XIV.

Obs. 1. Cor. Quum centrum circuli pentagono regulari circumscribendi in IV. 14. prorsus eodem modo inveniatur, ac centrum circuli eidem pentagono inscribendi in IV. 13. patet, utrumque circulum idem centrum habere.

Obs. 2. Generaliter eodem modo circa datum polygonum regulare quodcunque circulus circumscribetur.

Obs. 3. Hinc etiam (coll. 2. Obs. ad IV. 13.) Cor. in Obs. 1. allatum valet generaliter, nempe circulus polygono

extremitate ducta cadat intra circulum, quod absurdum ostensum est (III. 16.). Circulus igitur centro Z, intervallo vero una ipsarum ZH, $Z\Theta$, ZK, $Z\Lambda$, ZM rectarum descriptus non secabit rectas ΔB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE, $E\Lambda$; continget igitur ipsas. Describatur ut $H\Theta K\Lambda M$.

In dato igitur pentagono, quod est aequilaterum et aequiangulum, circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 305.)

Circa datum pentagonum, aequilaterum et aequiangulum, circulum circumscribere.

alicui regulari inscriptus idem centrum habebit, quod circulus ei circumscriptus.

Obs. 4. Quodsi e centro circuli polygono alicui regulari inscripto, vel (quod eodem redit Obs. 3.) circumscripto ad singulos polygoni angulos ducantur rectae, dividant illae polygonum in tot triangula aequalia, quot polygonum latera habet.

Obs. 5. Haec triangula omnia eandem habent altitudinem, quae si circulus polygono inscriptus sit, aequalis est radio circuli inscripti; si circulus polygono circumscriptus sit, aequalis est perpendiculo e centro in unum laterum polygoni demissum. Radius itaque circuli inscripti aequalis est huic perpendiculo, quod et apothema vocatur.

Obs. 6. Summa omnium istorum triangulorum, i. e. integrum polygonum itaque aequale est (I. 38. Cor. 4.) triangulo, cuius basis aequalis est perimetro polygoni, et cuius altitudo aequalis est altitudini unius ex istis triangulis, i. e. si circulus polygono circumscriptus sit, radio circuli polygone

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΖΒ, ΑΖ, ΕΖ εὐθειῶν.

inscripti, vel si circulus polygono circumscriptus sit, perpendiculo e centro circuli polygono circumscripti in unum laterum demisso.

Obs. 7. Observatio praecedens valet etiam, si polygonum aliquod non regulare circulo alicui sit *circumscriptum*, quod nempe etiam tum omnia triangula, in quae illud dispesci potest rectis e centro ad singulos angulos polygoni ductis, eandem habent altitudinem nempe radium circuli ipsi inscripti. Tali tamen polygono non semper circulus circumscribi poterit, quod hic obiter notamus.

His observationibus circa polygona regularia addi possunt adhuc sequentia.

Obs. 8. Si quod polygonum regulare (Fig. 306.) v. c. pentagonum circulo inscriptum sit, et bifariam dividantur singuli eius anguli ad centrum, adeoque etiam (III. 26.) singuli arcus, quos subtendunt latera polygoni circulo inscripti, et per puncta, in quibus hi arcus dividuntur, ducantur rectae circulum contingentes, enascetur novum polygonum regulare priori aequilaterum, circulo circumscriptum. Quod simili ratione demonstrabitur ac IV. 12. Et facile patet, singula latera polygoni circumscripti parallela esse singulis lateribus polygoni circulo inscripti. Habet hanc Prop. de pentagono Peletarius ad IV. 12. et generaliter Ambros. Rhodius ad IV. 6.

Obs. 9. Quaevis figura aequilatera circulo inscripta est

Sit datum pentagonum, aequilaterum et aequiangulum $ABΓΔE$; oportet circa pentagonum $ABΓΔE$ circulum circumscribere.

Secetur uterque angulorum $BΓΔ$, $ΓΔE$ bifariam ab utraque rectarum $ΓZ$, $ZΔ$ (I. 9.), et a puncto Z, in quo conveniunt rectae, ad puncta B, A, E ducantur rectae ZB, ZA, ZE. Similiter ut in praecedente ostendetur et unumquemque angulorum $ΓBA$, BAE, $AEΔ$ bifariam secari ab una rectarum ZB, AZ, EZ. Et quoniam aequalis est angulus $BΓΔ$

etiam aequiangula. Latera enim eius abscindunt arcus aequales (III. 28.), adeoque anguli a binis quibusvis polygoni lateribus contiguis comprehensi arcubus aequalibus insistunt, adeoque aequales sunt (III. 27.). At non omnis figura aequiangula circulo inscripta necessario quoque aequilatera est, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel, si par est, quando duo latera proxima aequalia sunt, vel dummodo, duo quaecunque aequalia sint, quorum uno posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, ut quartum, sextum etc. Est haec observatio Clavii. Nempe, si circulo inscripta sit figura aequiangula quaecunque v. c. (Fig. 305.) $ABΓΔE$, erit, ob angulum $BAE = ABΓ$, etiam arcus $BAE = ΓBA$ (III. 26. Cor. 1.), hinc, demto communi AB arcus $AB =$ arc. $BΓ$, adeoque recta $AB =$ rectae $BΓ$ (III. 29.). Eadem ratione erit recta $BΓ = ΔE$, atque ita deinceps, si figura plura habet latera, erit semper tertium quodque latus ei, a quo tertium est, uno relicto in medio, aequale: hoc est, primum (quodvis autem latus constitui primum potest) aequale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo etc., atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita aequalia inter se erunt. Eadem autem ratione omnia latera locorum parium, ut secundum, quartum, sextum etc. aequalia inter se erunt, quum quartum sit a secundo tertium etc. Et haec quidem in omnibus figuris aequiangulis circulo inscriptis locum habebunt.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΕ πύλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐφαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΒΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ· ἐστὶν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ΓΖΛ ἐστὶ διπλῆ ἡ δὲ ὑπὸ ΓΛΔ τῆς ὑπὸ ΓΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. Καί ἐστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΛΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΛΖΓ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΛ ἴση. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ

cunque, quod numerum laterum imparem $=2n+1$ habeat, pendere a descriptione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basin utrque sit n plus reliqui anguli, ita ut v. gr. pro heptagono angulus ad basin triplus esse debeat anguli ad verticem; in enneagono 4 plus etc. vel, quod eodem redit, et pb

Et quoniam recta KA contingit circulum $ABΓΔE$ in $Γ$, a centro autem Z in contactum ad $Γ$ ducta est $ZΓ$; erit $ZΓ$ perpendicularis ad KA (III. 18.); rectus igitur est uterque angulorum ad $Γ$. Ex eadem ratione anguli ad puncta B, $Δ$ recti sunt. Et quoniam rectus est angulus $ZΓK$, quadratum ex ZK aequale est quadratis ex $ZΓ$, $ΓK$ (I. 47.). Ex eadem ratione et quadratis ex ZB, BK aequale est quadratum ex ZK; quare quadrata ex $ZΓ$, $ΓK$ quadratis ex ZB, BK aequalia sunt, quorum quadratum ex $ZΓ$ quadrato ex ZB est aequale; reliquum igitur ex $ΓK$ reliquo ex BK est aequale; aequalis igitur recta $ΓK$ rectae BK. Et quoniam aequalis est ZB ipsi $ZΓ$, et communis ZK, duae BZ, ZK duabus $ΓZ$, ZK aequales sunt, et basis BK basi $ΓK$ est aequalis; angulus igitur BZK angulo $KZΓ$ est aequalis (I. 8.), angulus autem BKZ angulo $ZKΓ$ est aequalis; duplus igitur angulus $BZΓ$ anguli $KZΓ$, angulus autem $BKΓ$ anguli $ZKΓ$. Ex eadem ratione et angulus $ΓZΔ$ anguli $ΓZΔ$ est duplus, angulus autem $ΓΔΔ$ anguli $ΓΔZ$. Et quoniam aequalis est circumferentia $BΓ$ ipsi $ΓΔ$, aequalis est et angulus $BZΓ$ angulo $ΓZΔ$ (III. 27.). Et est angulus $BZΓ$ anguli $KZΓ$ duplus, angulus autem $ΔZΓ$ duplus anguli $ΔZΓ$; aequalis igitur et $KZΓ$ ipsi $ΔZΓ$; est autem et angulus $ZΓK$ angulo $ZΓΔ$ aequalis. Duo itaque triangula sunt $ZKΓ$, $ZΔΓ$ duos angulos duobus an-

omnibus polygonis regularibus valet, a divisione circuli in tot partes aequales, quot latera habere debet polygonum describendum. Sin autem polygonum parem laterum numerum $=2n$ habeat, pendebit eius descriptio a descriptione trianguli aequicruri, cuius angulus ad basim uterque sit $(n-1/2)$

τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. Καί ἐστιν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση [1]· καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΛ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ, ΚΛΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

1) Edd. Oxon. et Basil. habent: καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ, καί ἐστι διπλῆ ἡ μὲν ΚΛ τῆς ΚΓ, ἡ δὲ ΘΚ τῆς ΒΚ καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση: quae verba, quum sint mera repetitio eius, quod modo dictum erat, cum Peyrardo et Cod. a. omisimus.

plus reliqui anguli, ita ut v. c. pro octogono angulus ad ba-

gulis aequales habentia utrumque utrique, et unum latus uni lateri aequale, commune ipsis $ZΓ$, et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo (I. 26.); aequalis igitur recta $KΓ$ rectae $ΓΛ$, angulus vero $ZKΓ$ angulo $ZΛΓ$. Et quoniam aequalis est $KΓ$ ipsi $ΓΛ$, dupla igitur $KΛ$ ipsius $KΓ$. Ex eadem ratione et $ΘK$ ipsius BK dupla ostendetur. Et est BK ipsi $KΓ$ aequalis; et $ΘK$ igitur ipsi $KΛ$ est aequalis. Similiter ostendetur et unaquaeque rectarum $ΘH$, HM, $MΛ$ alterutri ipsarum $ΘK$, $KΛ$ aequalis; aequilaterum igitur est pentagonum $HΘKΛM$. Dico autem et aequiangulum. Quoniam enim aequalis est angulus $ZKΓ$ angulo $ZΛΓ$, et ostensus est anguli $ZKΓ$ duplus angulus $ΘKΛ$, anguli autem $ZΛΓ$ duplus angulus $KΛM$; et angulus $ΘKΛ$ angulo $KΛM$ est aequalis. Similiter et unusquisque angulorum $KΘH$, $ΘHM$, $HMΛ$ ostendetur alterutri angulorum $ΘKΛ$, $KΛM$ aequalis; quinque igitur anguli $HΘK$, $ΘKΛ$, $KΛM$, $ΛMH$, $MHΘ$ aequales inter se sunt. Aequiangulum igitur est pentagonum $HΘKΛM$. Ostensum est autem et aequilaterum, et circumscriptum est circa circulum $ABΓΔE$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 304.)

In dato pentagono, aequilatero et aequiangulo, circulum inscribere.

sin $(4-1/2)$ plus vel $7/2$ plus anguli ad verticem esse debeat. Cf. Tacquet. Euclid. ed. Whiston. Schol. 1. ad V. 11.; Barrow. Euclid. Schol. ad IV. 11.; Clavius Schol. ad IV. 16.; Boermannus Schol. 3. ad IV. 11. aliique. Potest etiam haec observatio pro polygonis imparem aut parem laterum nu-

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑφ' ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ τῇ βάσει ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ

merum habentibus una regula comprehendi, nempe, si numerus laterum polygoni describendi sit $=N$, eius descriptio pendebit a descriptione trianguli isoscelis, in quo utervis angulus ad basin sit $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ plus anguli ad verticem. Tum vero, ut facile (IV. 10. Cor. 2.) probatur, simul in potestate erit describere triangulum isosceles, cuius angulus ad verticem sit $(N-2)$ plus utriusvis anguli ad basin, et vice versa. Possunt autem etiam polygona, quae parem laterum numerum habent, quando is non est formae 2_n, reduci ad polygona, quae imparem laterum numerum habent; si autem est formae 2^n, ad quadrata.

PROPOSITIO XII.

Obs. 1. Probandum erat ante omnia, quod Austin. monet, rectas ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ etc. inter se convenire, quod, ductis rectis ΒΓ, ΓΔ etc. facile eodem modo probatur, ac in IV. 3. vidimus.

Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum $AB\Gamma\Delta E$; oportet in pentagono $AB\Gamma\Delta E$ circulum inscribere.

Secetur uterque angulorum $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta E$ bifariam ab utraque rectarum ΓZ, ΔZ (I. 9.); et a puncto Z, in quo conveniunt inter se rectae ΓZ, ΔZ, ducantur rectae ZB, ZA, ZE. Et quoniam $B\Gamma$ aequalis est $\Gamma\Delta$, communis autem ΓZ, duae $B\Gamma$, ΓZ duabus $\Delta\Gamma$, ΓZ aequales sunt, et angulus $B\Gamma Z$ angulo $\Delta\Gamma Z$ aequalis est; basis igitur BZ basi ΔZ est aequalis (I. 4.), et triangulum $BZ\Gamma$ triangulo $\Delta Z\Gamma$ est aequale, et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt, quos aequalia latera subtendunt; aequalis igitur angulus ΓBZ angulo $\Gamma\Delta Z$. Et quoniam duplus est $\Gamma\Delta E$ anguli $\Gamma\Delta Z$, aequalis autem angulus $\Gamma\Delta E$ angulo $AB\Gamma$, angulus vero $\Gamma\Delta Z$ angulo ΓBZ, et angulus ΓBA

Obs. 2. Generaliter pariter demonstratur, si ad puncta circumferentiae, in quae incidunt anguli polygoni regularis circulo inscripti, ducantur rectae circulum contingentes, enasci exinde polygonum regulare eundem habens laterum numerum, eique circulo circumscriptum. Circumscriptio polygoni regularis circa circulum datum itaque pariter pendet a divisione circuli in tot partes aequales, quot polygonum latera habet. Caeterum in hoc et praecedente problemate unum punctorum in circumferentia v. c. A pro lubitu sumi aut datum esse potest.

PROPOSITIO XIII.

Obs. 1. Quamvis hypothetice sumi possit pentagonum regulare vel aequilaterum et aequiangulum super aliqua recta $\Gamma\Delta$ descriptum esse, etiamsi modus illud describendi antea ostensus non fuerit, multi tamen geometrae hac occasione docuerunt, quomodo super data recta describi possit pentagonum

γωνον· λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒΑ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τῶν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου φανερὸν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Καὶ ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου

Obs. 3. Quum recta ΑΓ a recta ΒΗ bifariam et ad angulos rectos secetur (I. 34. Cor. 1. et 20.), erit quadratum dimidiae ΑΓ, i. e. quarta pars quadrati ex ΑΓ (II. 4. Cor. 2.) aequale excessui quadrati ex ΑΗ super quadratum ex dimidia ΒΗ vel ΑΗ (I. 47. Cor. 2.) i. e. (II. 4. Cor. 2.) = tribus quartis quadrati radii. Quadratum ex ΑΓ, latere trianguli aequilateri igitur triplum est quadrati radii eius circuli, in quem inscriptum est. Tacquet ad h. l.

lico etiam et aequiangulum. Quoniam enim aequalis est circumferentia ZA circumferentiae $E\Delta$, communis addatur $AB\Gamma\Delta$ circumferentia; tota igitur $ZAB\Gamma\Delta$ toti $E\Delta\Gamma BA$ est aequalis, et insistit quidem circumferentiae $ZAB\Gamma\Delta$ angulus $ZE\Delta$, circumferentiae vero $E\Delta\Gamma BA$ angulus AZE. Aequalis igitur angulus AZE angulo $ZE\Delta$. Similiter ostendetur et reliquos angulos hexagoni $AB\Gamma\Delta EZ$ sigillatim aequales esse alterutri angulorum AZE, $ZE\Delta$. Aequiangulum igitur est hexagonum $AB\Gamma\Delta EZ$. Ostensum est autem et aequilaterum, et inscriptum est in circulo $AB\Gamma\Delta EZ$.

In dato igitur circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum hexagoni latus aequale esse circuli semidiametro.

Et si per puncta A, B, Γ, Δ, E, Z contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum hexagonum aequilaterum et aequiangulum, congruenter eis, quae de pentagono dicta sunt. Et etiam con-

Obs. 4. Circa circulum quemcunque centro H, radio $= \frac{HA}{2}$ descriptum e punctis A, B, Γ, Δ, E, Z describi possunt sex circuli, inter se et primum descripto aequales, quorum quisque tres, nempe eum, qui ex H radio $\frac{HA}{2}$ descriptus est, et duos sibi proximos continget, si nempe radii omnium eorum sumantur aequales $\frac{HA}{2}$ (Obs. 3. ad III. 12.).

ἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον 1) κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

1) Rob. Simson. monet, addendum hic esse ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Recte ille quidem. Attamen haec ex praecedentibus facile suppleri posse sine dubio auctor putabat. Et si omnia ad summum rigorem exigere velis, etiam ad initium Cor. similiter addendum erat ἰσόπ. καὶ ἰσώγον. ubi nec ipse Simson. addit.

PROPOSITIO XVI.

Obs. 1. Eodem modo, quo Euclides ostendit, quum arcus $A\Gamma$ sit $1/3 = 5/15$ circuli integri, et arcus $AB = 1/5 = 3/15$ circuli integri, fore arcum $B\Gamma = 2/15$, adeoque per III. 30. inveniri posse arcum, qui sit $1/15$ integri circuli, generaliter ostendetur, si describi possit in circulo polygonum regulare m laterum, aliudque n laterum, ubi $m > n$ sumitur, et si $m - n$ vel $pm - qn$ per continuas bisectiones ad unitatem reduci possit, vel ut aliter dicamus, si $m - n$ vel $pm - qn$ sit $2r$, describi quoque posse in circulo polygonum regulare, quod habeat $m \cdot n$ latera, ubi p et q denotare potest numeros integros quoscunque.

Obs. 2. Ex iis, quae Euclides hoc libro tradidit, consequitur, circulum posse in 3, 6, 12, 24 etc.
— 4, 8, 16, 32 ...
— 5, 10, 20, 40 ...
— 15, 30, 60, 120 ...
partes aequales dividi, et figuras regulares totidem laterum ipsi posse inscribi et circumscribi. Figuras autem regulares,

ruenter eis, quae de pentagono dicta sunt, in dato exagono circulum inscribemus et circumscribemus.

PROPOSITIO XVI. (Fig. 308.)

In dato circulo quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit datus circulus *ΑΒΓΔ*; oportet in circulo *ΑΒΓΔ* quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

quorum laterum numerus in istis seriebus haud contineretur, geometrice in circulo describendi ars hactenus ignorabatur. Gaussius, iam apud Göttingenses Matheseos Professor, in Disquisitionibus Arithmeticis 1801. editis, Sect. VII. de aequation. circuli section. definientibus, primus methodo algebraico-trigonometrica demonstravit, circulum non tantum in $\left(\frac{2}{2^0+1}\right)$ $\left(\frac{3}{2^1+1}\right)$ $\left(\frac{5}{2^2+1}\right)$ verum etiam in $\left(\frac{17}{2^4+1}\right)$ $\left(\frac{257}{2^8+1}\right)$ $\left(\frac{65537}{2^{16}+1}\right)$ etc. generaliter nempe in 2^m+1 partes dividi posse, quoties 2^m+1 sit numerus primus. Ope divisionis in 17. partes aequales, collatis iis, quae in Obs. 1. et in Obs. ad IV. 11. diximus, circulus deinde porro in 2×17, 4×17, 8×17 etc. praeterea in 3×17 vel 51 partes aequales dividetur, quod nempe $6/17-1/3=1/15$

in 5×17 vel 85, quia $1/5-3/17=2/85$

in 15×17 vel 255, quia $1/15-1/17=2/255$

et in eas adhuc partes aequales, quae bisectionibus ex praecedentibus consequuntur. Cf etiam v. Hugnenin. mathem Beiträge Königsb. 1803. p. 272. sq. et Rothe. de Divisione Peripheriae circuli in 17. et 13. partes aequales, Erlangae 1804., qui pro quaestione generali, an polygonon aliquod regulare geometrice circulo inscribi possit, hanc adfert regulam generalem: sit M numerus quicunque integer positivus, atque litera m designetur multitudo numerorum integrorum positivorum $<M$ atque

Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ· οἷων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος [1]) ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε· ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πεμπτὸν οὖσα τοῦ κύκλου, ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαιδέκατον ἔσται τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς ΒΕ, ΕΓ εὐθείας, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἐὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἔτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, καὶ

1) Pro ὁ ΑΒΓΔ κύκλος Rob. Simson. mavult legere: ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια. Quum tamen vox κύκλου etiam postea saepius recurrat, κύκλος hic dictum videtur pro integra circumferentia.

erga *M relative* primorum. Polygonon regulare *M* laterum geometrice circulo inscribi poterit, si *M* potentia est numeri 2 exponentis integri positivi. Si vero hoc non valeat, peripheria etiam in *M* partes aequales geometrice dividi nequit. Caeterum geometrica quoque solutio ex formulis, quas habent viri supra laudati, deduci omnino potest, et Pfleiderer pervenit ad geometricam constructionem satis elegantem et pro rei natura concinnam, cuius etiam demonstrationem exhibuit e mere geometricis principiis petitam. Aliam e formulis

Inscribatur in circulo $AB\Gamma\Delta$ trianguli aequilateri in ipso inscripti latus $A\Gamma$ (IV. 2.), pentagoni vero aequilateri latus AB (IV. 11.); qualium igitur est circulus $AB\Gamma\Delta$ aequalium segmentorum quindecim, talium circumferentia $AB\Gamma$, quae tertia pars est circuli, erit quinque; AB vero circumferentia, quae quinta est circuli, erit trium; reliqua igitur $B\Gamma$ aequalium duarum. Secetur $B\Gamma$ bifariam in E (III. 30.), utraque igitur circumferentiarum BE, $E\Gamma$ quintadecima erit circuli $AB\Gamma\Delta$. Si igitur iungentes rectas BE, $E\Gamma$, aequales ipsis in continuum rectas aptemus in circulo $AB\Gamma\Delta$ (IV. 1.), erit in ipso inscriptum quindecagonum aequilaterum et aequiangulum. Quod oportebat facere.

Congruenter autem eis, quae de pentagono, si per circuli divisiones contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum quindecagonum aequilate-

algebraicis a Rothe. exhibitis deductam constructionem exhibet Müller. (Mathem. kritische Bearbeit. des ersten Buchs der Elemente 1821. im Anhang.). Aliam satis concinnam constructionem vide in Paukers ebene Geometrie 1823. p. 187. sq. Illa tamen hoc loco praetereunda nobis sunt, quum demonstratio ex ipsa problematis natura non possit non esse prolixa, et ex parte haud exigua e libris elementorum sequentibus demum petita. Praeterea plures subinde mathematici methodos tradiderunt vel generales, vel ad singulares figuras spectantes, polygona regularia quaecunque, aut certe plura adhuc, quam Euclides docuerat, circulo dato inscribendi etc., haud quidem, ut probe norant, rigorose veras, at tamen magis minus prope ad veritatem accedentes, atque ita comparatas, ut usui pra-

εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.

etico, ubi saepe summus rigor attingi nequit, inservire poss videantur. Haec talia autem satis ingeniose nonnunquam ex cogitata nihil huic pertinent, nec diiudicatio horum tentami num plerumque ex altioribus fontibus repetendorum, vel men mechanicorum, huius loci esse potest. Huc tamen haud refer

rum et aequiangulum. Praeterea congruenter eis, quae de pentagono dicta sunt, et in dato quindecagono circulum inscribemus et circumscribemus.

debent eorum conatus, qui aperte falsa de arcu quocunque in aequales, quotquot libuerit, partes dividendo praecepta dedere, qualia v. c. videre est in Hadaly de Hada Τρxometria edita Budae 1820.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

ΟΡΟΙ.

α΄. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β΄. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

Isaac. Monachus in scholiis ad hunc librum refert, asserere nonnullos, huius libri doctrinam ab Eudoxo, Platonis praeceptore, inventam traditamque esse. Caeterum aliqua in eo corrupta ad nos pervenisse, ex sequentibus patebit.

DEFIN. I.

Pars, ut iam Isaacus Monachus, Campanus, Commandinus, Clavius aliique notant, duplici sensu apud Geometras adhibetur. Aut enim designat quamvis magnitudinem minorem altera eiusdem generis. Ita v. c. Euclides I. 9. Def. ait: omne totum sua parte maius est. Aut sensu strictiore, ut hic, sumitur pro ea magnitudine minore, quae aliquoties repetita aliam maiorem eiusdem generis efficit aut *mensurat*, unde eius *mensura* vocatur. Priore sensu v. c. 4. erit pars numeri 6, non vero posteriore sensu: 3 autem utroque sensu pars est numeri 6. Diximus, maiorem magnitudinem, cum qua minor

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

1. Pars est magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando mensurat maiorem.

2. Multiplex autem maior minoris, quando mensuratur a minore.

comparetur, esse debere eiusdem generis ac minorem. Pates enim lineam v. c. non nisi a linea, superficiem a superficie, corpus a corpore, pondus a pondere etc. mensurari posse. Caeterum, quam Euclides vocat hic partem sensu strictiore, alii partem *aliquotam*, aut *submultiplum* maioris vocant, maior contra *multiplum* minoris appellatur, quam exacte aliquoties continet (Def. 2.). Ita 3 erit submultiplum numeri 6, nempe eius pars dimidia, vel subdupla: 2 est numeri 6 pars tertia aut subtripla etc. Pars aliquota igitur aut submultipla prodit, si magnitudo aliqua in quotcunque partes aequales dividatur. Talis pars *aliquota* distinguitur ab *aliquantis*, magnitudinem ipsam non metientibus, sed conflatis ex summa aliquot eius partium aliquotarum. Ita 4 erit pars *aliquanta* numeri 6, nempe erit eius pars tertia bis sumta. Euclidis libro VII. et sqq. partes aliquotas et aliquantas ita distinguit, ut priores simpliciter *partem*, posteriores *partes* appellet.

γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις [1].

1) Robert. Simson. persuasus de huius et sequentis octavae definitionis inutilitate, quam et Barrovius fatetur, firmiter se credere ait, eas non Euclidis esse, sed cuiusdam minus periti editoris. Eodem modo iudicat Borellius in Obs. ad axioma VI. L. III. Euclid. restitut.

DEFIN. II

Addi potest, duas magnitudines A, B duarum C, D *aequemultiplas*, aut *aequemultiplices* vocari, si maior A minorem C toties exacte continet, quoties B continet D, seu, si minor C toties praecise repetenda est, ut efficiat aequalem maiori A, quoties D repeti debet, ut efficiatur aequalis magnitudini B. Eodem casu magnitudines C, D duarum A, B *partes aequealiquotae* vocantur. Ita v. c. quum sit 15=3.5 et 20=4.5, erunt numeri 15 et 20 numerorum 3 et 4 aequemultiplices, et contra numeri 3 et 4 numerorum 15 et 20 aequealiquotae partes. Aequemultiplices autem partium aequealiquotarum duarum magnitudinum vocantur magnitudinum harum *partes aequealiquantae*. Sic 6 et 8 erunt numerorum 15 et 20 partes aequealiquantae. Partes aequealiquotas duarum magnitudinum Euclides *eandem* illarum *partem*, aequealiquantas autem *easdem partes* appellat. Quodsi eadem magnitudo minor C utramque A et B metitur, tum C *communis mensura* magnitudinum A et B vocatur. Cf. Pfleiderer Expositio ac Dilucidatio libri V. Elem. Euclid. Tub. 1782. p. 11. Peletarius vocem *multiplex* aliter intelligi vult, pariter ac vocem *pars* in Def. 1. Nempe multiplicem vocat maiorem minoris, non tantum: quum a minore ipsa, verum etiam, quum a parte aliqua minoris maior exacte mensuratur. Ita ait, 5 esse multiplicem numeri 2, esse nempe eius duplum sesquialterum: ternarium esse binarii, unitatem esse sui ipsius multiplicem. At vulgo hae voces non hoc sensu dicuntur, nec ab Euclide *ita sumtae* sunt, et multiplex semper *repetitionem* minoris, aut certe po-

3. Ratio est duarum magnitudinum homogenearum secundum quantitatem (quantuplicitatem) inter se quaedam habitudo.

sitionem *integrae* alterius (quo sensu: *simplam* dicitur), non vero positionem partis tantum minoris involvere videtur. Idem de aequemultiplis dicendum.

DEFIN. III.

„Λόγος, ratio, sensu generalissimo indicat modum quemcunque ex mutua duarum quantitatum comparatione erutum, magnitudinem unius ex magnitudine alterius determinandi seu inferendi, atque ita necessario ad duas quantitates homogeneas restringitur. Concipi autem possunt infiniti modi diversi, magnitudinem unius duorum quantorum ex magnitudine alterius determinandi. Horum simplicissimi sunt, qui quantitates ipsas immediate, absque ulla earum praevia mutatione invicem comparant, magnitudinemque unius ex altera determinant, indicando: vel quanto una alteram excedat, aut ab ea deficiat; vel quoties una alteram contineat, aut in eo insit. Posteriorem modum quantitates invicem comparandi, magnitudinemque unius ex magnitudine alterius determinandi accuratissime libro V. discutit, atque in sequentibus libris ad obiecta geometriae applicat Euclides, nulla usquam iniecta mentione expressa prioris: unde suspicari licet factum esse, ut eiusmodi rationes *geometricae;* altera autem priores, quae excessu unius magnitudinis super alteram, seu defectu unius ab altera occupantur, et quae primarum arithmetices operationum simplicium, additionis ac subtractionis obiectum constituunt, arithmeticae vocari consueverint. Caeterum neutra harum rationum ad arithmeticam vel ad geometriam seorsim pertinent; verum utraque in numeris pariter et extensis locum habet, et ambae iunctim limites fere figunt matheseos, quam vocant elementarem." Cf. Pfleiderer. l. c. p. 6. Definitio itaque haec nostra, in qua, ut semper apud Euclidem de *geometrica* tantum ratione sermo est, nihil aliud dicere videtur, quam in hac ra-

δ. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

tione disquiri, quanta sit una magnitudo comparata cum alia eiusdem generis i. e. si aliam eiusdem generis pro mensura prioris sumere velis; vel (Wallisii verbis utimur in Tract. de Algebr. Oper. T. II. p. 86.) qualiter se habeat una ad alteram quoad quantuplicitatem (πηλικότητα) considerata. Putat autem Wallisius, Euclidem dixisse potius πηλικότητα quam ποσότητα, quo facilius etiam quantitates incommensurabiles, nec eae tantum, quarum una multipla est alterius, hac voce comprehenderentur. Atque eo, quo Wallisius vult, sensu vocem πηλικότητα intelligere, suadet etiam ordo Def. 3. Post. 1. et 2. atque expressio Def. 4. 5. 7., ut observat Pfleiderer. in Promtuario Mathem. Lips. Fascic. 7. p. 259. Idem tamen addit ibidem, Fasc. 8. p. 445. vocem πηλικότης videri potius significare *quantitatem*, quo sensu occurrat apud Ptolem. Magna Syntax. L. I. p. 8. (Basil. 1538.) περὶ τῆς πηλικότητος τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν, et ita vocem interpretatos esse Clavium et Barrovium in Lection. Cantabrig. Observare tamen liceat, chordarum quoque catalogum non absolutam aliquam rectarum circulo inscriptarum quantitatem, sed semper relativam tantum, i. e. comparatam cum aliqua unitate v. c. cum radio circuli continere, ita ut doceat, quot vicibus quaeque earum hanc unitatem aut eius partes contineat, aut *quantupla* illius sit. Denique Barrow. notat l. c. p. 225. verba: πρὸς ἄλληλα significare ἀδιαφορίαν quandam, quoad situm et ordinem terminorum, ita ut utervis prior, alter autem posterior poni possit. Is autem, qui prior positus est, antecedens vulgo, qui posterior, consequens dici solet. Quod rationis genera attinet, antecedens aut maior est consequente, quae *ratio maioris inaequalitatis* vocatur, vel ei aequalis est — quae *ratio aequalitatis*, vel antecedens minor est consequente, — quae *ratio minoris inaequalitatis* appellatur. Praeterea haec genera in varias denno species dividunt, quas videre est apud Clavium aut Barrovium p. 240., quibus hic immorari nihil attinet. Antecedens autem consequentis non

4. Rationem inter se magnitudines habere dicuntur, quae multiplicatae sese superare possunt.

tantum aliquod multiplum, sed etiam eius pars aliquota aut pars aliquanta esse potest. „Numerus integer vel fractus, hique vel spurius vel verus, qui indicat, quoties antecedens contineat consequentem, *exponens rationis* vocatur. Praeterea autem occurrunt magnitudines eiusdem generis, e. g. lineae, quarum maior nec ipsa, nec ullum eius multiplum, minoris cuipiam multiplo aequatur. Eiusmodi magnitudines, mensuram quippe communem nullam habentes, *incommensurabiles* vocantur. Ratio igitur istiusmodi duarum magnitudinum assignari numeris nequit, quare etiam *irrationales* vocantur: limites tamen exponentis huius definiri possunt, qui invicem minus differant, quam dato numero fracto quocunque; seu duo assignari possunt multipla immediate contigua magnitudinis unius, quae sint limites multipli cuiuscunque dati magnitudinis alterius; hoc est, quorum unum dato hoc multiplo minus sit, alterum maius.“ Pfleiderer Expos. ac Dilucid. L. V. p. 7. Atque haec quidem causa fuisse videtur Euclidi, cur in sequentibus nunquam definitionem V. 3., si modo ea genuina sit, in ulla demonstratione adhiberet, sed quartam insuper adderet. „Nihil forte aliud, Barrovii verba sunt p. 230. in definitione 3. tradenda, Euclidi propositum fuit, quam ut methodi plenioris, aut ornatus qualiscunque causa, praeludens scilicet accuratioribus istis eiusdem, maioris et minoris rationis definitionibus mox subiungendis, *generalem quandam* et *ὁλοσχερῆ τοῦ λόγου* ideam discentium insinuaret animis per metaphysicam hanc definitionem, metaphysicam dico, nec enim proprie mathematica est, cum ab ea nihil quicquam dependeat aut deducatur a mathematicis, neo, ut existimo, deduci possit. Cuiusmodi quoque censeri potest posthac tradita definitio analogiae: analogia est rationum similitudo, quae nulli mathematico deserviat usui, nec alio opinor fine proponitur, quam ut per eam generalis quaedam analogiae notio, crassa licet et confusa tyronibus indatur. Definitionibus autem ex-

ε. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκατέρον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

ϛ. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη, ἀνάλογον καλείσθω.

quisitis, mox ab illo subiunctis tota rationum doctrina, tota res mathematica subnititur; ad illas igitur potissimum attendi debet, per illas rationum doctrina perfectius elucescit: haec et consimiles absque notabili matheseos detrimento prorsus omitti possent: sicut in Elem. VII. factum videmus, ubi numerorum analogia definitur et pertractatur, nulla tamen rationis numero competentis exhibita definitione; quamvis illic aeque necessaria fuit et utilis talis definitio, atque hic est, sed neutro loco magna fuit necessitas." Unde et Rob. Simsonem has definitiones pro spuriis habuisse diximus. Et cum Rob. Simson. consentit Pfleiderer. l. c. p. 9., qui observat, Euclidem hac definitione non solum nusquam in sequentibus uti, verumetiam uti ob vagam, quam offerat, notionem non potuisse.

DEFIN. IV.

Sive genuina sit definitio 3., sive spuria, Euclidi certe ob eas, quas diximus, causas non ex omni parte satisfacere poterat. Hinc definitionem 4. vel priori adiunxisse vel solam dedisse censendus est, qua non tam rationis geometricae rationem ipsam explicare, quam characterem distinctivum magnitudinum, quas vocant, homogenearum, et quae terminos rationis alicuius constituere possunt, assignare volebat: ita tamen, ut simul innueret, quid in illis, quatenus ratio earum geometrica spectatur, praecipue sit considerandum. Accuratiorem notionis evolutionem definitionibus identitatis ac diversitatis rationum reservavit. Cf. Pfleiderer. l. c. p. 8. Caete-

5. In eadem ratione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primae et tertiae aeque multiplices, secundae et quartae aeque multiplices, iuxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una aequales sunt, vel una deficiunt inter se comparatae.

6. Magnitudines autem eandem rationem habentes proportionales vocentur.

rum Campanus hanc definitionem non habet, eius loco autem aliam haud satis claram, qua quantitates continue proportionales explicare studet. Quo magis confirmare videtur, quod Barrovius monet, qui p. 277. ita habet: „Non diffiteor, elementi quinti definitiones attentius inspectanti, nonnihil in iis exscriptorum culpa videri transpositum ac immutatum."

DEFIN. V.

Male omnino hanc definitionem intellexit Campanus, qui eius sensum ita explicat: proportio primae ad secundam est sicut tertiae ad quartam, cum sumtis aequemultiplicibus ad primam et tertiam, itemque aequemultiplicibus ad secundam et quartam, erit proportio multiplicis primae ad multiplex secundae, sicut multiplex tertiae ad multiplex quartae. Hoc enim, ut Campanus ipse ad definitionem praecedentem observat, esset idem per idem definire, nec illud vitium corrigeretur, si verborum Euclidis, quamvis non aperte idem dicerent, is tamen sensus esset. Falsam hanc Campani interpretationem sequitur etiam Orontius Finaeus. Iure autem id absurdum esse, Clavius ait. Nec melius Euclidis sensum assecutus est Ramus, qui vel eodem modo ac Campanus, rem interpretatur, vel definitionem Euclidis pro falsa haberi posse putat, quoniam v. e. si quatuor numeri sint 4, 3, 5, 4, et sumatur primi et tertii sexuplum 24, 30, secundi et quarti autem nonuplum 27, 36, sit simul $24<27$, et $30<36$, adeoque putare quis possit, esse $4:3=5:4$, ubi prorsus oblivi-

ζ΄ Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τό τε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

ἡ. Ἀναλογία δὲ ἐστιν ἡ τῶν λόγων ταυτότης [1]).

θ΄. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν [2]).

1) Haec definitio in edd. Oxon. et Basil. est octava, atque ita nos restituimus. Praeterea in his edd. loco: ταυτότης legitur: ὁμοιότης. Peyrardus secutum se esse ait Codd. a. et c. i. e. 190. et 1038., et huic definitioni quartum locum assignat. Et apud Campanum etiam est haec definitio 4., pariterque apud Zambertum et Clavium.

2) Ita melius Peyrardus e Cod. a. quam edd. Basil. et Oxon. quae legunt: ἐλαχίστοις. Cf. quae infra ad hanc definitionem monebimus.

eitur verborum, quae in Euclidis definitione sunt: καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν. Quodsi enim v. c. sumtum fuerit in iisdem numeris primi quidem et tertii sexuplum 24, 30, secundi autem et quarti octuplum 24, 32, erit quidem 24 = 24, at 30 < 32, unde patet, quatuor numeros 4, 3, 5, 4 non esse proportionales. Nempe tum saltim erit proportio, si in aequemultiplis *quibuscunque* locum habet, quod in definitione dicitur, ut iam Candalla respondit ad istam obiectionem. Plura, quae ad hanc definitionem, et ad V. 7. Def. pertinent, vide in Excursu ad finem huius libri.

DEFIN. VIII.

Barrovius notat l. c. p. 275. melius forte pro ὁμοιότης aut ταυτότης dici posse ἰσότης. Similitudinem enim verbum esse laxius et magis ambiguum, et identitatem haud optime quadrare rebus actu diversis immediate qua talibus, et sub diversorum ratione comparatis; praeterea rationum habitudines alias, hyperlogiam nimirum et hypologiam non ex dissi-

7. Quando vero aeque multiplicium, primae quidem multiplex superat multiplicem secundae, multiplex vero tertiae non superat multiplicem quartae, tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicitur, quam tertia ad quartam.

8. Proportio autem est rationum identitas.

9. Proportio in tribus ad minimum terminis consistit.

militudine vel diversitate, sed ex inaequalitate denominari maioritatem et minoritatem; denique rationum aequalium denominatores, a quibus rationes habeant, quod ullatenus inter se comparentur, non eosdem, aut similes, sed aequales esse. De latina voce *proportio* idem observat p. 194. sqq. reperiri eam a Cicerone aliquoties usurpatam, quanquam non sensu exacte eodem. Aliasi enim apud ipsum idem valere videri, quod simplex ratio, nonnunquam vero rationum similitudinem vel analogiam designare, primumque videri illum ipsum eius usum adinvenisse, saltim ad res mathematicas primum applicuisse. Sic in fragmento, quod Timaeus inscribitur, eum dicere „graecorum *ἀναλογία* (audendum est enim, quoniam haec primum a nobis novantur) comparatio, proportiove dici potest." Eius autem effingendae hinc acceptam videri originem vel occasionem. Cum in corrogandis vectigalibus, vel importandis oneribus publicis, pro facultatum modo, secundum aequas leges taxato, sua cuique pars persolvenda cesserit, quae nempe rata cuiusque portio dicta sit; hinc unumquemque solvere dictum pro portione, vel pro rata sua portione: hinc emersisse vocabulum proportio, dignum visum Ciceroni, quum graecas litteras suo donare Latio studeret, quod *λόγον* et *ἀναλογίαν*, obvias Platonem et alios graecos philosophos inspectanti voces, referret et exprimeret. — Caeterum, uti rationes alias dicunt arithmeticas, alias geometricas, ita simili modo proportiones alias vocare solent arithmeticas, eas

ί. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ιά. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη (συνεχὲς) [1]) ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως ὡς [2]) ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

1) Vocem συνεχὲς, quamvis in nullo codice reperiatur, addidimus, quod monente Rob. Simson. omnino necessaria est, et in XI. 33. ita citatur.

2) Ita Peyrardus e Cod. a. Edd. Basil. et Oxon. contra: καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἐνὶ πλεῖον, ἕως ἂν, quod nescio an non sit praeferendum. Caeterum definitioni 11. Rob. Simson. subiungit aliam praecedentibus analogam, qua ratio composita explicatur. Aliam quidem rationis compositae definitionem vulgo habent in VI. Def. 5. ubi plura videbimus.

nempe, quibus prima magnitudo secundam eodem excedit, quo tertia quartam; alias geometricas, de quibus solis Euclidi tum in omni opere, tum hic potissimum et in V. 3. Def. sermo est. His postea addiderunt, quod verbo indicasse sufficiat proportiones harmonicas, seu musicas. Dicunt nempe, tres magnitudines A, B, C esse *harmonice continuae* proportionales, si *geometrica* ratio primae ad tertiam aequalis sit *geometricae* rationi excessus (secundae super primam) / (primae super secundam) ad excessum (tertiae super secundam) / (secundae super tertiam), i. e. si sit $A : C = \frac{(B-A).(C-B)}{(A-B).(B-C)}$ v. c. in numeris 3, 4, 6, quum sit $3:6 = 4-3:6-4$. Eodem modo quatuor magnitudines A, B, C, D harmonice proportionales esse dicunt, si fuerit $\frac{(A-B).(C-D)}{(B-A).(D-C)} = A : D$. Rationem huius denominationis vide v. c. in Klügels mathem. Wörterb. ad vocem: Harmon. Proportion.

DEFIN. IX.

Haud satis clare patet, quid verba huius definitionis sibi velint, quae edd. Basil. et Oxon. ita proferunt: Ἀναλογία ἐν

10. Si autem tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur, eius quam habet ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines (deinceps) proportionales sint, prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius quam habet ad secundam; et semper deinceps similiter quamdiu proportio exstiterit.

τριοὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν. Quid enim *termini minimi* sibi velint, incertum videri possit. Candalla quidem explicat ἐλαχίστοις *saltim*, atque eodem modo Peletarius et Gregorii ponunt: *minimum* vel *ad minimum*, quam ipsam interpretationem habent etiam Ambros. Rhodius, Baermannus, Rob. Simson. aliique. Recte illi quidem, quoad sensum, an tamen vox ἐλαχίστοις grammatice id significari possit, valde dubitamus. Hinc praeferendam putavimus lectionem Peyrardi: ἐλαχίστη, quae facilius certe ac illa altera significare posse videtur, proportionem, quum illa minima i. e. minimis terminis expressa sit, vel, ut aliter dicamus, *ad minimum* tres continere terminos. Simplicissimum forte fuerit, in graeco quoque ponere: ἐλάχιστα, idque adverbialiter sumere. Quod deinde vocem ὅροις attinet, ea ipsa quoque, ut Candalla monet, improprie hic sumta est. Nempe in omni ratione duo omnino termini, alter antecedens, alter consequens adesse debet, adeoque, quum duae rationes inter se comparantur, ut fit in analogia, *proprie quatuor* omnino termini aderunt, quamvis, ut fit in proportione continua, eadem magnitudo, quae efficit terminum consequentem prioris rationis, efficere simul possit terminum antecedentem posterioris, ubi deinde *improprie* tres saltim terminos dicere possis, quum potius tres magnitudines, quarum secunda bis ponitur, quatuor etiam nunc terminos efficiant. Forte itaque pro ὅροις ponendum fuerit μεγέθεων, qua voce Euclides etiam alias, ubi de rationibus sermo est, utitur. Et usus ille vocis ὅροι, quo terminos rationis significat, forte sequioris saltim aevi fuerit. Cf. Pfleiderer. in

ιβ'. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

ιγ'. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

Schol. ad libr. VI. Elem. Euclid. §. 132. et, qui ab eo citatur, Isaac. Barrov. (Lection. Cantabrig. habitae 1666. p. 197. sq. et p. 214.). Hinc omnis haec definitio Pfleiderero l. c. suspecta est. Quum tamen sequens definitio 10. se ad eam referre videatur, possis fortasse eam, ita, uti diximus, mutatam aut intellectam retinere.

DEFIN. X. XI.

Post has definitiones locum proprium fuisse definitionis rationis compositae Rob. Simson. recte monet. Caeterum Clavius observat, probe distinguendum esse inter rationem duplam et duplicatam, triplam et triplicatam etc. Et Euclides quoque semper dicit λόγος διπλασίων, non, ut de recta aut angulo διπλάσιος aut δίπλος. Quodsi igitur fuerint magnitudines A, B, C, D, E etc. continue proportionales i. e. ita, ut A : B = B : C = C : D = D : E etc. ratio A : C duplicata dicitur rationis A : B, quoniam inter A et C duae rationes ponuntur, quae aequales sunt rationi A ad B: eodem modo ratio A : D triplicata dicitur rationis A : B etc. Contra, eodem casu, ratio A : B dicitur subduplicata rationis A : C; eodemque modo ratio A : B subtriplicata dicetur rationis A : D, subquadruplicata rationis A : E etc. Pariter, si fuerit A : B = B : C, sitque M : N = A : C, etiam M : N dicetur aequalis rationi, quae duplicata est rationis A : B, vel brevitatis causa ratio M : N dicetur duplicata rationis A : B, idemque valebit in ratione triplicata, quadruplicata etc. Eodem modo, si sit A : B = B : C et P : Q = A : B, dicetur P : Q ratio, quae eadem est subduplicatae rationis A : C, vel brevius P : Q dicetur subduplicata rationis

12. Homologae magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

13. Alterna (permutata) ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem.

A : C, atque ita in reliquis. Ratio duplicata, triplicata etc. species tantum sunt rationis compositae, in quibus nempe singulae rationes, ex quibus aliae componuntur, inter se aequales sunt. Unde ea omnia, quae ex definitione rationis compositae consequuntur (vide infra in Exc. ad libr. VI.) et applicari possunt ad rationem duplicatam, triplicatam etc. etiam de hac valent. Nominatim, ut hoc non demonstrationis caussa, quae in locis citatis infra habetur, sed in antecessum, ut aiunt, dicamus, rationum inter se earundem duplicatae (triplicatae etc.) sunt pariter inter se eaedem (Excurs. in libr. VI. §. 9. et infra Cor. ad V. 22.) et vice versa, rationum inter se earundem subduplicatae, subtriplicatae sunt inter se eaedem (vid in Exc. ad Libr. V. Cor. ad Prop. m.). Et si, quando id fieri potest, numeris exprimantur rationes duplicatae, triplicatae etc. erit (Exc. ad Libr. VI. §. 7.) exponens rationis duplicatae (triplicatae) numerus quadratus (cubus) multiplicatione denominatoris rationis simplicis per se ipsum factus, vel ratio duplicata (triplicata) eadem est rationi quadratorum (cuborum) eorum numerorum, qui rationem simplicem exhibent. Porro, si A : C est ratio duplicata (triplicata) rationis A : B, inverse erit C : A ratio duplicata (triplicata) rationis B : A (Exc. ad Libr. VI. §. 17.) etc. Caeterum apud ipsum Euclidem nulla rationis duplicatae etc. mentio fit ante VI. 19.

DEFIN. XIII.

Quae hic alterna ratio dicitur, melius forsan alterna *proportio* diceretur. Manifesto enim non de duabus saltim quantitatibus, sed de quatuor sermo est. Caeterum patet, ut quan-

ιδ'. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

ιέ. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιϛ'. Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιζ. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει τὰ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

ιή. Δίἴσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾗ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Ἢ ἄλλως. Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ιθ'. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾗ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾗ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι [1]).

κ'. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος,

1) Peyrardus refert, hanc definitionem omitti a Codd. a. c. quod, quum perturbata ratio postea tamen occurrat, mera librarii oscitantia, cuius oculus a τεταγμένη in τεταραγμένη aberrabat, factum fuisse videtur.

titates ita alterne comparare possint, omnes quatuor eiusdem generis esse debere.

DEFIN. XVI. et XVII.

Manifestum est, sumi in his definitionibus, consequentem

14. Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem ut ad consequentem.

15. Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius ad ipsam consequentem.

16. Divisio autem rationis est sumptio excessus, quo superat antecedens consequentem, ad ipsam consequentem.

17. Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens superat consequentem.

18. Ex (aequo) aequalitate ratio est, quando, pluribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis numero aequalibus, et in eadem ratione binis sumptis, est, ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. Vel aliter. Sumptio extremarum per substractionem mediarum.

19. Ordinata proportio est, quando est ut antecedens ad consequentem ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

20. Perturbata autem proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis numero ae-

minorem esse antecedente. Quodsi contra consequens maior fuerit antecedente, similis erit argumentatio, si sumatur excessus, quo consequens superat antecedentem.

DEFIN. XVIII—XX.

Monente Rob. Simson. Def. 19. et 20. speciem tantum continent eius proportionis, quae Def. 18. explicatur. Unde forte coniicere liceat, in Def. 18. quoque pro λόγος legendum esse ἀναλογία. Erit igitur ex Def. 19. τεταγμένη sive διῆσον

γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλό τι πρὸς ἡγούμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ά.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι

τεταγμένη ἀναλογία, sive simpliciter διῖσον, quando fuerit (prorsus ut in Def. 18.) prima ad secundam in primis quantitatibus, ut in secundis prima ad secundam; ut autem in primis, secunda ad tertiam, ita in secundis, secunda ad tertiam, et ita deinceps, et *concluditur*, ut in Def. 18. dictum est. Vide V. 22. Ex Def. 20. autem διῖσον τεταραγμένη, vel simpliciter τεταραγμένη ἀναλογία est, quando in primis magnitudinibus fuerit ut prima ad secundam, ita in secundis penultima ad ultimam; ut autem in primis secunda ad tertiam, ita in secundis antepenultima ad penultimam; et ut in primis tertia ad quartam, ita in secundis quae antepenultimam praecedit ad antepenultimam, et ita deinceps, et *concluditur*, *ut in Def.* 18. Vide V. 23. Ita fere Rob. Simson. rem explicat.

ΑΧΙΟΜΑΤΑ.

Sequentia praemittit Rob. Simson. et ex eo Playfair.

1. Eiusdem sive aequalium aequemultiplices inter se aequales sunt.

2. Quarum eadem aeque multiplex est, vel quarum aequales sunt aeque multiplices, et ipsae inter se sunt aequales.

qualibus, fit, ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem; ut vero in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis magnitudinibus alia quaepiam ad antecedentem.

PROPOSITIO I. (Fig. 309.)

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum aequalium multitudine, singulae singularum aeque multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB, $\Gamma\Delta$ quotcunque magnitudinum E, Z aequalium multitudine, singulae singularum aeque multiplices, dico quam multiplex est

3. Multiplex maioris maior est aequemultiplici minoris.

4. Magnitudo, cuius multiplex maior est aequemultiplici alterius, maior est altera illa magnitudine.

Quae sane ita perspicua sunt, ut axiomatum loco haberi possint. Demonstravit ea tamen Pfleiderer. in Promptuario Mathem. Lipsiensi Fascic. 7. 1798. p. 263. sqq. §§. 14—19. et in dissertatione de Dimensione circuli P. II. Tub. 1790. p. 5. not. 4. Cf. Hauber. de rationibus inter se diversis Demonstr. Tub. 1793. §. 2. Aliud autem axioma vel postulatum, quod Campanus, Clavius aliique complures pariter sumere se posse putarunt, quodque ita habet:

„Quam rationem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quaevis magnitudo proposita ad aliquam aliam; et eandem habebit quaedam alia magnitudo ad quamvis magnitudinem propositam"

merito accuratiores Geometrae respuunt. Vid Exc. ad hunc librum.

PROPOSITIO I.

Symbolice haec propositio ita efferri potest. Si sit $A=$

τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Ζ. Διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Ε μεγέθη ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΒ, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΓΘ, ΘΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΑΗ, ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ· ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ ἴσα τοῖς Ε, Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

r.L; B=r.M; C=r.N etc. r denotante numerum integrum quemcunque, erit et A+B+C etc. =r(L+M+N etc.). Caeterum propositioni huic vulgaris innititur praxis multiplicandum compositum per multiplicatorem simplicem multiplicandi. Nimirum, ut v. g. numerum 7364 per 8 multiplicemus, seu ut octuplum efficiamus numeri 7364: octies sumimus primum 4 unitates, tum 6 denarios, deinde 3 centenarios, denique 7

AB ipsius *E*, tam multiplices esse et *AB*, *ΓΔ* ipsarum *E*, *Z*.

Quoniam enim *AB* aeque multiplex est ipsius *E* ac *ΓΔ* ipsius *Z*; quot magnitudines sunt in *AB* aequales ipsi *E*, tot sunt et in *ΓΔ* aequales ipsi *Z*. Dividatur *AB* quidem in magnitudines *AH*, *HB* aequales ipsi *E*, *ΓΔ* vero in partes *ΓΘ*, *ΘΔ* aequales ipsi *Z*; erit igitur multitudo ipsarum *AH*, *HB* aequalis multitudini ipsarum *ΓΘ*, *ΘΔ*. Et quoniam aequalis est *AH* quidem ipsi *E*, *ΓΘ* vero ipsi *Z*; erunt et *AH*, *ΓΘ* aequales ipsis *E*, *Z* (I. Ax. 2.); ex eadem ratione et *HB* aequalis est ipsi *E*, et *ΘΔ* ipsi *Z*; aequales igitur et *HB*, *ΘΔ* ipsis *E*, *Z*; quot igitur sunt in *AB* aequales ipsi *E*, tot sunt et in *AB*, *ΓΔ* aequales ipsis *E*, *Z*; quam multiplex igitur est *AB* ipsius *E*, tam multiplices erunt et *AB*, *ΓΔ* ipsarum *E*, *Z*. Si igitur quotcunque etc.

PROPOSITIO II. (Fig. 310.)

Si prima secundae aeque sit multiplex ac tertia quartae, sit autem et quinta secundae aeque multiplex ac sexta quartae; et simul sumptae prima et quinta secundae aeque erunt multiplices ac tertia et sexta quartae.

millenarios, horumque octuplorum conficimus summam. Cf. Pfleiderer. Expos. et Dilucid. Libri V. Elem. p. 2.

PROPOSITIO II.

Symbolice haec propositio generalius ita effertur. Si sit A=p.L, B=g.L, C=r.L etc. et simul E=p.M, Γ=g.M, G=r.M etc. p, g, r denotantibus numeros integros quoscun

τερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. Διῃρήσθω τὸ μὲν ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλήθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ· ἐστὶ δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ· καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου

alter n continet unitates. Huic propositioni, quod sit nA, seu n(pL)=(n.p).L, innititur praxis multiplicandi numerum integrum per multiplicatorem, qui solis denariis, vel centenariis etc. constat. Nempe, ut v. g. numerum 5728 per 30 vel per 600 multiplicemus, triplo vel sextuplo numeri 5728 unum vel duo zero ad dextram adiungimus, hoc est, triplum numeri 5728 decuplicamus, sextuplum centuplicemus, sicque huius numeri efficimus trigecuplum, sexcentuplum. Pariter

que erit multiplex, altera quidem secundae, altera vero quartae.

Prima enim A secundae B aeque sit multiplex ac tertia Γ quartae Δ, et sumantur ipsarum A, Γ aeque multiplices EZ, $H\Theta$; dico aeque esse multiplicem EZ ipsius B ac $H\Theta$ ipsius Δ.

Quoniam enim aeque est multiplex EZ ipsius A ac $H\Theta$ ipsius Γ; quot magnitudines sunt in EZ aequales ipsi A, tot et in $H\Theta$ erunt aequales ipsi Γ. Dividatur EZ quidem in magnitudines ipsi A aequales EK, KZ, $H\Theta$ vero in magnitudines ipsi Γ aequales $H\Lambda$, $\Lambda\Theta$; erit aequalis multitudo ipsarum EK, KZ multitudini ipsarum $H\Lambda$, $\Lambda\Theta$. Et quoniam A aeque est multiplex ipsius B, ac Γ ipsius Δ; aequalis autem EK quidem ipsi A, $H\Lambda$ vero ipsi Γ; aeque multiplex est EK ipsius B ac $H\Lambda$ ipsius Δ. Ex eadem ratione aeque multiplex est KZ ipsius B ac $\Lambda\Theta$ ipsius Δ. Quoniam igitur prima EK secundae B aeque est multiplex ac tertia $H\Lambda$ quartae Δ, est autem et quinta KZ secundae B aeque multiplex ac sexta $\Lambda\Theta$ quartae Δ; et composita e prima et quinta nempe EZ secundae B aeque multiplex erit ac composita e

duodecuplum e. g. numeri alicujus efficimus, sumto tripli cius quadruplo, vel quadrupli triplo. Cf. Pfleiderer. l. c. p. 4. Generalius idem theorema ita exprimi et simili ratione demonstrari poterit: si sit $A=mB$, $B=nC$, $C=pD$ etc. pariterque $\alpha=m\beta$, $\beta=n\gamma$, $\gamma=p\delta$ etc. erit tam $A=mnp \ldots D$ quam $\alpha=mnp \ldots \delta$.

Obs. Ex hac propositione sequitur etiam alia illi similis, quam Nordmark. (Lacunae in Doctr. proportionum Euclidea

τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν [1]) ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσά-

1) Verba ἄλλα ἃ ἔτυχεν non habent edd. Basil. et Oxon. Ea autem necessaria esse iure censuerat Rob. Simson. in nota ad hunc locum. Hanc viri doctissimi coniecturam confirmavit Peyrardus, qui e Cod. a. ea textui inseruit.

animadversae Expletio in Nov. Act. Reg. Societ. Upsal. Vol. VI. Upsaliae 1799.) his verbis exhibet et demonstrat: si sint (Fig. 312.) quotcunque magnitudines AL, B, C, et aliae ipsis

tertia et sexta nempe $H\Theta$ quartae Δ (V. 2.). Si igitur prima etc.

PROPOSITIO IV. (Fig. 313.)

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; et aeque multiplices primae et tertiae ad aeque multiplices secundae et quartae, iuxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem inter se comparatae.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, et sumantur ipsarum quidem A, Γ aeque multiplices E, Z, ipsarum vero B, Δ aliae utcunque aeque multiplices H, Θ; dico esse ut E ad H, ita Z ad Θ.

Sumantur enim ipsarum quidem E, Z aeque multiplices K, Λ, ipsarum vero H, Θ aliae utcunque aeque multiplices M, N.

Et quoniam aeque multiplex est E ipsius A, atque Z ipsius Γ, et sumptae sunt ipsarum E, Z aeque multiplices K, Λ; aeque igitur multiplex est K ipsius A ac Λ ipsius Γ (V. 3.). Ex eadem ratione aeque

numero aequales D, E, F, quae binae sumantur in eadem multiplicitate, sit autem perturbata earum multiplicitas, h. e. sit AL ipsius B aeque multiplex, atque E ipsius F; similiter sit B ipsius C totuplex, quotuplex est D ipsius E: erunt ex aequo etiam aequemultiplices, seu quantuplex est AL ipsius C, tantuplex erit D ipsius F. Dem. Ponantur primo tres esse utrimque magnitudines. Sumatur GP ipsius C aequemultiplex,

μις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Δ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει τὸ Λ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν Κ, Λ τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Η, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ. Εἀν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι, εἰ ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Κ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ν τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἔσται καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Ζ. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

ac est AL ipsius B, vel E ipsius F, sitque GP divisa in partes GM, MN, NP singulas ipsi C aequales; et AL in partes AH, HK, KL aequales ipsi B: eritque multitudo partium GM, MN, NP aequalis multitudini partium AH, HK, KL.

multiplex est M ipsius B ac N ipsius Δ. Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ, et sumptae sunt ipsarum quidem A, Γ aeque multiplices K, Λ, ipsarum vero B, Δ aliae utcunque aeque multiplices M, N; si K superat ipsam M, superat et Λ ipsam N; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor erit (V. Def. 5.). Et sunt K, Λ ipsarum E, Z aeque multiplices, M, N vero ipsarum H, Θ aliae utcunque multiplices; est igitur ut E ad H, ita Z ad Θ (V. Def. 5.) Si igitur prima etc.

COROLLARIUM.

Quoniam igitur ostensum est, si superat K ipsam M, superare et Λ ipsam N; et si aequalis sit, aequalem; et si minor, minorem esse; manifestum est, et si M superat K, superare et N ipsam Λ; et si aequalis sit, aequalem; et si minor, minorem esse; et propterea ut H est ad E, ita erit Θ ad Z. Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines proportionales sint, et inverse proportionales fore.

PROPOSITIO V. (Fig. 314.)

Si magnitudo magnitudinis aeque sit multiplex ac ablata ablatae, et reliqua reliquae aeque multiplex erit ac multiplex est tota totius.

Quum igitur sit AH=HK=KL=B, et GM=MN=NP=C; erunt AH, HK, KL, B ipsarum GM, MN, NP, C aequemultiplices, adeoque tota AL erit totius GP aequemultiplex atque AH est ipsius GM (V. 1.), vel B ipsius C, vel D

Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ὁσαπλάσιον γὰρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ (καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ) [1]) καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ· κείται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τῷ ΗΓ τὸ ΔΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ·

1) Verba, quae uncis inclusimus, desunt in edd. Basil. et Oxon. Peyrardus ea e Cod. a. addidit. Quamvis autem abesse possint, aliquid tamen ad facilius intelligendam demonstrationem facere videntur.

ipsius E. Habentur igitur tres magnitudines AL, GP, C, atque aliae ipsis numero aequales D, E, F, quarum binae sumtae sunt in eadem multiplicitate, idque ordinate, ita nempe, ut AL et D sint ipsarum GP et E aequemultiplices, similiterque GP et E ipsarum C et F: ergo (V. 3.) erit AL ipsius C aequemultiplex ac D ipsius F. Si quatuor pluresve sint utrimque magnitudines, patet demonstrationis continuatio per iam ostensa. Q.E.D. Symbolice ita: si sit A=mB, B=rC, pariterque D=rE, E=mF, erit tam A=mr.C, quam D=mr.F.

Magnitudo enim AB magnitudinis $\Gamma\Delta$ aeque multiplex sit ac ablata AE ablatae ΓZ; dico et reliquam EB reliquae $Z\Delta$ aeque fore multiplicem ac multiplex est tota AB totius $\Gamma\Delta$.

Quam multiplex enim est AE ipsius ΓZ, tam multiplex fiat et EB ipsius ΓH.

Et quoniam aeque multiplex est AE ipsius ΓZ ac EB ipsius $H\Gamma$; aeque igitur multiplex est AE ipsius ΓZ ac AB ipsius HZ (V. 1.); ponitur autem aeque multiplex AE ipsius ΓZ ac AB ipsius $\Gamma\Delta$; aeque igitur multiplex est AB utriusque ipsarum HZ, $\Gamma\Delta$; aequalis igitur HZ ipsi $\Gamma\Delta$. Communis auferatur ΓZ; reliqua igitur $H\Gamma$ reliquae ΔZ est aequalis (I. Ax. 3.). Et quoniam aeque multiplex est AE ipsius ΓZ ac EB ipsius $H\Gamma$, ΔZ autem aequalis ipsi $H\Gamma$; aeque igitur multiplex est AE ipsius ΓZ ac EB ipsius $Z\Delta$. Aeque autem ponitur multiplex AE ipsius ΓZ ac AB ipsius $\Gamma\Delta$; aeque igitur multiplex est EB ipsius

PROPOSITIO IV.

Symbolice haec propositio, eiusque demonstratio ita exprimi poterit. Si $A:B=C:D$, erit etiam $pA.qB=pC:qD$; p, q denotantibus numeros integros quoscunque, unitate haud exclusa. Nam ob $A:B=C:D$, erit, quoties $npA>=<rqB$, etiam $npC>=<rqD$ (V. Def. 5.), adeoque ex eadem definitione $pA:qB=pC:qD$. Pfleiderer. l. c. p. 19. De demonstratione huius propositionis ex vulgari proportionalium definitione vide Excursum ad hunc librum.

Corollarium huic propositioni adiectum, ut rite observat Rob. Simson., verum quidem est, at non huc pertinet, nec legitima est, quae ex Prop. V. 4. deducitur, eius demonstratio. Nempe ostensum quidem est, si sit $K>=<M$, esse etiam $\Delta>=<N$, at non ex eo, quod proportionales sint

καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα μέγεθος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια,

Ε, Η, Ζ, Θ, id enim erat conclusio propositionis, unde ineptum est illud ratiocinium: Quoniam ostensum est etc. Poterat autem legitime, non adhibita propositione V. 4. propositio in hoc corollario contenta deduci, ut Rob. Simson. ostendit. Nos autem hanc reliquasque a Rob. Simson. huic libro insertas vel adiectas propositiones exhibebimus infra in Excursu ad hunc librum, ubi et hanc vide nota B designatam. Aliam autem propositionem meliore iure corollarii nomine subiungit Rob. Simson., quod distinctionis causa

Cor. a.

appellabimus, quodque ita habet: si prima ad secundam eandem habet rationem quam tertia ad quartam, et aeque multiplices primae et tertiae iuxta quamvis multiplicationem ad secundam et quartam eandem rationem habebunt: et similiter prima et tertia ad aeque multiplices quasvis secundae et quartae eandem habebunt rationem. Quod eodem prorsus modo ac ipsa propositio demonstratur, ut facile etiam patet, posita in symbolica propositionis expressione, quam supra dedimus, vel p=1, vel q=1. Hoc corollarium ex V. 22. demonstrat Cla-

$ZΔ$ ac AB ipsius $ΓΔ$; et reliqua igitur EB reliquae $ZΔ$ aeque multiplex erit ac multiplex est tota AB totius $ΓΔ$. Si igitur magnitudo etc.

PROPOSITIO VI. (Fig. 316.)

Si duae magnitudines duarum magnitudinum aeque multiplices sint, et ablatae quaedam earumdem sint aeque multiplices; et reliquae iisdem vel aequales sunt, vel earum aeque multiplices.

Duae enim magnitudines AB, $ΓΔ$ duarum magnitudinum E, Z aeque sint multiplices, et ablatae AH, $ΓΘ$ earumdem E, Z aeque sint multiplices; dico et reliquas HB, $ΘΔ$ ipsis E, Z vel aequales esse, vel aeque multiplices earum.

vius, at non satis accurate. Sumit enim propositionem C (in Excursu ad hunc librum afferendam), quam non ante demonstraverat.

PROPOSITIO V.

Iure observat Rob. Simson., constructionem, quae demonstrationi in textu graeco praemittitur, depravatam videri. Nempe, ut iam Peletarius monuerat, id quod sumitur, ut EB fiat aequemultiplex ipsius $ΓH$, ac est AE ipsius $ΓZ$, eo redit, ut magnitudo EB in partes aequales, quotcunque libuerit, dividatur, quod nec de rectis quidem lineis, nedum de aliis magnitudinibus ante VI. 9. docuerat Euclides. Nec ad excusationem rei sufficit, quod Peletarius observat divisionem hanc rectae EB demonstrationis caussa tantum sumi, non ad usum aliquem praesentem adhiberi, quippe etiam demonstrationis caussa talia non sumere solet Euclides. Accedit, quod perfacilis est alia demonstratio, quam iam Campani ex arabico facta traductio, caeterum in hac propositione valde vitiosa, innuit, et quam, praeeunte Peletario et Clavio, qui tamen etiam vitiosam illam vulgarem demonstrationem habent,

Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστίν. Κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. Ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. Ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῆς ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τῷ Ζ τὸ ΚΓ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν. Ὥστε εἰ τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστί, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.

Rob. Simson., praemisso propositionis enunciato his verbis exhibet: Quam multiplex est (Fig. 315.) AE ipsius ΓZ, tam multiplex fiat AH ipsius ZΔ. (Hoc vero fieri potest, magnitudine ZΔ sibi ipsi aliquoties addita). Erit igitur (V. 1.) AE aequemultiplex ipsius ΓZ, tac EH ipsius ΓΔ; ponitur autem AE aequemultiplex ipsius ΓZ, ac AB ipsius ΓΔ: ac propterea EH ipsi AB aequalis est (V. Ax. 1.). Communis auferatur AE, reliqua igitur AH aequalis est reliquae EB. Itaque, quoniam AE aequemultiplex est ipsius ΓZ, atque AH ipsius ZΔ, estque AH aequalis EB; erit AB aequemultiplex ipsius ΓZ, ac EB ipsius ZΔ. Aeque multiplex autem ponitur AE ipsius ΓZ, ac AB ipsius ΓΔ; ergo EB ipsius ZΔ aequemultiplex est ac AB ipsius ΓΔ. Quare, si etc. Symbolice propositio ita exprimetur: si sint mA, mB quaecunque aequemultipla magnitudinum A, B, quarum A>B, erit etiam mA—mB idem multiplum magnitudinis A—B, nempe erit mA—mB=m.(A—B).

Sit enim primum (Fig. 316. a.) HB ipsi E aequalis; dico et $\Theta\Delta$ ipsi Z aequalem esse. Ponatur enim ipsi Z aequalis ΓK.

Et quoniam aeque multiplex est AH ipsius E ac $\Gamma\Theta$ ipsius Z, aequalis autem HB ipsi E, $K\Gamma$ vero ipsi Z; aeque igitur multiplex est AB ipsius E ac $K\Theta$ ipsius Z. Aeque autem multiplex ponitur AB ipsius E ac $\Gamma\Delta$ ipsius Z; aeque igitur multiplex est $K\Theta$ ipsius Z ac $\Gamma\Delta$ ipsius Z. Et quoniam utraque ipsarum $K\Theta$, $\Gamma\Delta$ ipsius Z aeque multiplex est; aequalis igitur est $K\Theta$ ipsi $\Gamma\Delta$. Communis auferatur $\Gamma\Theta$; reliqua igitur $K\Gamma$ reliquae $\Theta\Delta$ aequalis est. Sed $K\Gamma$ ipsi Z est aequalis; et $\Theta\Delta$ igitur ipsi Z aequalis est. Quare si HB ipsi E aequalis est, et $\Theta\Delta$ aequalis erit ipsi Z.

PROPOSITIO VI.

Rob. Simson. observat, casus posterioris demonstrationem omissam esse in textu graeco, quum tamen in versione Campani ex arab. facta utriusque casus demonstratio habeatur. Id autem eo factum arbitratur, quod in mutilata Theonis editione libri quinti huius casus nulla occurrat applicatio. Eundem tamen casum adhiberi perfectiori V. Prop. 18. demonstrationi, cui soli etiam prior casus et V. 5. inserviat. Unde ipse et huius posterioris casus demonstrationem addidit. Ego autem putaverim, omissam esse in textu graeco, qui caeterum figuram posteriori casui inservientem in omnibus editionibus habet, casus posterioris demonstrationem eo tantum, quod sit demonstrationi casus prioris simillima. Si enim casu posteriore, quam multiplex est HB ipsius E, tam multiplex sumatur $K\Gamma$ ipsius Z, reliqua prorsus eodem modo procedunt ac in casu priore, adhibita V. 2. Caeterum utriusque casus communem demonstrationem hanc tradit Clavius. Quum ex hyp. magnitudines AB, $\Gamma\Delta$ ipsarum E, Z sint aequemulti-

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ. Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι ὃ ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. Ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

plices, erunt in AB tot magnitudines aequales ipsi E, quot in $T\Delta$ sunt aequales ipsi Z. Unde, si ex numero aequali magnitudinum, quae in AB, $\Gamma\Delta$ continentur, dematur numerus aequalis magnitudinem, quae in AH, $\Gamma\Theta$ sunt; remanebit in HB numerus magnitudinum ipsi E aequalium aequalis numero magnitudinum ipsi Z aequalium, quae in $\Delta\Theta$ conti-

Similiter (Fig. 316. b.) ostendemus et si multiplex est HB ipsius E, aeque multiplicem fore et magnitudinem $\Theta\Delta$ ipsius Z. Si igitur duae etc.

PROPOSITIO VII. (Fig. 317.)

Aequales magnitudines ad eadem eandem habent rationem, et eadem ad aequales.

Sint aequales magnitudines A, B, alia autem quaeliber magnitudo Γ; dico utramque ipsarum A, B ad Γ habere eandem rationem; et Γ ad utramque ipsarum A, B.

Sumantur enim ipsarum A, B aeque multiplices Δ, E, ipsius vero Γ alia utcunque multiplex Z.

Quoniam igitur aeque multiplex est Δ ipsius A ac E ipsius B, aequalis autem A ipsi B; aequalis igitur et Δ ipsi E. Alia vero Z ipsius Γ utcunque multiplex est; si igitur superat Δ ipsam Z, superat et E ipsam Z; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt quidem Δ, E ipsarum A, B aeque multiplices, ipsa vero Z ipsius Γ alia utcunque multiplex est; est igitur ut A ad Γ, ita B ad Γ (V. Def. 5.).

Dico autem et Γ ad utramque ipsarum A, B eandem habere rationem.

nentur i. e. si $HB=E$, erit etiam $\Delta\Theta=Z$: sin autem HB sit multiplex ipsius E, erit etiam $\Delta\Theta$ aequemultiplex ipsius Z. Symbolice propositio haec ita exhibetur: si sit $A=pL$, $B=qL$; et $E=pM$, $F=qM$, p, q denotantibus numeros integros quoscunque, quorum prior p maior altero q: erit tam $A-B=(p-q)L$, quam $E-F=(p-q)M$, speciatim tam $A-B=L$.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε· ἄλλο δέ τι τὸ Ζ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ Ε· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Τὰ ἴσα ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς [1]).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἡ.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΕ, τὸ δὴ ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. Ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ ἔλαττον τοῦ ΕΒ, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ ΑΕ, καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ

1) Codex a. hic addit: Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναπάλιν ἀνάλογον ἔσται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. At hoc Corollarium, quod idem dicit, quod Rob. Simsonis Prop. B. V. minime ex praecedente propositioni consequitur: indicare tamen hanc lectionem voluimus.

quam E−F=M, si fuerit p−q=1, seu p=q+1. Cf. Pfleiderer. l. c. p. 4. 5. Post hanc propositionem Rob. Simson.

lisdem enim constructis, similiter ostendemus, aequalem esse Δ ipsi E; alia vero quaedam est Z: si igitur superat Z ipsam Δ, superat Z et ipsam E; et si aequalis, aequalis; et si minor minor. Et est Z quidem ipsius Γ multiplex; ipsae autem Δ, E ipsarum A, B aliae utcunque aeque multiplices; est igitur ut Γ ad A, ita Γ ad B (V. Def. 5.). Aequales igitur etc.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 318. a. b.)

Inaequalium magnitudinum, maior ad eandem maiorem rationem habet quam minor; et eadem ad minorem maiorem rationem habet quam ad maiorem.

Sint inaequales magnitudines AB, Γ, et sit maior AB, alia vero utcunque Δ; dico AB ad Δ maiorem rationem habere quam Γ ad Δ, et Δ ad Γ maiorem rationem habere quam ad AB.

Quoniam enim maior est AB ipsa Γ, ponatur ipsi Γ aequalis BE (I. 3.), minor ipsarum AE, EB multiplicata erit aliquando ipsa Δ maior (V. Def. 4.). Sit primum AE minor ipsa EB, et multiplicetur AE, et sit ipsius multiplex ZH maior ipsa Δ, et quam multiplex est ZH ipsius AE, tam multiplex fiat et

addit propositiones A, B, C, D, quas vide in Excursu ad hunc librum.

PROPOSITIO VII.

Cor. Eodem modo ostenditur, aequalia ad aequalia eandem rationem habere.

ΑΕ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον ἕως οὗ τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. Ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. Ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· τὸ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Κ τῷ ΗΘ. Τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον· οὐδ' ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστιν. Μεῖζον δὲ τὸ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν. Ἀλλὰ συναμφότερα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστὶν ἴσα· (ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστι, συναμφότερα δὲ τὰ Δ, Μ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν [1])· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν

1) Quae uncis inclusimus e Cod. a. Peyrardus addidit. Poterant tamen egregie abesse, aut certe saltim usque ad vocem τετραπλάσιον illustrationis caussa adiici.

PROPOSITIO VIII.

Rob. Simson. in nota ad hanc propositionem primo ex-

$H\Theta$ ipsius EB, ipsa vero K ipsius Γ; et sumatur psius Δ dupla quidem Δ, tripla vero M, et deinceps ana maior, quoad sumpta multiplex fiat ipsius Δ et primo maior ipsa K. Sumatur, et si N quadrupla ipsius Δ, et primo maior ipsa K.

Quoniam igitur K primo minor est quam N, non erit K ipsa M minor. Et quoniam aeque multiplex est ZH ipsius AE ac $H\Theta$ ipsius EB, aeque igitur multiplex est ZH ipsius AE ac $Z\Theta$ ipsius AB (V. 1.). Aeque autem multiplex est ZH ipsius AE ac K ipsius Γ; aeque igitur multiplex est $Z\Theta$ ipsius AB ac K ipsius Γ; ipsae $Z\Theta$, K igitur ipsarum AB, Γ aeque multiplices sunt. Rursus, quoniam aeque est multiplex $H\Theta$ ipsius EB ac K ipsius Γ, EB autem aequalis Γ; aequalis igitur et K ipsi $H\Theta$. Sed K ipsa M non est minor; non igitur est $H\Theta$ minor quam M. Maior autem ZH ipsa Δ; tota igitur $Z\Theta$ utrisque simul Δ, M maior est. Sed utraeque simul Δ, M ipsi N sunt aequales, (quandoquidem M ipsius Δ est tripla, utraeque autem simul Δ, M ipsius Δ sunt quadruplae, est vero et N ipsius Δ quadrupla, utraeque simul igitur M, Δ ipsi N aequales sunt. Sed $Z\Theta$ ipsis Δ, M maior est); $Z\Theta$ igitur ipsam N superat, K vero ipsam N non superat. Et sunt $Z\Theta$,

plicat, cur demonstratio in textu graeco obvia non eadem constructione pro utroque casu, quem habet, uti potuerit; iure deinde illud potissimum ineptum esse dicit, quod utroque casu magnitudo K demonstrationi inserta sit, quae nulli alii rei inserviat, nisi ut demonstratio prolixior fiat. Denique ad-

ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καί ἐστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. Καί ἐστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον ἔστω· τὸ δὴ ἔλαττον τὸ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μεῖζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ ΖΗ· ὥςτε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ μὴ ἔλασσον εἶναι, μεῖζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ τουτέστι τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει.

dit, esse etiam tertium casum specialem, cuius mentio non facta sit in demonstratione, nempe si AE in primo, aut EB in secundo casu maior sit quam Δ, in quo sumendae sint quaevis ipsius AE et EB aequemultiplices, v. c. duplae ipsarum. (Quin deest etiam alius adhuc casus generalis. Casus enim, quos graecus textus habet, sunt 1) si $AE < EB$ 2) si $AE > EB$. At potest etiam esse 3) $AE = EB$.) Ex his omnibus Simson. concludit, Theonem aut alium geometriae non

K ipsarum AB, Γ aeque multiplices, N vero ipsius Δ alia utcunque multiplex; AB igitur ad Δ maiorem rationem habet quam Γ ad Δ (V. Def. 7.).

Dico autem et Δ ad Γ maiorem rationem habere, quam Δ ad AB.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus, N superare K, ipsam vero $Z\Theta$ non superare. Et est N quidem ipsius Δ multiplex, et $Z\Theta$, K ipsarum AB, Γ aliae utcunque aeque multiplices; Δ igitur ad Γ maiorem rationem habet quam Δ ad AB (V. Def. 7.).

Sed sit AE maior ipsa EB; minor EB multiplicata, erit aliquando ipsa Δ maior. Multiplicetur, et sit $H\Theta$ multiplex ipsius EB, maior vero ipsa Δ; et quam multiplex est $H\Theta$ ipsius EB, tam multiplex fiat ZH ipsius AE et K ipsius Γ. Similiter ostendemus $Z\Theta$, K ipsarum AB, Γ aeque multiplices esse. Et sumatur similiter N multiplex ipsius Δ, primo autem maior ipsa ZH; quare rursus ZH ipsa N non minor erit, maior autem $H\Theta$ ipsa Δ; tota igitur $Z\Theta$ ipsas Δ, M, hoc est N superat, K vero ipsam N non superat, quandoquidem ZH quae maior est ipsa $H\Theta$, hoc est ipsa K, non superat N. Et

satis peritum propositionem hanc vitiasse. Quamvis autem haec Simsonis reprehensio satis iusta esse videatur, et facile esset, superfluam illam magnitudinem K e demonstratione eliminare, noluimus tamen e mera coniectura textum corrigere. Caeterum Rob. Simsonis demonstratio simplicior omnino est, et omnes casus simul complectitur. Ea symbolice expressa ita habet: si $A > B$, erit $A : C > B : C$, et $C : B > C : A$. Nempe, si magnitudinum $(A - B)$, B, ea: quae non maior est altera,

ἐπειδήπερ καὶ τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ ΗΘ, τοιοῦτο τὸ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν. Τῶν ἄρα ἀνίσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

sit $\overset{=}{>}$C, sumantur 2(A—B), et 2B, vel generaliter m(A—B), mB: sin autem magnitudinum (A—B), B ea, quae non maior est altera, sit <C, sive ea sit (A—B, sive B; erit aliquando aliquod eius multiplum m maius quam C, nempe vel m(A—B)>C, vel mB>C. Et quum multiplum m eius, quae non maior est altera, ponamus >C, erit idem multiplum alterius tanto magis pariter >C, i. e. erit *semper* tam m(A—B)>C, quam mB>C. Sit deinde omnibus casibus nC illud multiplum magnitudinis C, quod *primo* maius est quam mB, nempe sit nC>mB, at (n—1)C$\overset{=}{<}$mB, vel mB$\overset{=}{>}$(n—1)C, erit, ob m(A—B)>C, n.(A—B)+mB>nC i. e. mA>nC. Quum itaque mA>nC, at mB<nC, erit ex V. Def. 7. A:C>B:C, et C:B>C:A.

similiter ut in iis, quae ante diximus, absolvemus demonstrationem. Ergo inaequalium etc.

PROPOSITIO IX. (Fig. 319.)

Quae ad eandem eandem habent rationem, aequales inter se sunt; et ad quas eadem eandem habet rationem, illae aequales inter se sunt.

Habeat enim utraque ipsarum *A*, *B* ad *Γ* eandem rationem, dico aequalem esse *A* ipsi *B*.

Si enim non, non utraque ipsarum *A*, *B* ad *Γ* eandem haberet rationem (V. 8.), habet autem; aequalis igitur est *A* ipsi B.

Habeat autem rursus *Γ* ad utramque *A*, *B* eandem rationem; dico aequalem esse *A* ipsi *B*.

PROPOSITIO IX.

Magis explicite hanc propositionem Rob. Simson., et ad eius exemplum Playfair. ita fere demonstrat. 1) Si $A:C=B:C$, erit $A=B$. Si enim non fuerit $A=B$, erit alterutra earum maior altera v. c. $A>B$. At tum, ut in propositione praecedente, duo numeri m, n possunt inveniri, ita ut $mA>nC$, at $mB<nC$. Quum vero ponatur $A:C=B:C$, erit (V. Def. 5.), quoties $mA>nC$, etiam $mB>nC$. Erit itaque simul $mB>nC$, et $mB<nC$, quod fieri nequit. Nequit itaque esse $A>B$, et similiter nec $B>A$, itaque $A=B$. Pariter si $C:A=C:B$, vel simili ratione immediatè demonstrabitur, ut Nr. 1. esse $A=B$, quod Rob. Simson. fecit, vel, ut Playfair. docuit, ope inversionis ex Prop. B (vid. Exc. ad hunc librum) concludetur $A:C=B:C$, unde res redit ad Nr. 1.

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

Ἐχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β, ἢ ἔλασσον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β, τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ τὸν ἐλάσσονα εἶχε λόγον ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ μεῖζον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Β τῷ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οὐ δὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα

PROPOSITIO X.

Rob. Simson. ad hanc propositionem observat: „Ea, quae huius propositionis demonstratio exhibetur, in editionibus graecis et latinis aliisque, legitima non est. Verba enim:

Si enim non, non Γ ad utramque ipsarum A, B eandem haberet rationem (V. 8.); habet autem; aequalis igitur est A ipsi B. Quae igitur ad eandem etc.

PROPOSITIO X. (Fig. 320.)

Magnitudinum ad eandem rationem habentium, quae maiorem rationem habet, maior est; ad quam autem eadem maiorem rationem habet, minor est.

Habeat enim A ad Γ maiorem rationem, quam B ad Γ; dico maiorem esse A ipsa B.

Si enim non, vel aequalis est A ipsi B, vel minor. Aequalis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A, B ad Γ eandem haberet rationem (V. 7.). Non habet vero; non igitur aequalis est A ipsi B. Sed neque minor est A ipsa B, nam A ad Γ minorem haberet rationem quam B ad Γ (V. 8.). Non habet autem, non igitur minor est A ipsa B. Ostensa autem est neque aequalis, maior igitur est A ipsa B.

Habeat autem rursus Γ ad B maiorem rationem quam Γ ad A; dico minorem esse B ipsa A.

Si enim non, vel aequalis est, vel maior. Aequalis quidem non est B ipsi A, nam Γ ad utramque ipsarum A, B eandem haberet rationem (V. 7.). Non habet vero, non igitur aequalis est A ipsi B. Sed neque maior est B ipsa A, nam Γ ad B minorem ra-

maior eadem sive *aequalis*, *minor* de magnitudinibus et rationibus diverso prorsus sensu dicuntur, ut ex Def. 5. et 7. huius libri patet. Ope igitur harum examinemus demonstrationem propositionis decimae, in qua vis ratiocinii haec est: si

λόγον εἶχεν ἤπερ πρὸς τὸ Α. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α. Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἔστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ,

fuerit $A=B$, foret $A:\Gamma=B:\Gamma$, unde sumtis ipsarum A, B quibuscunque aequemultiplicibus, et sumta quavis multiplici ipsius Γ, si multiplex ipsius A maior fuerit multiplici ipsius Γ, erit (V. Def. 5.) multiplex ipsius B maior eadem multiplici ipsius Γ. Sed, quoniam ex hypothesi $A:\Gamma>B:\Gamma$, erunt ex V. Def. 7. quaedam ipsarum A, B aequemultiplices, et quaedam multiplex ipsius Γ tales, ut multiplex ipsius A maior sit multiplici ipsius Γ, at multiplex ipsius B non maior sit multiplici ipsius Γ: haec autem propositio directe repugnat

tionem haberet quam ad A (V. 8.). Non habet vero, non igitur maior est B ipsa A. Ostensa autem est neque aequalis, minor igitur est B ipsa A. Ipsarum igitur ad eandem etc.

PROPOSITIO XI. (Fig. 321.)

Quae eidem eaedem sunt rationes, et inter se sunt eaedem.

Sint enim ut A ad B ita Γ ad Δ, ut vero Γ ad Δ, ita E ad Z; dico esse ut A ad B ita E ad Z.

Sumantur enim ipsarum A, Γ, E aeque multiplices H, Θ, K, ipsarum vero B, Δ, Z aliae utcunque aeque multiplices Λ, M, N.

Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ, et sumptae sunt ipsarum A, Γ aeque multiplices H, Θ, ipsarum vero B, Δ aliae utcunque aeque multiplices Λ, M; si H superat ipsam Λ, superat et Θ ipsam M; et si aequalis, aequalis, et si minor, minor (V. Def. 5.). Rursus, quoniam est ut Γ ad Δ ita E ad Z, et sumptae sunt ipsarum Γ, E aeque multiplices Θ, K, ipsarum vero Δ, Z aliae utcunque aeque multiplices M,

praecedenti, quare A non est aequalis B. Pergit demonstratio „sed neque minor est A quam B, haberet enim A ad Γ minorem rationem, quam B: atqui non habet minorem, non igitur A minor est quam B.“ Hic dicitur: haberet A ad Γ minorem rationem quam B ad Γ, sive, quod idem est, haberet B ad Γ maiorem rationem quam A ad Γ, hoc est (V. Def. 7.) forent quaedam ipsarum B, A aequemultiplices, et quaedam ipsius Γ multiplex talis, ut multiplex ipsius B maior sit multiplici ipsius Γ, at multiplex ipsius A non maior sit

Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Β, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

multiplici ipsius Γ, et ostendendum fuit, hoc nunquam contingere posse, si sit $A:\Gamma > B:\Gamma$; demonstrandum igitur fuit, in hoc casu multiplicem ipsius A *semper* superare multiplicem ipsius Γ, si aequemultiplex ipsius B eandem superet; hoc enim ostenso, manifestum esset, non posse esse $B:\Gamma > A:\Gamma$, h. e. non posse esse $A:\Gamma < B:\Gamma$. Minime autem hoc ostensum est in demonstratione propositionis decimae, sed, si decima demonstrata esset, immediate ex ea deduci posset, verum sine eius ope non facile idem ostendetur, ut demonstrationem ten-

N; si superat Θ ipsam M, superat et K ipsam N; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. Def. 5.). Sed si superat Θ ipsam M, superat et H ipsam Λ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor; quare et si superat H ipsam Λ, superat et K ipsam N; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt H, K ipsarum A, E aeque multiplices, Λ, N vero ipsarum B, Z aliae utcunque aeque multiplices; est igitur ut A ad B ita E ad Z (V. Def. 5.). Ergo eidem etc.

PROPOSITIO XII. (Fig. 322.)

Si sint quotcunque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A, B, Γ, Δ, E, Z, ut A ad B ita Γ ad Δ, et E ad Z; dico esse ut A ad B ita A, Γ, E ad ipsas B, Δ, Z.

Sumantur enim ipsarum A, Γ, E aeque multiplices H, Θ, K, ipsarum vero B, Δ, Z aliae utcunque aeque multiplices Λ, M, N.

tanti patebit. Quare demonstratio decimae legitima non est. Videtur autem is, qui demonstrationem decimae, quae iam habetur, posuit vice eius, quam Euclides vel Eudoxus dederat, deceptus fuisse transferendo id, quod manifestum est magnitudinibus ad rationes, magnitudinem sc. quamvis non posse simul maiorem et minorem esse alia. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia, axioma est maxime evidens, si de magnitudinibus intelligatur, Euclides autem eo non utitur ad ostendendum, rationes, quae eidem rationi sunt eaedem, inter

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὥςτε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἐλάσσονα. Καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Λ, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια· ἐπειδήπερ ἂν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσια, ὁσαπλάσιόν ἐστι ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Α καὶ τὰ Λ, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Λ, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον μὲν γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λό-

se easdem esse, sed hoc explicite demonstrat in V. 11." Hinc Simson. aliam Prop. V. 10. demonstrationem dedit, quam

Et quoniam est A ad B ita Γ ad Δ et E ad Z, et sumptae sunt ipsarum A, Γ, E aeque multiplices H, Θ, K, ipsarum vero B, Δ, Z aliae utcunque aeque multiplices Λ, M, N; si H superat ipsam Λ, superat et Θ ipsam M, et K ipsam N (V. Def. 5.); et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Quare et si superat H ipsam Λ, superant et H, Θ, K ipsas Λ, M, N; et si aequalis, aequales; et si minor, minores. Et est H quidem et H, Θ, K ipsius A et ipsarum A, Γ, E aeque multiplices; quoniam si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum aequalium multitudine, singulae singularum aeque multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. Ex eadem ratione et Λ et Λ, M, N ipsius B et ipsarum B, Δ, Z aeque sunt multiplices; est igitur ut A ad B, ita A, Γ, E ad B, Δ, Z (V. Def. 5.). Si igitur sint quotcunque etc.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 323.).

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem rationem habeat quam quinta ad sextam; et prima ad secundam maiorem rationem habebit quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, tertia vero Γ ad quartam Δ maiorem rationem habeat quam quinta E

eandem esse cum ea, quam Euclides vel Eudoxus dederat, nullus dubitat, quum ex ipsa definitione maioris rationis V.

γον ἐχέτω ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ·

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον ὑπερέχει τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α· ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ·

7. breviter et directe ostendatur. Ita autem habet: si $A:\Gamma > B:\Gamma$, est $A>B$ pariterque si $\Gamma:B>\Gamma:A$, erit $B<A$. Sit enim 1) $A:\Gamma>B:\Gamma$; eruntque (V. Def. 7.) quaedam ipsarum A, B aequemultiplices, et ipsius Γ quaedam multiplex, ita ut multiplex quidem ipsius A superet multiplicem ipsius Γ, multiplex vero B non superet eandem. Sumantur, et sint ipsarum A, B aequemultiplices mA, mB, ipsius vero Γ multiplex sit $n\Gamma$, ita ut $mA>n\Gamma$, at $mB \overset{=}{<} n\Gamma$. Est igitur $mA>mB$, adeoque $A>B$ (V. Ax. 4.). Sit 2) $\Gamma:B>\Gamma:A$,

id sextam Z; dico et primam A ad secundam B maiorem rationem habituram esse quam quintam E ad sextam Z.

Quoniam enim Γ ad Δ maiorem rationem habet quam E ad Z, sunt quaedam ipsarum Γ, E multiplices, ipsarum vero Δ, Z aliae utcunque aeque multiplices; ita ut ipsius Γ multiplex ipsius Δ multiplicem superet, ipsius vero E multiplex ipsius Z multiplicem non superet. Sumantur, et sint ipsarum Γ, E aeque multiplices H, Θ; ipsarum vero Δ, Z aliae utcunque aeque multiplices K, Λ; ita ut H quidem ipsam K superet, ipsa vero Θ ipsam Λ non superet; et quam multiplex est H ipsius Γ, tam multiplex sit et M ipsius A; quam vero multiplex K ipsius Δ, tam multiplex sit et N ipsius B.

Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ, et sumptae sunt ipsarum A, Γ aeque multiplices M, H, ipsarum vero B, Δ aliae utcunque aeque multiplices N, K; si superat M ipsam N, superat et H ipsam K; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. Def. 5.). Superat autem H ipsam K, superat igitur et M ipsam

erit $B<A$. Erunt enim (V. Def. 7.) quaedam $n\Gamma$, mB, mA talia, ut $n\Gamma>mB$, at $n\Gamma \overset{=}{<} mA$, adeoque erit $mB<mA$, et $B<A$ (V. Ax. 4.). Atque iam, demonstrata V. 10., ut porro observat Rob. Simson., facile demonstrabitur ea propositio, quae in vulgari eius demonstratione tacite supponitur. Nempe, si $A:\Gamma>B:\Gamma$, et sumantur utcunque mA, mB, $n\Gamma$, sitque $mB>n\Gamma$, erit etiam $mA>n\Gamma$. Nam ob $A:\Gamma>B:\Gamma$, erit (ex V. 10.) $A>B$, adeoque $mA>mB$, unde, si $mB>n\Gamma$, tanto magis erit $mA>n\Gamma$.

ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. Τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καί ἐστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Β τοῦ Δ μεῖζόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ ὅ ἔτυχε μέγεθος τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ἔλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Δ.

PROPOSITIO XII.

Patet, hanc propositionem tum saltim locum habere, si magnitudines, de quibus sermo est, omnes sint eiusdem generis.

PROPOSITIO XIII.

Obs. In versione latina, monente Rob. Simson., non posuimus, ut in graeco textu est: „et multiplex Γ superat

N. Ipsa vero Θ ipsam Λ non superat; et sunt M, Θ ipsarum Λ, E aeque multiplices, ipsae vero N, Λ ipsarum B, Z aliae utcunque aeque multiplices; ergo A ad B maiorem rationem habet quam E ad Z (V. Def. 7.). Si igitur prima etc.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 321.)

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima vero tertia maior sit, et secunda tertia maior erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, maior autem sit A ipsa Γ; dico et B ipsa Δ maiorem esse.

Quoniam enim maior est A ipsa Γ, alia autem utcunque magnitudo B; ergo A ad B maiorem rationem habet quam Γ ad B (V. 8.). Ut autem A ad B, ita Γ ad Δ; et Γ igitur ad Δ maiorem rationem habet quam Γ ad B (V. 13.). Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est (V. 10.); minor igitur Δ ipsa B; quare maior est B ipsa Δ.

multiplicem ipsius Δ etc. sed ad rem accommodatius: *ita, ut superet* etc. Caeterum Simson hoc addit

Cor. Et si prima ad secundam maiorem rationem habeat, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam eandem rationem habeat, quam quinta ad sextam; similiter ostendetur, primam ad secundam maiorem rationem habere quam quintam ad sextam. (Ad hoc corollarium facile illud reducitur, quod Clavius hic habet: si A : B = C : D, et C : D < E : F,

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ· κἂν ἔλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται, καὶ τὸ Β τοῦ Δ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Ἔστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθη ἴσα, τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ΔΚ ΚΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ

erit et A:B<E:F. Aliud autem, quod Clavius addit, corollarium non huc pertinet. Habetur illud infra in appendice Prop. 6.)

PROPOSITIO XIV.

Casus duos posteriores expressis verbis ita demonstrat Rob. Simson. Si $A:B=\Gamma:\Delta$, sitque $A=\Gamma$, erit $A:B=\Delta:\Delta$ (V.

Similiter ostendemus et si aequalis sit A ipsi Γ, aequalem fore et B ipsi Δ; et si minor sit A ipsa Γ, minorem fore et B ipsa Δ. Si igitur prima etc.

PROPOSITIO XV. (Fig. 325.)

Partes inter se comparatae eandem habent rationem quam earum aeque multiplices.

Sit enim aeque multiplex AB ipsius Γ ac ΔE ipsius Z; dico esse ut Γ ad Z ita AB ad ΔE.

Quoniam enim aeque multiplex est AB ipsius Γ ac ΔE ipsius Z; quot in AB sunt magnitudines aequales ipsi Γ, tot sunt et in ΔE aequales ipsi Z. Dividatur AB in magnitudines ipsi Γ aequales AH, $H\Theta$, ΘB, ΔE vero in ΔK, $K\Lambda$, ΛE ipsi Z aequales; erit aequalis multitudo ipsarum AH, $H\Theta$, ΘB multitudini ipsarum ΔK, $K\Lambda$, ΛE. Et quoniam aequales sunt AH, $H\Theta$, ΘB inter se, sunt autem et ΔK, $K\Lambda$, ΛE aequales inter se; est igitur ut AH ad ΔK ita $H\Theta$ ad $K\Lambda$, et ΘB ad ΛE (V. 7.); erit igitur et ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes (V. 12.); est igitur ut AH ad ΔK ita AB ad ΔE. Aequalis

7.), adeoque $B=\Delta$ (V. 9.). Sit porro $A:B=\Gamma:\Delta$, et sit $A<\Gamma$, erit $\Gamma>\Delta$, et, quoniam $\Gamma:\Delta=A:B$, erit $\Delta>B$ per casum primum, qui est in textu graeco.

Cor. Clavius hoc addit corollarium: si $A:B=\Gamma:\Delta$, sitque $B>=<\Delta$, erit et $A>=<\Gamma$. Quod breviter ita demonstrari potest. Si $A:B=\Gamma:\Delta$, erit et inverse (Prop. B. in

τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Τὰ ἄρα μέρη, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογόν ἐστιν, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε

Excursu ad hunc librum) $B : A = \Delta : \Gamma$, unde ex V. 14. constat propositum.

PROPOSITIO XV.

Obs. Per partes in hac propositione intelliguntur partes aliquotae (cf. dicta ad V. Def. 2.). Asserit itaque haec propositio, esse $A : B = pA : pB$, vel $\frac{1}{p}A : \frac{1}{p}B = A : B$. Addi autem potest, quod habet Pfleiderer. (Exposit. et Dilucid. libri V.

autem AH ipsi Γ, ΔK vero ipsi Z; est igitur ut Γ ad Z ita AB ad ΔE. Ergo partes etc.

PROPOSITIO XVI. (Fig. 326.)

Si quatuor magnitudines proportionales sint, et alterne proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A, B, Γ, Δ, ut A ad B ita Γ ad Δ; dico et alterne proportionales esse, ut A ad Γ ita B ad Δ.

Sumantur enim ipsarum A, B aeque multiplices E, Z, ipsarum vero Γ, Δ aliae utcunque aeque multiplices H, Θ.

Et quoniam aeque multiplex est E ipsius A ac Z ipsius B; partes autem inter se comparatae eandem habent rationem, quam earum aeque multiplices (V. 15.); ergo ut A ad B ita E ad Z. Ut autem A ad B ita Γ ad Δ; ergo ut Γ ad Δ ita E ad Z (V. 11.). Rursus, quoniam H, Θ ipsarum Γ, Δ aeque multiplices sunt; est igitur ut Γ ad Δ ita H ad Θ (V. 15.). Ut autem Γ ad Δ ita E ad Z; ergo ut E ad Z ita H ad Θ (V. 11.). Si autem quatuor magnitudines pro-

§. 45.), etiam partes aequealiquantas eandem rationem habere, quam magnitudines ipsas. Sit nempe $p.R=A$, $p.S=B$, seu $R=\frac{1}{p}A$, $S=\frac{1}{p}B$, erit (ex V. 15.) $R:S=pR:pS$, vel $R:S=A:B$; pariterque (ex V. 15.) $R:S=mR:mS$, seu $R:S=\frac{m}{p}A:\frac{m}{p}B$, unde (V. 11.) $\frac{m}{p}A:\frac{m}{p}B=A:B$.

PROPOSITIO XVI.

Obs. Applicari potest haec propositio tantum, ubi om-

πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ· τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. Ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ

nes quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. De corollario ei vulgo adiecto vide ad Prop. A. in Excursu ad hunc librum.

PROPOSITIO XVII.

Aliter haec propositio ita efferri potest: si quatuor magnitudines proportionales sint, et prima earum maior est, quam

portionales sint, prima autem maior sit tertia, et secunda maior erit quarta; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. 14.). Si igitur superat E ipsam H, superat et Z ipsam Θ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt E, Z ipsarum A, B aeque multiplices, H, Θ vero ipsarum Γ, Δ aliae utcunque aeque multiplices; est igitur ut A ad Γ ita B ad Δ (V. Def. 5.). Si igitur quatuor etc.

PROPOSITIO XVII. (Fig. 327.)

Si compositae magnitudines proportionales sint, et divisae proportionales erunt.

Sint compositae magnitudines proportionales AB, BE, $\Gamma\Delta$, ΔZ, ut AB ad BE ita $\Gamma\Delta$ ad ΔZ; dico et divisas proportionales fore, ut AE ad EB ita ΓZ ad $Z\Delta$.

Sumantur enim ipsarum AE, EB, ΓZ, $Z\Delta$ aeque multiplices $H\Theta$, ΘK, AM, MN; ipsarum vero EB, $Z\Delta$ aliae utcunque aeque multiplices $K\Xi$, $N\Pi$.

Et quoniam aeque multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac ΘK ipsius EB; aeque igitur multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac HK ipsius AB (V. 1.). Aeque autem multiplex est $H\Theta$ ipsius AE ac AM ipsius ΓZ; aeque

secunda, adeoque etiam (Prop. A. in Excursu ad hunc librum) tertia maior quam quarta: erit etiam excessus primae super secundam ad secundam, ut excessus tertiae super quartam ad quartam. Cf. Pfleiderer. l. c. p. 21.

Cor. 1. Si quatuor magnitudinum A, B, C, D, binae fuerint in eadem ratione, et prima A minor quam secunda

τοῦ ΓΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. Ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. Ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΘΗ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΝΠ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ

B, adeoque etiam (Prop. A in Excursu) tertia C minor quam quarta D: erit etiam inverse (Prop. B in Excursu) B:A = D:C, ubi iam B > A, et D > C, adeoque B − A : A = D − C : C. Cf. Pfleiderer. l. c. p. 23.

igitur multiplex est *HK* ipsius *AB* ac *ΛM* ipsius *ΓZ* (V. 11.). Rursus, quoniam aeque multiplex est *ΛM* ipsius *ΓZ* ac *MN* ipsius *ZΔ*; aeque igitur multiplex est *ΛM* ipsius *ΓZ* ac *ΛN* ipsius *ΓΔ* (V. 1.). Aeque autem multiplex erat *ΛM* ipsius *ΓZ* ac *HK* ipsius *AB*; aeque igitur est multiplex *HK* ipsius *AB* ac *ΛN* ipsius *ΓΔ* (V. 11.); ipsae *HK*, *ΛN* igitur ipsarum *AB*, *ΓΔ* aeque sunt multiplices. Rursus, quoniam aeque multiplex est *ΘK* ipsius *EB* ac *MN* ipsius *ZΔ*; est autem et *KΞ* ipsius *EB* aeque multiplex ac *NΠ* ipsius *ZΔ*; et composita *ΘΞ* ipsius *EB* aeque est multiplex ac *MΠ* ipsius *ZΔ* (V. 2.). Et quoniam est ut *AB* ad *BE* ita *ΓΔ* ad *ΔZ*, et sumptae sunt ipsarum *AB*, *ΓΔ* aeque multiplices *HK*, *ΛN*, ipsarum vero *EB*, *ZΔ* aliae utcunque aeque multiplices *ΘΞ*, *MΠ*; si superat *HK* ipsam *ΘΞ*, superat et *ΛN* ipsam *MΠ*; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. Def. 5.). Superet autem *HK* ipsam *ΘΞ*, et communi ablata *ΘK*, superat igitur et *HΘ* ipsam *KΞ*. Sed si superat *HK* ipsam *ΘΞ*, superat et *ΛN* ipsam *MΠ*; superat igitur et *ΛN* ipsam *MΠ*; et communi *MN* ablata, superat et *ΛM* ipsam *NΠ*; quare si superat *HΘ* ipsam *KΞ*, superat et *ΛM* ipsam *NΠ*. Similiter ostendemus et si aequalis sit *HΘ* ipsi *KΞ*, aequalem fore et *ΛM* ipsi *NΠ*; et si minor, minorem. Et sunt *HΘ*, *ΛM* ipsarum *AE*, *ΓZ* aeque multiplices, *KΞ*, *NΠ* vero ipsarum *EB*, *ZΔ* aliae utcunque

Cor. 2. Generatim igitur, si duae magnitudines inaequales A et B eandem mutuo habeant rationem, quam aliae duae inaequales C et D: differentia quoque duarum priorum erit ad earundem minorem, uti differentia duarum posterio-

μὲν ΗΘ, ΛΜ τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Ἐὰν ἄρα συγκείμενα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ, ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΔΖ, ἢ πρὸς μεῖζον.

Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ ΔΗ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ οὕτως τὸ

rum ad ipsam minorem; vel etiam inverse (Prop. B in Excursu), minor duarum priorum erit ad ipsarum differentiam, uti minor duarum posteriorum ad earundem differentiam. Breviter, si A : B = C : D, erit etiam *dividendo*

vel divisim A − B : B = C − D : D, seu B : A − B = D : C − D

vel B − A : A = D − C : C, seu A : B − A = C : D − C.

Cf. Pfleiderer. l. c.

aeque multiplices; est igitur ut AE ad EB ita ΓZ ad $Z\Delta$ (V. Def. 5.). Si igitur compositae etc.

PROPOSITIO XVIII. (Fig. 238.)

Si divisae magnitudines proportionales sint, et compositae proportionales erunt.

Sint divisae magnitudines proportionales AE, EB, ΓZ, $Z\Delta$ ut AE ad EB ita ΓZ ad $Z\Delta$; dico et compositas proportionales fore, ut AB ad BE ita $\Gamma\Delta$ ad $Z\Delta$.

Si enim non est ut AB ad BE ita $\Gamma\Delta$ ad $Z\Delta$; erit ut AB ad BE ita $\Gamma\Delta$, vel ad minorem ipsa ΔZ, vel ad maiorem.

Sit primum ad minorem ΔH. Et quoniam est ut AB ad BE ita $\Gamma\Delta$ ad ΔH, compositae magnitudines proportionales sunt; quare et divisae proportionales erunt (V. 17.); est igitur ut AE ad EB ita ΓH ad $H\Delta$. Ponitur autem et ut AE ad EB ita ΓZ ad $Z\Delta$; ut igitur ΓH ad $H\Delta$ ita ΓZ ad $Z\Delta$ (V. 11.). Maior autem prima ΓH tertia ΓZ; maior igitur et secunda

PROPOSITIO XVIII.

Obs. Ita sane satis breviter demonstraretur V. 18. dummodo *sumere liceat* propositis tribus magnitudinibus, quarum duae saltim sint eiusdem generis, quartam semper existere ipsis proportionalem. Verum enim vero, quamvis Clavius id pro axiomate sumi posse censeret, dudum tamen Saccherius in Euclide ab omni naevo vindicato p. 111. sq. indecorum huic assumto naevum inesse confessus est, cui quidem mederi ille,

ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΔ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα. Ἐὰν ἄρα διῃρημένα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΓ, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ οὕτως

at ex Rob. Simsonis et Pfleidereri iudicio irrito prorsus conatu tentavit. In eo autem cum Saccherio consentit Rob. Simson., haud legitimam esse, et a genio Euclidis abhorrere, quae vulgo in Elementis habetur, propositionis huius demonstrationem. Nunquam enim Euclidem aliquid in demonstratione propositionis sumere, quod non prius ostenderit, saltim quod existere posse non perspicuum sit; ope enim propositionis incertae conclusionem certam elici non posse. Aliam itaque demonstrationem substituit Simson., quam, quamvis prolixiorem, legitimam et Euclidis genio magis conformem esse inde maxime concludit, quod, pariter ac Prop. 17. de-

HΔ quarta *ZΔ* (V. 14.). Sed, et minor, quod fieri nequit; non igitur est ut *AB* ad *BE* ita *ΓΔ* ad minorem ipsa *ZΔ*. Similiter utique ostendemus neque ad maiorem; ad ipsam igitur. Si igitur divisae etc.

PROPOSITIO XIX. (Fig. 329.)

Si sit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam, et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota *AB* ad totam *ΓΔ* ita ablata *AE* ad ablatam *ΓZ*; dico et reliquam *EB* ad reliquam *ZΔ* fore ut tota *AB* ad totam *ΓΔ*.

Quoniam enim est ut *AB* ad *ΓΔ* ita *AE* ad *ΓZ*; et alterne erit ut *BA* ad *AE* ita *ΔΓ* ad *ΓZ* (V. 16.). Et quoniam compositae magnitudines proportionales sunt, et divisae proportionales erunt (V. 17.); ut igitur *BE* ad *EA* ita *ΔZ* ad *ZΓ*; et alterne (V. 16.), ut *BE* ad *ΔZ* ita *EA* ad *ZΓ*. Ut autem *AE* ad

monstratur ope Prop. 1. et 2. huius libri, ita in sua hac demonstratione Propositionis 18. tum Prop. 5. tum uterque casus V. Prop. 6. adhibeantur, quae quidem propositionis conversae sint primae et secundae, neque ulli propositioni huius libri, ut eum nunc habemus, demonstrandae inserviant, quin nulli praeterquam huic 18. inservire possint. Simsonis demonstratio, quam brevitatis caussa symbolice expressam hic sistimus, haec est. Si fuerit A : B = C : D, erit etiam *componendo* A+B : B = C+D : D. Sumantur enim aeque multipla quaecunque magnitudinum B, D, pariterque magnitudinum (A+B), (C+D), v. c. mB, mD, m(A+B), m(C+D), pariterque aliae quae-

τὸ ΕΔ πρὸς το ΖΓ. Ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ Γ
οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ· κ
λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν ΔΖ ἔσται ὡς ὅλο
τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα ᾖ καὶ τὰ ἑξῆς

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω
τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τ
ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· συγκείμενα ἄρα με-
γέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΑΒ πρὸ
τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ, καί ἐστιν ἀνα-
στρέψαντι. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκεί-
μενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλο-
γον ἔσται [1]). Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1) Ita hunc locum habent edd. Oxon. et Basil., cum quibus teste Peyrardo consentit Cod. a. Peyrardus ex ingenio, ut videtur, locum ex Gregorii quoque sententia corruptissimum nec ope veterum exemplarium restituendum ita muravit: καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, καί ἐστιν ἀναστρέψαντι κ. τ. λ. Quamvis autem fateamur, lectionem receptam vitiosam esse et omnino corollarium hoc non huc pertinere, nec eius demonstrationem, qua ad V. 16. recurritur legitimam esse, quoniam ita contra, ac res est, haec propositio tantum ad quatuor magnitudines eiusdem generis pertinere videretur (Cf. Clavius, Rob. Simson., Pfleiderer. ad hunc locum) noluimus tamen Peyrardi lectiones, nulla mscptorum auctoritate nixas, in textum recipere, praesertim quum vitia vulgaris lectionis hac ratione non tollantur. Caeterum Edit. Basileensis aliud adhuc hic additamentum habet, quod, cum prorsus non huc pertineat, nec omnino ullius momenti sit, cum edd. Oxon. et Paris. omisimus.

cunque aequemultiplices magnitudinum B, D v. c. rB, rD,

eritque vel r>m, vel r=m, vel r<m. Sit 1) $r \overset{=}{<} m$, adeo-

'Z ita posita est tota AB ad totam $\Gamma\Delta$; et reliqua gitur EB ad reliquam ΔZ erit ut tota AB ad totam 'Δ (V. 11.). Si igitur sit etc.

COROLLARIUM.

Et quoniam ostensum est ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EB ad $Z\Delta$; et alterne (V. 16.) ut AB ad BE ita $\Gamma\Delta$ ad $Z\Delta$; compositae igitur magnitudines proportionales sunt. Ostensum autem est, ut AB ad AE ita $\Delta\Gamma$ ad ΓZ, et est per conversionem. Ex hoc manifestum est, si compositae magnitudines proportionales sint, et per conversionem proportionales fore. Quod erat demonstrandum.

que $rB \lesseqgtr mB$, et $rD \lesseqgtr mD$. Quum igitur $m(A+B) > mB$ (V. Ax. 3.), erit etiam, vel tanto magis $m(A+B) > rB$, eodemque modo $m(C+D) > rD$, adeoque $A+B : B = C+D : D$ (V. Def. 5.). Sit autem 2) $r > m$, adeoque $rB > mB$, $rD > mD$, et, si ab aequemultiplis magnitudinum $A+B$, $C+D$, nempe a $m(A+B)$, $m(C+D)$ auferantur aequemultipla magnitudinum B, D, nempe mB, mD, relinquentur aequemultipla mA, mC magnitudinum A, B (V. 5.). Si autem a rB auferatur mB, pariterque a rD auferatur mD, relinquentur $(r-m)B$, $(r-m)D$, eritque vel $(r-m)B = B$, et simul $(r-m)D = D$; vel $(r-m)B = nB$, et simul $(r-m)D = nD$ (V. 6.). Sit a) $(r-m)B = B$, et $(r-m)D = D$. Quoniam igitur $A : B = C : D$, erit etiam V. 4. Cor. a. $mA : B = mC : D$ i. e. $mA : (r-m)B = mC : (r-m)D$. Hinc, si $mA \gtreqless (r-m)B$, erit etiam $mC \gtreqless (r-m)D$ (Prop. A. in Excursu ad hunc librum.) Sit autem b) $(r-m)B = nB$, adeoque etiam $(r-m)D = nD$. Quoniam igitur $A : B = C : D$, erit, quoties $mA \gtreqless nB$, etiam $mC \gtreqless nD$ i. e. iunctim iam sumtis casibus a et b, quoties

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δύοσιν δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· καὶ ἐὰν ἴσον, ἴσον· καὶ ἐὰν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, δύοσιν δὲ μεῖζον ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. Τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστι· μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Ἐὰν ἄρα ᾖ καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ

mA>=<(r−m)B, etiam mC>=<(r−m)D, adeoque quoties mA+mB>=<rB, etiam mC+mD>=<rD, vel, quo-

PROPOSITIO XX. (Fig. 330.)

Si sint tres magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione, ex aequo autem prima tertia maior sit, et quarta sexta maior erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, Γ, et aliae ipsis aequales multitudine Δ, E, Z, binae sumptae in eadem ratione, ut A ad B ita Δ ad E, ut vero B ad Γ ita E ad Z, ex aequo autem maior sit A ipsa Γ; dico et Δ ipsa Z maiorem fore; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.

Quoniam enim maior est A ipsa Γ, alia autem quaedam B, maior vero ad eandem maiorem rationem habet quam minor (V. 8.); habebit A ad B maiorem rationem quam Γ ad B. Sed ut A ad B ita Δ ad E, ut vero Γ ad B per inversionem ita Z ad E et Δ igitur ad E maiorem habet rationem quam Z ad E (V. 13.). Ad eandem autem rationem habentium, maiorem rationem habens maior est (V. 10.); maior igitur est Δ ipsa Z. Similiter ostendemus, et si A aequalis sit ipsi Γ, aequalem fore et Δ ipsi Z; et si minor, minorem. Si igitur sint etc.

PROPOSITIO XXI. (Fig. 331.)

Si sint tres magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae et in eadem ratione, sit

ties $m(A+B) >=< rB$, erit etiam $m(C+D) >=< rD$, adeoque etiam casu 2. erit $A+B : B = C+D : D$. Eodem modo de-

τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, διΐσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε. διΐσου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζον. ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μεῖζόν ἐστι ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ[1]· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

1) Rectius ita e Cod. a. legit Peyrardus, quum in edd. Oxon. et Basil. habeatur: ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον, ἴσον· θηλονότι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ε

monstratur, esse etiam A+B : A=C+D : C, unde V. Prop. 18. generalius ita enunciari potest: si quatuor magnitudines

autem perturbata earum proportio, ex aequo autem prima tertia maior sit, et quarta sexta maior erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, Γ, et aliae ipsis aequales multitudine Δ, E, Z, binae sumptae et in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ut A ad B ita E ad Z, ut vero B ad Γ ita Δ ad E, ex aequo autem A ipsa Γ maior sit; dico et Δ ipsa Z maiorem fore; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.

Quoniam enim maior est A ipsa Γ, alia vero quaedam B; A ad B maiorem rationem habet quam Γ ad B (V. 8.). Sed ut A ad B ita E ad Z, ut vero Γ ad B per inversionem ita E ad Δ (Prop. B.); quare et E ad Z maiorem rationem habet quam E ad Δ (V. 13.). Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est (V. 10.); minor igitur est Z ipsa Δ; maior est igitur Δ ipsa Z. Similiter ostendemus et si aequalis sit A ipsi Γ, aequalem fore et Δ ipsi Z; et si minor, minorem. Si igitur tres etc.

PROPOSITIO XXII. (Fig. 332.)

Si sint quotcunque magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione; et ex aequo in eadem ratione erunt.

fuerint proportionales, summa quoque duarum priorum erit ad alterutram earum, uti summa duarum posteriorum erit ad eam harum, quae priori in proportionis assumtae ordine respondet. Cf. Pfleiderer. l. c. p. 26.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Ν· Ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Κ, Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος Θ, Λ, Ν σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· διΐσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον,

PROPOSITIO XIX.

Symbolice ita: si A:B=A—C:B—D, erit etiam A:B =C:D, ubi patet, eiusdem generis esse magnitudines A, B, C, D. Addit hic Rob. Simson. sequens Cor. 2. Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: erit et reliqua ad reliquam ut ablata ad ablatam, hoc enim in ipsa demonstratione ostensum est. Illud autem Corollarium, quod vulgo huic propositioni adiungitur, quodque, ne quid textui deesse videretur, et nos in textu posuimus, non huc pertinere, iam in variantibus lectionibus diximus. Legitime autem illud demonstratum est infra in Excursu ad hunc librum Prop. E.

Sint quotcunque magnitudines A, B, Γ, et aliae ipsis aequales multitudine Δ, E, Z, binae sumptae in eadem ratione, ut A ad B ita Δ ad E, ut B vero ad Γ ita E ad Z; dico et ex aequo in eadem ratione fore, ut A ad Γ ita Δ ad Z.

Sumantur enim ipsarum A, Δ aeque multiplices H, Θ, ipsarum vero B, E aliae utcunque aeque multiplices K, Λ, et insuper ipsarum Γ, Z aliae utcunque aeque multiplices M, N.

Et quoniam est ut A ad B ita Δ ad E, et sumptae sunt ipsarum A, Δ aeque multiplices H, Θ, ipsarum vero B, E aliae utcunque aeque multiplices K, Λ; est igitur ut H ad K ita Θ ad Λ (V. 4.). Ex eadem ratione et ut K ad M ita Λ ad N. Et quoniam tres magnitudines sunt H, K, M, et aliae ipsis aequales multitudine Θ, Λ, N binae sumptae in eadem ratione; ex aequo igitur si superat H ipsam M, superat et Θ ipsam N; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor (V. 20.). Et sunt H, Θ ipsarum A,

PROPOSITIO XX.

Propositionis huius demonstrationem magis explicitam dedit Rob. Simson., quae ita habet: si sit $A:B=D:E$, et $B:C=E:F$, sit autem $A \geqq C$, erit ex aequo $D \geqq F$. Sit enim 1) $A>C$, eritque $A:B>C:B$ (V. 8.), adeoque, ob $A:B=D:E$, erit etiam $D:E>C:B$ (V. 13.). At $F:E=C:B$ (Prop. B.), adeoque etiam $D:E>F:E$ (V. 13.), unde $D>F$ (V. 10.). Sit 2) $A=C$, erit et $D=F$. Nam ob $A=C$, erit $A:B=C:B$ (V. 7.). Est autem $A:B=D:E$, et $C:B=F:E$ (Prop. B.), unde $D:E=F:E$ (V. 11.), adeoque $D=F$ (V. 9.). Sit 3) $A<C$, erit et $D<F$. Nam ob $A<C$,

ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς Δ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ Η, Θ τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα

erit C > A. Iam vero (Prop. B.) est C : B = F : E, et B : = E : D, unde, ob C > A, erit F > D (Cas. 1.) vel D < F. Eadem fere ratione rem Clavius demonstrat, nisi quod casum

Δ aeque multiplices, et M, N ipsarum Γ, Z aliae utcunque aeque multiplices; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Z (V. Def. 5.). Si igitur quotcunque etc.

PROPOSITIO XXIII. (Fig. 333.)

Si sint tres magnitudines, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio; et ex aequo in eadem ratione erunt.

Sint tres magnitudines A, B, Γ, et aliae ipsis aequales multitudine, binae sumptae in eadem ratione Δ, E, Z, sit autem perturbata earum proportio, ut A ad B ita E ad Z, et ut B ad Γ ita Δ ad E; dico esse ut A ad Γ ita Δ ad Z.

Sumantur ipsarum A, B, Δ aeque multiplices H, Θ, K, ipsarum vero Γ, E, Z aliae utcunque aeque multiplices Λ, M, N.

Et quoniam aeque multiplices sunt H, Θ ipsarum A, B, partes vero eandem habent rationem quam earum aeque multiplices (V. 15.); erit ut A ad B ita H ad Θ. Ex eadem ratione ut E ad Z ita M ad N; et est ut A ad B ita E ad Z; itaque ut H ad Θ ita M ad N (V. 11.). Et quoniam est ut B ad Γ ita Δ

tertium non ad primum reducit, sed pariter immediate adstruit.

τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ [1]) εἴληπται τῶν μὲν Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε ἄλλα, ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ, οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστί, τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Κ, Μ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καί ἐστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία· δύσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Λ, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια [2])· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Λ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία, καὶ τὰ ἑξῆς.

1) Loco eorum, quae hic habentur, Peyrardus e Codd. a. c. d. longe prolixius et manifesto erronee demonstrat esse, ut Θ ad Λ, ita Κ ad Μ. Nempe ex eo, quod Β : Γ = Δ : Ε concludit, esse alterne Β : Δ = Γ : Ε (V. 16.). At Β : Δ = Θ : Κ (V. 15.), adeoque Γ : Ε = Θ : Κ (V. 11); et Δ : Μ = Γ : Ε (V. 15.), adeoque Θ : Κ = Λ : Μ (V. 11.) et iterum alterne Θ : Λ = Κ : Μ. Ita vero propositio locum tantum habere videretur, si magnitudines Α, Β, Γ, et reliquae Δ, Ε, Ζ fuerint omnes eiusdem generis, quod longe secus est. Restituimus itaque locum, ut est in ed. Oxoniensi. Ed. Basileensis in loco, de quo disputamus, cum Oxoniensi consentit. Postea autem absurde eadem addit, quae vix e Peyrardo attulimus

2) Ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια. Haec verba, quae monente Rob. Simson. omnino necessaria sunt, etiam sine Codd. auctoritate addidimus.

PROPOSITIO XXI.

Huius quoque propositionis demonstrationem magis explicitam dedere Clavius et Rob. Simson., similem prorsus ei,

ad E, et sumptae sunt ipsarum B, Δ aequemultiplices Θ, K, ipsarum Γ, E autem aliae utcunque aeque multiplices Λ, M; erit, ut Θ ad Λ, ita K ad M (V. 4.). Ostensum autem est, et, ut H ad Θ, ita esse M ad N; quoniam igitur tres magnitudines sunt H, Θ, Λ, et aliae ipsis aequales multitudine K, M, N, binae sumptae in eadem ratione, et est earum perturbata proportio; ex aequo (V. 21.) si H superat Λ, superat et K ipsam N; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Et sunt H, K ipsarum A, Δ aeque multiplices, Λ, N vero ipsarum Γ, Z; alia utcunque aeque multiplicia; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Z (V. Def. 5.). Si igitur sint tres etc.

quam in propositione praecedente vidimus, unde facile illa derivabitur.

PROPOSITIO XXII.

Expressis quidem verbis in textu graeco haec propositio demonstrata tantum est eo casu, quo sunt tres magnitudines, et aliae ipsis numero aequales. Eandem autem valere generaliter, ut in enunciato propositionis asseritur, eadem ratione demonstrari potest, ut monuerunt Campanus, Clavius, Rob. Simson, aliique. Nempe si sint quatuor magnitudines A, B, C, D, aliaeque ipsis numero aequales E, F, G, H, sitque $A:B=E:F$, $B:C=F:G$, $C:D=G:H$, erit $A:D=E:H$. Quum enim pro tribus magnitudinibus iam demonstratum sit, esse $A:C=E:G$, et iam denuo sit $C:D=G:H$, res pariter redit ad tres magnitudines A, C, D, et totidem alias E, G, H. Atque ita semper, si res demonstrata fuerit pro m magnitudinibus, inde demonstrabitur pro $(m+1)$ magnitudinibus, adeoque demonstratio est generalis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. Καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς

Cor. Sponte inde fluit, rationum aequalium duplicatas, triplicatas etc. etiam aequales esse (Baermann.). Nempe, si A : B = B : C, et P : Q = Q : R, sitque A : B = P : Q, erit et (V. 11.) B : C = Q : R, unde A : C = P : R, et similiter de triplicata ratione etc. res demonstrabitur. (Conversam hujus vide in Excursu ad Prop. m.)

PROPOSITIO XXIII.

Hanc quoque propositionem valere de quotcunque magnitudinibus, quamvis in textu graeco non tam generaliter enun-

PROPOSITIO XXIV. (Fig. 334.)

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam eandem rationem quam sexta ad quartam; et simul sumptae prima et quinta ad secundam eandem rationem habebunt quam tertia et sexta ad quartam.

Prima enim AB ad secundam Γ eandem habeat rationem quam tertia ΔE ad quartam Z; habeat vero et quinta BH ad secundam Γ eandem rationem quam sexta $E\Theta$ ad quartam Z; dico et simul sumptas primam et quintam AH ad secundum Γ eandem habituras esse rationem quam tertia et sexta $\Delta\Theta$ ad quartam Z.

Quoniam enim est ut BH ad Γ ita $E\Theta$ ad Z; per inversionem erit (Prop. B.) ut Γ ad BH ita Z ad $E\Theta$. Et quoniam est ut AB ad Γ ita ΔE ad Z, ut autem Γ ad BH ita Z ad $E\Theta$; ex aequo igitur est ut AB ad BH ita ΔE ad $E\Theta$ (V. 22.). Et quoniam divisae magnitudines proportionales sunt, et compositae proportionales erunt (V. 18.); ut igitur AH ad BH ita $\Delta\Theta$ ad ΘE. Est autem et ut BH ad Γ ita

ciata sit, similique ac praecedentem ratione demonstrari, monuerunt Campanus, Clavius, Rob. Simson. aliique.

PROPOSITIO XXIV.

Huic propositioni Rob. Simson. sequentia addit corollaria:

Cor. 1. Manente hypothesi propositionis, erit excessus primae et quintae ad secundam, ut excessus tertiae et sextae ad quartam. Demonstratio eadem est cum demonstratione propositionis, dummodo vice componendo utamur dividendo.

τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· δύσοι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, Ζ τῶν ΓΔ, Ε μείζονά ἐστιν.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴσον τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴσον δὲ τῷ μὲν Ε τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ τὸ ΓΘ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Μεῖζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ, Ε. Καὶ ἐπεί, ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἄνισα

Cor. 2. Ipsa autem propositio vera est de quotcunque magnitudinibus, quarum priores ad communem secundam easdem habent rationes, quas habent reliquae ad communem quartam, singulae sc. priorum ad secundam, eandem, quam singulae reliquarum ad quartam; ut patet. (Nempe, si A : M = F : N, B : M = G : N, C : M = H : N, D : M = I : N etc. erit

$E\Theta$ ad Z; ex aequo igitur est (V. 22.) ut AH ad Γ ita $\Delta\Theta$ ad Z. Si igitur prima etc.

PROPOSITIO XXV. (Fig. 335.)

Si quatuor magnitudines proportionales sint, maxima et minima duabus reliquis maiores sunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, $\Gamma\Delta$, E, Z, ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita E ad Z; sit autem maxima quidem ipsarum AB, minima vero Z; dico AB, Z ipsis $\Gamma\Delta$, E maiores esse.

Ponatur enim ipsi E aequalis AH ipsi vero Z aequalis $\Gamma\Theta$.

Quoniam igitur est ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita E ad Z, aequalis autem E ipsi AH, Z vero ipsi $\Gamma\Theta$; est igitur ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita AH ad $\Gamma\Theta$. Et quoniam est ut tota AB ad totam $\Gamma\Delta$ ita ablata AH ad ablatam $\Gamma\Theta$; et reliqua HB ad reliquam $\Theta\Delta$ erit ut tota AB ad totam $\Gamma\Delta$ (V. 19.). Maior autem AB ipsa $\Gamma\Delta$; maior igitur et HB ipsa $\Theta\Delta$ (Prop. A.). Et quoniam aequalis est AH ipsi E, $\Gamma\Theta$ vero ipsi Z; erunt AH, Z aequales ipsis $\Gamma\Theta$, E. Et quoniam si inaequalibus aequalia addantur, tota inaequalia sunt (I. Ax. 4.); cum igitur HB, $\Theta\Delta$ inaequalia sint, sitque maior

etiam A+B+C+D etc. : M=Γ+G+H+I etc. : N, vel etiam excessus quarundam priorum super reliquas priores ad secundam, ut similis excessus reliquarum ad quartam v. c. A+B+C−D : M=Γ+G+H−I : N, vel A+B−C−D : M=Γ+G−H−I : N etc.)

ἐστίν· ἐὰν ἄρα τῶν ΗΒ, ΘΔ ἀνίσων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ, τῷ μὲν ΗΒ προστεθῇ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῇ τὰ ΓΘ, Ε, συνάγεται τὰ ΑΒ, Ζ μείζονα τῶν ΓΔ, Ε. Ἐὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

PROPOSITIO XXV.

Observante Rob. Simsone, si sumitur, primam quatuor magnitudinum proportionalium maximam esse omnium, sponte inde fluit ope Prop. A. et V. 14. quartam esse omnium mi-

IB, cui addantur *AH*, *Z*, ipsi vero *ΘΔ* addantur *Θ*, *E*, fient *AB*, *Z* maiores ipsis *ΓΔ*, *E*. Si igi-ır quatuor etc.

ümam. Caeterum sub finem huius libri Rob. Simson. quatuor ıdhuc addit propositiones F, G, H, K, quas nos exhibemus in Excursu ad librum VI. §§. 9. 10. 15.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Ὅροι.

α΄. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β΄. Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγων [1]) ὦσιν.

1) Editio Basil. et cum ea plures Elementorum editiones, quae textum graecum definitionem et enunciatorum propositionum habent, nominatim Orontii Fineii, Ioach. Camerarii, Scheubelii, Peletarii, Dasypodii habent λόγοι. Eadem lectio est etiam in excerptis ἐκ τῶν τοῦ Ἥρωνος περὶ τῶν τῆς γεωμετρίας ὀνομάτων a Dasypodio editis Argent. 1570. Ed. Oxon. legit ὅροι, quam vocem etiam Petr. Ramus ponendam putaverat. Conferantur tamen, quae ad V. Defin. 9. de seriore usu vocis ὅροι dicta sunt. Candalla iam suspicatus erat, legendum esse λόγων, quam lectionem Peyrardus e Cod. a. eruit, et in ed. Paris. posuit. Quod ex Candallae sententia ita interpretandum erit, utramque figuram binarum rationum antecedens et consequens comprehendere: scilicet antecedens primae et consequens secundae ad priorem, consequens vero primae et antecedens secundae rationis ad posteriorem figuram pertinere debent. Pfleiderer. Schol. in L. VI. Elem. §. 127—132. Forte legenda fuerit utraque vox: λόγων ὅροι, aut potius: ἡγούμενά τε καὶ ἑπόμενα λόγων.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

1. Similes figurae rectilineae sunt, quae et singulos angulos singulis aequales habent, et circa aequales angulos latera proportionalia.

2. Reciprocae autem figurae sunt, quando in utraque figurarum antecedentes et consequentes rationum sunt.

DEFIN. I.

Austin. contra hanc definitionem monet, non statim patere, an simul consistere possit in duabus figuris rectilineis mutua aequalitas angulorum, et proportionalitas laterum circa aequales angulos. Atque ita haec definitio ponenda aut saltim explicanda foret demum post VI. 4. At, quum in figuris regularibus, quas liber quartus describere docet, mutua illa aequalitas angulorum, et proportionalitas laterum locum habeat, si figurae istae eundem numerum laterum habeant, exemplum certe eiusmodi figurarum prostat, nec quisquam generaliter asserere poterit, esse ista ἀσύστατα. Et, quod Pfleiderer observat, (Schol. ad Libr. VI. Elem. Euclid. Tub. 1800. sqq. §. 297. Ista nempe scholia non integra, sed saltim ad §. 268.

γ'. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

δ'. Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

locem publicam viderunt, integra tamen in scriniis suis elaborata habuit beatus auctor et benevole mecum communicavit, unde, ipso permittente, nonnulla in nostrum usum convertimus) Euclidea rectilineorum similium definitio ipsam communem similitudinis notionem (quae lineamentorum similem situm ac proportionalitatem requirit) ad illa adplicatam et accurate determinatam sistit. Et Euclides, eodem monente, denominationem similium triangulis in VI. 8. demum applicat postquam in VI. 4—7. aequalitatem angulorum ac proportionalitatem laterum circa angulos aequales non solum generaliter coexistere posse, sed sub quibus conditionibus reapse coexistant, ostenderat: tum rectilinea universian, quae iuxta suam definitionem similia dici possint, in VI. 18. describere docet, antequam ad proprietates eorum discutiendas progrediatur. Cf. Phil. mathem. Abhandl. von Kästner und Klügel. Halle 1807. p. 16. sqq. Ipse Austin. contra similia triangula ea esse dicit, in quibus anguli unius aequales sunt respective angulis alterius. Similes autem rectilineas figuras plurium quam trium laterum eas esse dicit, quae dividi possint in aequalem numerum triangulorum similium, similiter positorum. Circa has Austini definitiones Pfleiderer. l. c. observat, definitionem triangulorum similium communem figurarum similium notionem non exhaurire, et demum adiecta propositione VI. 4. eam exhauriri. Caeterorum vero rectilineorum definitionem Austinianam, cum et multifariam ea possint in triangula dividi, et, quid similis triangulorum situs involvat, ab auctore non declaretur, vagam et ambiguam esse. Praeter necessitatem igitur, nec sine incommodo, uni definitioni duas substitui.

DEFIN. II.

Rob. Simson. observat, definitionem 2. non videri Eucli-

3. Secundum extremam et mediam rationem recta recta esse dicitur, quando est ut tota ad maius segmentum ita maius ad minus.

2. Altitudo est omnis figurae a vertice ad basin perpendicularis ducta.

dis esse, sed cuiusdam imperiti, quum nulla figurarum reciprocarum mentio fiat ab Euclide, nec a quoquam alio geometra, et definitio praeterea obscure enunciata sit. Ipse autem Simson. clarius eam ita exhibuit: „reciprocae figurae, triangula sc. et parallelogramma sunt, quando circa duos angulos latera ita sunt proportionalia, ut latus primae sit ad latus secundae, ut reliquum secundae latus ad latus reliquum primae." In adiectis deinde notis aliam generaliorem vice eius posuit, nempe „duae magnitudines dicuntur reciproce proportionales duobus aliis, quando altera priorum est ad alteram posteriorum, ut reliqua posteriorum ad reliquam priorum." Simsonis iudicium de Def. 2. confirmat Pfleiderer. Schol. ad Libr. VI. Elem. §. 132., dum observat, Prop. VI. 14., VI. 15., XI. 34. etc. non dicere, ἀντιπεπονθότα parallelogramma, triangula etc. sed: ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ κ. τ. λ., quarum formularum sensus praeterea in singularum propositionum enunciatione VI. 14., VI. 15. etc. diserte indicetur. Caeterum Pfleiderer. monet, Rob. Simsonis definitionem, per se ad quatuor homogeneas magnitudines restrictam, ad solas libri VI. propositiones quadrare.

DEFIN. IV.

Pfleiderer. in Schol. §. 1. observat, hanc definitionem non genuinam esse videri, cum in parallelogramma, parallelepipeda, prismata, cylindros, quorum altitudines in elementis commemorentur, non quadret. Praeterea eam deesse in versione Campani, nec Proclum ad I. 38. eius rationem habere. Nempe altitudo in figura rectilinea non absolute dicitur, sed semper refertur ad aliquod figurae latus, quod pro basi sumitur, et significat maximum perpendiculum, quod a puncto

ε. (Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα [1]).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα. τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγομένην· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ, καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλή-

1) Hanc definitionem quintam, quae apud Peyrardum deest, at ipso teste in omnibus codicibus (quanquam in Cod. 1. tantum in margine) reperitur (nisi quod pro τινὰ legunt τινάς) ex ed. Oxon. huc reposuimus, non quod ipsam genuinam esse putaremus, sed quo melius ea, quae viri docti de VI. 5. Def. disputant, intelligi possint. Campanus hanc definitionem non habet. Ed. Basil. pro τινά, quod Oxon. habet, legit τινάς. Vide caeterum Excurs. ad finem huius libri.

aliquo figurae in hoc latus demitti potest. Iam vero vel unum aliquod figurae punctum ab hac basi magis distat, quam reliqua figurae puncta quaecunque, et tum perpendiculum ab hoc puncto in basin demissum altitudo figurae, quatenus ad hanc basin refertur, vocatur: vel plura figurae puncta unam ean-

(5. Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatae illius faciunt quantitatem.)

PROPOSITIO I. (Fig. 373.)

Triangula et parallelogramma, quae eandem altitudinem habent, inter se sunt ut bases.

Sint triangula $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, parallelogramma vero $E\Gamma$, ΓZ, quae eandem altitudinem habent, nempe perpendicularem ab A ad $B\Delta$ ductam; dico, esse ut basis $B\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ basin ita triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum $A\Gamma\Delta$, et parallelogrammum $E\Gamma$ ad parallelogrammum ΓZ.

Producatur enim $B\Delta$ ex utraque parte ad puncta Θ, Λ, et ponantur basi $B\Gamma$ aequales quotcunque BH, $H\Theta$, basi vero $\Gamma\Delta$ aequales quotcunque ΔK, $K\Lambda$, et iungantur AH, $A\Theta$, AK, $A\Lambda$.

Et quoniam aequales sunt ΓB, BH, $H\Theta$ inter se, aequalia sunt et $A\Theta H$, AHB, $AB\Gamma$ triangula inter

demque inter se a basi distantiam habent, adeoque I. 34. Cor. 4. in recta basi parallela sita sunt, ea ipsa distantia a basi autem maior est quovis perpendiculo ex alio quocunque figurae puncto in hanc basin demisso, tum iterum communis illa punctorum a basi distantia vel perpendiculum maius quovis alio a reliquis figurae punctis non in recta ista basi parallela sitis demisso altitudo figurae ad hanc basin relata vocatur. Itaque in triangulo quidem perpendiculum a vertice in oppositam basin demissum, in parallelogrammo autem perpendiculum e puncto quocunque rectae basi parallelae in basin demissum erit altitudo figurae, quatenus ea ad hanc basin refertur. Quum igitur duae figurae inter easdem parallelas constitutae sint,

λοις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΓΛ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΛΓ τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἔλασσων, ἔλασσον. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἥτε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον· τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια ἥτε ΓΛ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττων, ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ

eandem altitudinem habent, et vice versa Cor. 3. et I. 34. Cor. 4.

DEFIN. V.

De hac definitione vide Excursum sub finem huius libri.

PROPOSITIO I.

Obs. 1. Demonstratio partis prioris supponit corollarium ex I. 38. deductum simile corollario 2. ex Prop. 36. deducto,

se (I. 38.), quam multiplex igitur est basis ΘΓ ipsius ΒΓ basis, tam multiplex est et triangulum ΑΘΓ ipsius ΑΒΓ trianguli. Ex eadem ratione quam multiplex est basis ΓΛ ipsius ΓΔ basis, tam multiplex est et triangulum ΑΛΓ ipsius ΑΓΔ trianguli; et (I. 38.) si aequalis est basis ΘΓ ipsi basi ΓΛ, aequale est et triangulum ΑΘΓ ipsi triangulo ΑΛΓ; et si superat basis ΘΓ ipsam basin ΓΛ, superat et triangulum ΑΘΓ ipsum triangulum ΑΛΓ; et si minor, minus. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem basibus ΒΓ, ΓΔ, duobus vero triangulis ΑΒΓ, ΑΓΔ, sumpta sunt aeque multiplicia basis ΒΓ et trianguli ΑΒΓ, ipsa basis ΘΓ et triangulum ΑΘΓ; basis vero ΓΔ et trianguli ΑΓΔ alia utcunque aeque multiplicia, basis ΓΛ et triangulum ΑΛΓ. Et ostensum est si superat basis ΘΓ ipsam ΓΛ basin, superare et triangulum ΑΘΓ ipsum triangulum ΑΛΓ; et si aequalis, aequale, et si minor, minus; est igitur (V. Def. 5.) ut basis ΒΓ ad basin ΓΔ ita triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΑΓΔ.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ duplum est parallelogrammum ΕΓ (I. 41.), ipsius vero trianguli ΑΓΔ duplum est parallelogrammum ΖΓ, partes autem eandem

quod pariter locum habere diximus ad I. 38., nempe triangula in iisdem parallelis constituta, sed super basibus inaequalibus, inaequalia esse, maius nempe illud, cuius basis maior sit. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 4.

Obs. 2. Quamvis autem enunciatum propositionis et expositio supponat triangula et parallelogramma invicem contigua, super basibus in directum iacentibus constituta, et quidem in adiecto schemate ad oppositas partes lateris communis

μήκη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς ἡ μὲν ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἤχθη τις εὐθεῖα [1]), ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.

1) Edd. Basil. et Oxon. hic et sub finem propositionis addunt παράλληλος, quam vocem, quum in παρὰ iam continetur, ex fide Cod. a. cum Peyrardo omisimus.

delineata, demonstratio tamen aeque pertinet ad triangula et parallelogramma aequalium altitudinum: quibus ita dispositis, ut bases illorum sint in eadem recta linea, et figurae ipsae ad easdem huius rectae partes recta per vertices triangulorum ducta ei, in qua bases sunt, fit parallela (I. 28. I. 33.); parallelogrammorum vero latera basibus opposita in eandem incidunt rectam, ei, in qua bases sunt, parallelam (I. 28. I. 33.). Quare triangula etiam et parallelogramma aequealta sunt uti bases. (Pfleiderer. l. c. §§. 5—8. Rob. Simson. Cor. ad VI. 1. Cf. demonstratio et figura Clavii, et expositio Procli ad I. 38., qui ita habet: τὸ αὐτὸ ὕψος οὐδὲν διαφέρει ἢ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις. Πάντα γὰρ τὰ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα

habent rationem quam earum aeque multiplices (V. 15.); est igitur ut triangulum *ΑΒΓ* ad triangulum *ΑΓΔ* ita parallelogrammum *ΕΓ* ad parallelogrammum *ΖΓ*. Quoniam igitur ostensum est, ut basis *ΒΓ* ad basin *ΓΔ* ita triangulum *ΑΒΓ* ad triangulum *ΑΓΔ*; ut autem triangulum *ΑΒΓ* ad triangulum *ΑΓΔ* ita parallelogrammum *ΕΓ* ad parallelogrammum *ΖΓ*; igitur (V. 11.) basis *ΒΓ* ad basin *ΓΔ* ita parallelogrammum *ΕΓ* ad parallelogrammum *ΖΓ*. Ergo triangula etc.

PROPOSITIO II. (Fig. 338.)

Si uni laterum trianguli parallela ducatur quaedam recta, illa proportionaliter secabit trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, recta sectiones coniungens reliquo trianguli lateri parallela erit.

παραλλήλοις ὑπὸ τὸ αὐτό ἐστιν ὕψος, καὶ ἀναπάλιν. Ὕψος γάρ ἐστιν ἡ ἀπὸ τῆς ἑτέρας παραλλήλου κάθετος ἐπὶ τὴν λοιπήν.

Obs. 3. Propositiones I. 35—38. theoremate VI. 1. quidem comprehenduntur, sed, cum huius demonstratio illis nitatur, non simul cum hoc una stabiliri demonstratione dici possunt, quamvis Proclus l. c. contrarium asserat. Pfleiderer. l. c. §. 10.

Obs. 4. Parallelogramma et triangula rectangula, quae unum latus circa angulum rectum commune, vel aequale habent, esse ut altera ipsorum latera circa angulum rectum, asserto generali VI. 1. et Obs. 2. continetur. Hinc parallelogramma et triangula, primum rectangula, tum (I. 35. I. 37.) quaelibet super eadem vel aequalibus basibus constituta, sunt uti altitudines. Quod ipsum Clavius simili modo infert, Commandinus Polixius, nec legitime deducit. Pfleiderer. l. c. §§. 11. 12.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ. Ἄλλο δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ

Obs. 5. Ea, quae Obs. 4. ad initium dicta sunt, complectuntur Lemmata Elem. libro X. vulgo inserta, nempe ante X. 23. X. 32. Lemm. 2. ante X. 34. et Lemm. 3. ante X. 31. Pfleiderer l. c. §. 13.

Obs. 6. Per deductionem ad impossibile similem ei, quae demonstrandis I. 39. I. 40. adhibetur, facile demonstratur VI Prop. 1. et Obs. 2. et Obs. 4. converse: nempe triangula et parallelogramma, quae sunt inter se, ut bases, aequales habere altitudines, vel eandem; et quae sunt inter se, ut altitudines, aequales habere bases, si unam et eandem non habeant. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 14. Clavius, aliique.

PROPOSITIO II.

Obs. 1. In Prop. 2. sumitur, rectam, quae basi trianguli parallela ducitur, necessario convenire cum reliquis trianguli lateribus ipsis aut productis, quod quidem necessario fieri patet ex I. 29. Cor. 3. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 15.

Obs. 2. Ex VI. Prop. 2. quod nempe sit $BΔ : ΔA = ΓE : EA$, sequitur etiam, esse inverse $ΔA : BΔ = EA : ΓE$ (Prop. B in Excursu ad Libr. V. Elem.) et componendo (V. 18.) $AB : \left(\begin{matrix} AΔ \\ BΔ \end{matrix}\right) = AΓ : \left(\begin{matrix} AE \\ EΓ \end{matrix}\right)$, et alterne (VI. 16.) $BΔ : ΓE = ΔA : EA$,

Trianguli enim $AB\Gamma$ uni laterum $B\Gamma$ parallela ducatur ΔE; dico esse ut $B\Delta$ ad ΔA ita ΓE ad EA.

Iungantur enim BE, $\Gamma\Delta$.

Aequale igitur est triangulum $B\Delta E$ triangulo $\Gamma\Delta E$ (I. 37.), in eadem enim basi sunt ΔE et intra easdem parallelas ΔE, $B\Gamma$. Aliud autem quoddam triangulum est $A\Delta E$; aequalia vero ad idem eandem habent rationem (V. 7.); est igitur ut triangulum $B\Delta E$ ad triangulum $A\Delta E$, ita triangulum $\Gamma\Delta E$ ad triangulum $A\Delta E$. Sed ut triangulum $B\Delta E$ ad $A\Delta E$ ita $B\Delta$ ad ΔA; nam cum sub eadem altitudine sint, nempe sub

et $AB : A\Gamma = A\Delta : AE = B\Delta : E\Gamma$. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 16. 17. 22.

Obs. 3. Pariter earum propositionum omnium, quae Obs. 2. continentur, conversae eodem modo locum habent, ac in parte altera VI. Prop. 2. Conversa partis prioris demonstratur. Nempe ex suppositionibus $AB : \left(\frac{A\Delta}{\Delta B}\right) = A\Gamma : \left(\frac{AE}{E\Gamma}\right)$ dividendo (V. 17.), pariterque ex suppositione $B\Delta : \Gamma E = \Delta A : EA$ alterne (V. 16.) consequitur, esse $B\Delta : \Delta A = \Gamma E : EA$, unde ex parte altera V. Prop. 2. consequitur, omnibus his casibus esse rectam ΔE parallelam basi. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 20. 21. 22.

Obs. 4. Quae in VI. Prop. 2. similiterque ea, quae in Obs. 2. et 3. continentur, pariter locum habent, si recta ΔE ita ducatur (Fig. 339. 340.), ut non ipsis trianguli $AB\Gamma$ lateribus, sed saltim iis vel ultra verticem A, vel ultra basin $B\Gamma$ productis occurrat, quod facile eodem modo probatur. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 23. 24. Unde et Rob. Simson. et Playfair. rem ita enunciant: si uni laterum trianguli parallela quaedam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit reliqua trianguli latera, vel latera producta: et, si latera trianguli, vel latera producta proportionaliter secta fuerint, quae sectiones

τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην, πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, ὡς δὲ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. Ἑκατέρον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καὶ

coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Omnia, etiam ea, quae in observationibus 2—4 dicta sunt, sic etiam licet complecti: quae ab cruribus eiusdem anguli, vel duorum angulorum ad verticem oppositorum per duas rectas parallelas tam verticem inter et alteram earum, quam ipsas inter patallelas abscinduntur segmenta, sic proportionalia sunt, ut, quam rationem mutuo habent duo segmenta unius cruris, eandem invicem habeant duo segmenta homologa, seu similiter sita cruris alterius; et ut singula unius cruris segmenta ad segmenta homologa cruris alterius sint in eadem ratione. Vicissim parallelae sunt rectae, quae ab cruribus eiusdem anguli, vel duorum angulorum ad verticem oppositorum, seg-

perpendiculari ab E ad AB ducta, inter se sunt ut bases (VI. 1.). Ex eadem ratione ut triangulum $\Gamma\Delta E$ ad $A\Delta E$ ita ΓE ad EA; ut igitur $B\Delta$ ad ΔA ita ΓE ad EA (V. 11.).

Sed trianguli $AB\Gamma$ latera AB, $A\Gamma$ proportionaliter secta sint in punctis Δ, E, ut $B\Delta$ ad ΔA ita ΓE ad EA, et iungantur ΔE; dico parallelam esse ΔE ipsi $B\Gamma$.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut $B\Delta$ ad ΔA ita ΓE ad EA, sed ut $B\Delta$ ad ΔA ita triangulum $B\Delta E$ ad triangulum $A\Delta E$, ut ΓE vero ad EA ita triangulum $\Gamma\Delta E$ ad triangulum $A\Delta E$ (VI. 1.); erit (V. 11.) ut triangulum $B\Delta E$ ad triangulum $A\Delta E$ ita triangulum $\Gamma\Delta E$ ad triangulum $A\Delta E$. Utrumque igitur triangulorum $B\Delta E$, $\Gamma\Delta E$ ad triangulum $A\Delta E$ eandem habet rationem. Aequale igitur est (V. 9.) triangulum $B\Delta E$ triangulo $\Gamma\Delta E$; et sunt super eadem basi ΔE. Aequalia autem triangula super eadem basi

menta alterutro ordine indicato proportionalia abscindunt. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 25. Denique observari potest, similes proportiones locum habere, si non duae tantum, sed plures rectae parallelae a cruribus anguli, vel duorum angulorum ad verticem oppositorum segmenta abscindant, et vice versa. Cf. Tacquet. VI. 2. Cor. 1.

Obs. 5. Pariter duas rectas non contiguas, duabus interceptas parallelis, pariter ab tertia his parallela proportionaliter secari, et vicissim, facile probatur, et ad segmenta etiam pluribus, quam tribus rectis inter se parallelis abscissa extendi potest. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 29. 30. 31. et, quae ibi citantur, demonstrationes Euclidis in VI. 10. et XI. 17. adhibitae.

εἰσω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. Τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

PROPOSITIO III.

Propositio haec valet de triangulis aequicruris pariter ac non aequicruris. Et de aequicruris quidem pars prior propositionis iam ex I. 4. pars posterior ex I. 8. patet. Cf. I. 26. Cor. 1. 2. Quod triangula non aequicrura attinet, illud ante omnia facile ostendetur, rectam, quae angulum ad verticem bifariam secat, basin ad angulos obliquos (in aequicruris anguli fiunt recti) et in partes inaequales secare, sic, ut minus segmentum adiaceat cruri minori, atque is angulus acutus sit, qui cruri minori opponitur. Nempe, si (Fig. 342.) $\Delta\Gamma > \Delta B$, et $\Delta\Delta$ angulum $B\Delta\Gamma$ bifariam dividit, ob angulum $B > \Gamma$ (I. 18.), sunt anguli $B + \Delta\Delta B > \Gamma + \Delta\Delta\Gamma$, ideoque (I. 32.) $\Delta\Delta\Gamma > \Delta\Delta B$. Et, ab $\Delta\Gamma$ abscissa $\Delta E = \Delta B$, et iuncta recta ΔE, sunt (I. 4.) $\Delta E = \Delta B$, et ang. $\Delta E\Delta = \Delta B\Delta$. Quare, producta ΔB versus Z, est ang. $\Delta BZ = \Delta E\Gamma$ (I. 13.). At $\Delta BZ > \Gamma$ (I. 16.), ergo $\Delta E\Gamma > \Gamma$, ideoque $\Delta\Gamma > \Delta E$ (I. 19.) i. e. $\Delta\Gamma > \Delta B$. Pfleiderer. l. c. §§. 32. 33.

Obs. 2. Quae igitur trianguli non aequicruri basin $B\Gamma$ bifariam secat ex vertice trianguli Δ ducta recta ΔH in huius segmentum $\Delta\Gamma$ incidit, proinde in inaequales dividit angulum ad verticem $B\Delta\Gamma$, sic, ut maior sit angulus $B\Delta H$, qui mi-

nstituta et intra easdem parallelas sunt (I. 39.). Parallela igitur est ΔE ipsi $B\Gamma$. Si igitur trianguli etc.

PROPOSITIO III. (Fig. 341.).

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta secet et basin; segmenta basis eandem habebunt rationem quam reliqua trianguli latera; et si segmenta basis eandem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, recta a vertice ad sectionem ducta bifariam secat trianguli angulum.

nori cruri AB adiacet: eademque AH obliqua est basi, ob angulum $AH\Gamma >$ obtuso $A\Delta\Gamma$, et $AHB <$ acuto $A\Delta B$ (I. 16.), quae posterior pars etiam ex I. 25. consequitur. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 34. 35.

Obs. 3. In demonstratione VI. Prop. 3., quae complectea, quae Obs. 1. 2. dicta sunt, ostendendum est ante omnia, rectam ΓE (Fig. 341.) convenire cum producta BE, quod facile ope I. 29. Cor. 3. fiet, vel simili modo, quo in demonstratione VI. 4. res ad I. Ax. 11. vel I. Post. 5. reducitur. Poterat autem constructio etiam ita absolvi, ut a producta $B\Delta$ abscinderetur segmentum $AE = A\Gamma$, ubi tum facile ex parte posteriore VI. Prop. 2. ostenderetur, iunctam ΓE parallelam esse rectae ΔE. Et forte haec ipsa applicatio partis posterioris VI. 2. indicaverit, hanc constructionem, et, quae inde fluit, demonstrationem genuinam potius esse, quam quae nunc in elementis exstant, quae, nisi suppleantur, quae initio huius observationis diximus, quodammodo manca videri possit. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 37—40.

Obs. 4. Rectae AZ, BH, ΓE (Fig. 345.) bifariam secantes angulos cuiuslibet trianguli, et ad latera usque opposita productae, ita se mutuo in puncto sectionis communi Δ

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ

(Obs. 2. ad IV. 4. Cf. Pfleiderer. §§. 41. 42.) dividum, ut cuiuslibet segmentum adiacens angulo trianguli sit ad eius segmentum adiacens lateri opposito trianguli, ut summa laterum trianguli comprehendentium illum angulum est ad latus hoc ei oppositum; tota autem recta sit ad segmentum ipsius adiacens $\left(\begin{smallmatrix}\text{angulo}\\ \text{lateri}\end{smallmatrix}\right)$ trianguli, uti perimeter trianguli est ad $\left(\begin{smallmatrix}\text{summam laterum circa hunc angulum}\\ \text{hoc latus.}\end{smallmatrix}\right)$. Nempe ex VI. 3.

$$\text{erit } AΔ : ΔZ = \left(\begin{matrix} AB : BZ, \text{ ob ang. } ABΔ = ZBΔ \\ AΓ : ΓZ, \text{ ob ang. } AΓΔ = ZΓΔ \end{matrix}\right)$$
$$= AB + AΓ : BΓ \text{ (V. 12.)}$$

$$\text{et hinc } AZ : \left(\begin{matrix} AΔ \\ ΔZ \end{matrix}\right) = AB + AΓ + BΓ : \left(\begin{matrix} AB + AΓ \\ BΓ \end{matrix}\right) \text{ (V. 18.)}$$

Eodemque modo ostenditur, esse

$$BH : BΔ : ΔH = AB + BΓ + AΓ : AB + BΓ : AΓ$$
$$ΓE : ΓΔ : ΔE = AΓ + BΓ + AB : AΓ + BΓ : AB.$$

Nominatim itaque in triangulo aequilatero sunt

$$\left.\begin{matrix} AZ : AΔ : ΔZ \\ BH : BΔ : ΔH \\ ΓE : ΓΔ : ΔE \end{matrix}\right\} = 3 : 2 : 1.$$

Pfleiderer. l. c. §§. 43. 44.

Sit triangulum $AB\Gamma$, et secetur angulus $B\Delta\Gamma$ fariam ab ipsa $A\Delta$ recta; dico esse ut $B\Delta$ ad $\Delta\Gamma$ a BA ad $A\Gamma$.

Ducatur enim per Γ ipsi ΔA parallela ΓE (I. 31.), t producta BA conveniat cum ipsa in E.

Et quoniam in parallelas $A\Delta$, $E\Gamma$ recta incidit $A\Gamma$; rgo angulus $A\Gamma E$ aequalis est angulo $\Gamma A\Delta$ (I. 29.). ied $\Gamma A\Delta$ ipsi $BA\Delta$ ponitur aequalis; ergo et $BA\Delta$ psi $A\Gamma E$ est aequalis. Rursus, quoniam in paralleas $A\Delta$, $E\Gamma$ recta incidit BAE, angulus exterior $BA\Delta$ equalis est interiori $AE\Gamma$ (I. 29.). Ostensus autem st et $A\Gamma E$ ipsi $BA\Delta$ aequalis; ergo angulus $A\Gamma E$

Obs. 5. Vicissim, si recta AZ trianguli perimetro terminata, et aliquem eius angulum bifariam dividens ita secatur in puncto Δ, ut sit $A\Delta : \Delta Z = AB + A\Gamma : B\Gamma$; caeterae etiam rectae per punctum huius sectionis Δ ex verticibus angulorum trianguli ductae bifariam hos angulos divident. Non enim bifariam dividant angulos B, Γ rectae $B\Delta$, $\Gamma\Delta$, sed $B\Theta$, $\Gamma\Theta$ (Obs. 2. ad IV. 4.): itaque foret (Obs. 4.) $A\Theta : \Theta Z = BA + A\Gamma : B\Gamma$ (Obs. 4.): ideoque $A\Theta : \Theta Z = A\Delta : \Delta Z$ (V. 11.), $AZ : \Theta Z = AZ : \Delta Z$ (I. 18.) et $\Theta Z = \Delta Z$ (V. 9.) contra I. Ax. 9. Simili modo enunciantur, et vel immediate similiter demonstrantur, vel ad proxime praecedentem casum ope V. 17. reducuntur conversae reliquarum partium Obs. 4. Pfleiderer. l. c. §§. 45. 46.

Obs. 6. Quodsi iam recta ducatur, quae bifariam dividat angulum exteriorem ad verticem trianguli, recta ita ducta 1) in triangulo aequicruro $AB\Gamma$ (Fig. 344.) parallela erit basi $B\Gamma$. Nam, quum ex supp. angulus $ZA\Theta = \Theta AB = \frac{ZAB}{2} = \frac{B+\Gamma}{2}$ (I. 32.) $= B = \Gamma$ (I. 5.), adeoque ΘA parallela rectae $B\Gamma$ (I. 27.). Et conversa quoque, nempe, si ΘA parallela sit rectae $B\Gamma$, fore angulum ZAB ad ΘA bisectum, ope I. 29. et I. 5. facile ostendetur. 2) In triangulo autem non aequicruro

ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. Ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἄλλα καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἐστὶν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ

(Fig. 345.), si angulus exterior ZAB bisecetur recta $A\Theta$, haec ipsa recta cum basi $B\Gamma$ producta ad eam partem, ad quam est crus minus AB, concurret in puncto aliquo H. Nam, quum angulus $ZAB = \Gamma + AB\Gamma$ (I. 32.), at $AB\Gamma > \Gamma$ (I. 18.) erit $ZAB < 2AB\Gamma$, adeoque $\Theta AB = \frac{ZAB}{2} < AB\Gamma$, et $\Theta AB + ABH < AB\Gamma + ABH < 2$ rect. (I. 13.) unde ΘA, BH ex hac parte concurrent (I. Post. 5.). Pfleiderer. §§. 47. 48.

Obs. 7. Recta $A\Theta$, quae angulum externum ZAB trianguli non aequicruri bisecat, cum basi ad partem cruris minoris productam concurret (Obs. 6.) et ita quidem, ut segmenta in ipsa inter punctum hoc concursus et terminos basis abscissa BH, ΓH eandem habeant rationem, quam trianguli crura BA, ΓA quibus adiacent. Abscindatur enim ab $A\Gamma$ recta $AE = AB$, et iungatur BE, eritque angulus $ZAB = ABE + AEB$ (I. 32.)

ɔsi $AE\Gamma$ est aequalis; quare et latus AE lateri $A\Gamma$ ɜt aequale (I. 6.). Et quoniam uni laterum trianguli ɜΓE nempe $E\Gamma$ parallela ducta est $A\Delta$; erit (VI. 2.) t $B\Delta$ ad $\Delta\Gamma$ ita BA ad AE. Aequalis autem est ɪE ipsi $A\Gamma$; ut igitur $B\Delta$ ad $\Delta\Gamma$ ita BA ad $A\Gamma$.

Sed sit ut $B\Delta$ ad $\Delta\Gamma$ ita BA ad $A\Gamma$; et iungatur ɪΔ; dico bifariam sectum esse angulum $BA\Gamma$ ab $A\Delta$ ɛecta.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut $B\Delta$ ad $\Delta\Gamma$ ita BA ad $A\Gamma$, sed et ut $B\Delta$ ad $\Delta\Gamma$ ita est BA ɔd AE (VI. 2.); trianguli enim $B\Gamma E$ uni lateri $E\Gamma$ parallela ducta est $A\Delta$; erit igitur BA ad $A\Gamma$ ita BA ad AE; aequalis igitur $A\Gamma$ ipsi AE (V. 9.); quare

$=2ABE$ (I. 5.), adeoque $\Theta AB=\left(\frac{ZAB}{2}=\right)ABE$, et AH parallela rectae BE (I. 27.), adeoque $BH:\Gamma H=AE:A\Gamma$ (Obs. 2. ad VI. 2.) $=AB:A\Gamma$ (V. 11.). Vicissim, si $BH:\Gamma H=AB:A\Gamma$, iuncta AH angulum ZAB bisecabit. Rursus enim, facta $AE=AB$, iunctaque BE, erit $BH:\Gamma H=AE:A\Gamma$ (V. 11.), adeoque rectae AH, BE parallelae (VI. 2. Obs. 3.), proinde angulus $\Theta AB=ABE$ (I. 29.), et $ZA\Theta=AEB$ (I. 29.), adeoque, ob $ABE=AEB$ (I. 5.), etiam $\Theta AB=ZA\Theta=ZAB$

2. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 48.

Obs. 8. Poterat autem iuberi, ut recta BE rectae $A\Theta$ parallela agatur, et demonstratio eodem modo absolvi ac in textu elementorum VI. 3., atque hac ratione rem efficiunt Rob. Simson. in Prop. A. post VI. 3. inserta, quae idem enunciat, quod praecedens Obs. 7., ac Playfair. Et Simson. qui

πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση. Ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. Ἐὰν ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

dem monet: „casus secundus, qui habetur in Prop. A, pariter utilis ac primus, tertiae propositioni additus est, videlicet is, quo angulus trianguli exterior bifariam secatur recta linea. Demonstratio eius simillima est demonstrationi primi casus, et ob hanc forsam causam tum ea, tum enunciatio casus, omissa est ab imperito quodam editore. Pappus certe hac tanquam propositione elementari (simul cum ipsa VI. 3.) utitur in VII. Prop. 39. Collect. Mathem.“ Utramque etiam propositionem, nempe VI. 3. et alteram ei similem Obs. 7. allatam uno enunciato complecti licet, quod et Playfair. notat. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 49. 50.

Obs. 9. Quodsi simul angulus trianguli non aequicruri $BA\Gamma$ (Fig. 346.) recta $A\Delta$, et anguli externi $BA\Xi$ recta $B\Theta$ bisecetur, angulus $\Delta A\Theta$, quem rectae $A\Delta$, $A\Theta$ efficiunt, rectus erit. Nam, quum $BA\Xi + BA\Gamma = 2$ Rect. (I. 13. erit $\Theta A\Delta = \left(\frac{BA\Xi}{2} + \frac{BA\Gamma}{2} =\right)$ Recto. Quodsi super eadem basi $B\Gamma$ aliud triangulum $\alpha B\Gamma$ constitutum sit, cuius crura eandem inter se rationem habent, quam crura trianguli $AB\Gamma$, ita, ut sit $\alpha B : \alpha\Gamma = AB : A\Gamma$, et bisecetur etiam huius trianguli angulus ad verticem $B\alpha\Gamma$, et qui ei deinceps est, $\zeta\alpha B$, rectae hos angulos bisecan-

et angulus $AE\Gamma$ angulo $A\Gamma E$ est aequalis (I. 5.) Sed $AE\Gamma$ exteriori $BA\Delta$ aequalis (I. 29.); $A\Gamma E$ vero alterno $\Gamma A\Delta$ est aequalis; angulus $BA\Delta$ igitur angulo $\Gamma A\Delta$ est aequalis. Itaque angulus $BA\Gamma$ bifariam sectus est ab $A\Delta$ recta. Si igitur trianguli etc.

PROPOSITIO IV. (Fig. 347.)

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera circa aequales angulos; et homologa, quae aequales angulos subtendunt, latera.

tes ad eadem puncta Δ, H baseos ipsius et productae vergent, ad quae rectae $A\Delta$, AH, quae angulos $BA\Gamma$, $ZA\Delta$ bifariam secant. Si enim fieri potest, recta v. c., quae angulum $B\alpha\Gamma$ bifariam secat, secet basin in puncto K, quod a Δ diversum sit, eritque ex VI. 3. $BK : \Gamma K = B\alpha : \Gamma\alpha = BA : \Gamma A$ (supp.) $= B\Delta : \Gamma\Delta$ (VI. 3.), adeoque erit $B\Gamma : \Gamma K = B\Gamma : \Gamma\Delta$ (V. 18.), et $\Gamma K = \Gamma\Delta$ (V. 9.), quod est absurdum. Et eodem modo res de recta, quae angulum $\zeta\alpha E$ bifariam secat, probatur.

Obs. 10. Quum rectae $H\alpha$, $\Delta\alpha$ pariter inter se rectum angulum efficiant, idemque obtineat in omnibus triangulis non aequicruris super eadem basi $B\Gamma$ constitutis, quorum crura eandem inter se rationem habent, vertices omnium eiusmodi triangulorum erunt in semicirculo super $H\Delta$ descripto, sive iste semicirculus erit locus geometricus verticum omnium triangulorum, quorum basis est $B\Gamma$, et quorum crura eandem inter se rationem habent, quam habet AB ad $A\Gamma$ (III. 31. Cor. 2.). Cf. Apollon. Loc. Plan. II. Loc. 2. De triangulis aequicruris vide I. 26. Cor. 6.

Obs. 11. Quum sit (Obs. 7.) $BH : \Gamma H = AB : A\Gamma$ vel $BH : \Gamma H = \begin{pmatrix} \Gamma\Delta \\ H\Delta - BH \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \Gamma\Delta \\ \Gamma H - H\Delta \end{pmatrix}$ rectae HB, $H\Delta$, $H\Gamma$

Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ ἴση ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ ΒΑ, ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.

erunt harmonice continue proportionales. Cf. dicta ad Lib. V. Defin. 8. Et conversa quoque facile demonstrabitur, nempe, si sit $HB:H\Gamma=B\Delta:\Gamma\Delta$, fore etiam $AB:A\Gamma=B\Delta:\Gamma\Delta=HB:H\Gamma$, et rectam $A\Delta$ angulum $BA\Gamma$ pariterque rectam $A\Pi$ angulum ZAH bisecare.

PROPOSITIO IV.

Obs. 1. Triangula, qualia in hac propositione occurrunt, vel (I. 32. Cor. 3.) quorum duo saltim anguli unius duobus alterius, singuli singulis aequales sunt, iuxta VI. Def. 1. similia dicuntur. Propositiones itaque IV. 2. et IV. 3. docent circulo dato inscribere et circumscribere triangulum simile dato. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 54. 59. Quum autem in triangulis in hac propositione occurrentibus latera, quae angulos aequales subtendunt, homologa dicuntur, id ex V. Def. 12 dicere vult, esse $AB:B\Gamma=\Delta\Gamma:\Gamma E$, et $B\Gamma:A\Gamma=\Gamma E:\Delta E$, et $AB:A\Gamma=\Delta\Gamma:\Delta E$, unde et alterne sequitur, $AB:\Delta\Gamma=B\Gamma:\Gamma E=A\Gamma:\Delta E$, vel, quam rationem habeant duo duorum triangulorum aequiangulorum latera, aequalibus angulis op-

Sint aequiangula triangula $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$, aequalem ıbentia angulum $B\Delta\Gamma$ angulo $\Gamma\Delta E$, angulum vero 'ΓB angulo 'ΔEΓ, et praeterea angulum $AB\Gamma$ anılo $\Delta\Gamma E$; dico triangulorum $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$ proporonalia esse latera circa aequales angulos; et homoga, quae aequales angulos subtendunt, latera.

Ponatur enim $B\Gamma$ in directum ipsi ΓE Et quoiam anguli $AB\Gamma$, $A\Gamma B$ duobus rectis minores sunt I. 17.), aequalis autem $A\Gamma B$ ipsi $\Delta E\Gamma$, anguli igiır $AB\Gamma$, $\Delta E\Gamma$ duobus rectis minores sunt; rectae gitur BA, $E\Delta$ productae convenient (I. Post. 5.). Producantur, et conveniant in Z.

posita, eandem habere bina illorum reliqua latera aequalibus ıngulis opposita, et (V. 12.) perimetros utriusque trianguli Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 51. 52.

Obs. 2. Recta, quae in triangulo parallela ducitur uni eius lateri, abscindit (I. 29.) triangulum simile toti (Pfleiderer. l. c. §. 60. Clavius VI. Cor. 4. alii.). Recta haec se habet ad latus trianguli, cui est parallela, uti segmentum alterutrius reliquorum trianguli laterum ipsam inter et verticem anguli oppositi comprehensum est ad hoc latus (Pfleiderer. l. c. §. 61.). Eadem per rectas ex vertice trianguli opposito ductas in eadem ratione secatur, ac basis trianguli, seu latus eius, cui est parallela (Pfleiderer. l. c. §. 62. Clavius in Schol. ad IV. 4. Theor. 2.). Quod idem valet, si recta trianguli lateri parallela secat eius reliqua latera producta (Pfleiderer. l. c. §. 63. sq.). Denique, si trianguli alicuius lateri plures rectae parallelae ducuntur, quae cum reliquis lateribus trianguli conveniunt, erunt hae omnes inter se, ut homologa crura triangulorum a parallelis his abscissorum.

Obs. 3. Praemissa IV. 4. Prop., quae non pendet a VI. 3. facile etiam VI. 3. et quae ei adiecta fuit similis propositio VI. 3.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΖΕ ἦκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ. Ἴση δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ

Obs. 7. ita probari potest. Si recta $\Delta\Lambda$ (Fig. 348.) bifariam dividat angulum $B\Lambda\Gamma$ trianguli non aequicruris $\Lambda B\Gamma$, erit $\Lambda B : \Lambda\Gamma = B\Lambda : \Gamma\Lambda$. Demittantur enim ex B, Γ in $\Lambda\Lambda$ perpendicula $B\Lambda$, ΓO, eruntque triangula $B\Lambda\Lambda$, $\Gamma O\Lambda$ aequiangula, pariterque triangula $B\Lambda\Lambda$, $\Gamma O\Lambda$, unde erit $B\Lambda : \Lambda\Gamma = B\Lambda : \Gamma O = B\Lambda : \Gamma\Lambda$ (VI. 4.). Ita rem demonstrat Thom. Simpson. (Elem. of Geom. IV. 18.). Et similiter res de recta, quae angulum externum bifariam secat, demonstratur.

Obs. 4. Si (Fig. 349.) latera $B\Gamma$, $\Lambda\Gamma$ trianguli $\Lambda B\Gamma$ bifariam secantur per rectas $\Lambda\Lambda$, BE ex verticibus angulorum oppositorum Λ, B ductas; recta quoque ΓZ ex tertii anguli Γ vertice ducta per punctum sectionis Θ duarum $\Lambda\Lambda$, BE bifariam secat tertium trianguli latus ΛB. Quippe ob $B\Lambda = \Lambda\Gamma$, $E\Lambda = E\Gamma$, utrumque triangulum $\Lambda B\Lambda$, $B\Lambda E$ dimidium est trianguli $B\Lambda\Gamma$ (I. 38. vel VI. 1.): igitur triang. $\Lambda B\Lambda =$ triang. $B\Lambda E$, demtoque communi triang. $\Lambda B\Theta$, erit triang. $B\Lambda\Theta =$ triang. $\Lambda\Theta E$, pariterque 2 triang. $B\Lambda\Theta = 2$ triang. $\Lambda\Theta E$, h. e. ob $B\Lambda = \Lambda\Gamma$, et $\Lambda E = E\Gamma$, triang. $\Gamma B\Theta =$ triang. $\Gamma\Theta\Lambda$ (I. 38. vel. VI. 1.).

Et quoniam aequalis est angulus $\Delta\Gamma E$ angulo $AB\Gamma$, arallela igitur est BZ ipsi $\Gamma\Delta$ (I. 28.). Rursus, quoiam aequalis est AFB ipsi $\Delta E\Gamma$, parallela est $A\Gamma$ ɔsi ZE; parallelogrammum igitur est $ZA\Gamma\Delta$; aequalis igitur ZA ipsi $\Delta\Gamma$ (I. 34.), $A\Gamma$ vero ipsi $Z\Delta$. Et quoniam uni laterum trianguli ZBE nempe ZE lucta est parallela $A\Gamma$, est ut BA ad AZ ita $B\Gamma$ ıd ΓE. (VI. 2.). Aequalis autem AZ ipsi $\Gamma\Delta$; ut gitur BA ad $\Gamma\Delta$ ita $B\Gamma$ ad ΓE (V. 7.), et alterne (V. 16.) ut AB ad $B\Gamma$ ita $\Delta\Gamma$ ad ΓE. Rursus, quoniam parallela est $\Gamma\Delta$ ipsi BZ, est igitur ut $B\Gamma$ ad ΓE ita $Z\Delta$ ad ΔE (VI. 2.). Aequalis autem $Z\Delta$ ipsi $A\Gamma$; ut igitur $B\Gamma$ ad ΓE ita $A\Gamma$ ad $E\Delta$ (V. 7.), alterne igitur (V. 16.) ut $B\Gamma$ ad ΓA ita ΓE ad $E\Delta$. Et quoniam ostensum est, ut AB quidem ad

Atqui tam triang. $\Gamma B\Theta$: triang. ΓBZ quam triang. $\Gamma\Theta A$: triang. ΓAZ $\Big) = \Gamma\Theta : \Gamma Z$ (VI. 1.). Ergo (V. 11.) triang. $\Gamma B\Theta$: triang. ΓBZ = triang. $\Gamma\Theta A$: triang. ΓAZ, et hinc (V. 14.) triang. ΓBZ = triang. ΓAZ, ac (I. 38. conv.). $BZ = AZ$. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 66.

Obs. 5. Tres rectae, quae ex singulorum trianguli cuiuscunque $AB\Gamma$ angulorum verticibus A, B, Γ (Fig. 350.) ducuntur ad puncta Δ, E, Z laterum oppositorum, ubi haec bifariam dividuntur, in eodem intra triangulum puncto se secant. Duas enim $A\Delta$, BE, quae se in puncto Θ secant, traiiciat, si fieri potest, tertia ΓZ in punctis K, H. Per puncta Γ, Θ agatur recta $\Gamma\Theta A$. Cum haec bifariam secet latus AB in puncto A, ubi ei occurrit (Obs. 4.), atque hoc non coincidere possit cum puncto Z (I. Post. 6.): foret AB bifariam secta in duobus punctis Z, A, quod fieri nequit (I. 9. I. 7. Ax.). Cf. Pfleiderer. l. c. §. 67.

Obs. 6. Eaedem tres rectae (Fig. 349.) ita se in puncto communi Θ secant, ut segmentum cuiuslibet adiacens lateri trianguli, eiusdemque segmentum adiacens vertici anguli op-

ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ δεῖσον ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ. Τῶν ἄρα ἰσογωνίων καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

positi, ac tota recta sint uti 1:2:3; triangulum vero in sex triangula aequalia dividunt; ad punctum autem sectionis communis usque tantum ductae triangulum dividunt in tria aequalia. Nempe 1) ob $BΔ:ΔΓ=AE:EΓ=BZ:AZ$ (supp. et V. 5. Def.), sunt AE et AB, $ΔZ$ et $AΓ$ parallelae (VI. 2.). Quare (I. 15. et I. 29.) triangula $ΔΘE$ et $ΛΘB$, $ΔΘZ$ et $ΛΘΓ$ sunt aequiangula, adeoque $ΔΘ:ΘΛ=$ $\left(\begin{matrix}ΘE:ΘB=ΔE:AB\\ ΘZ:ΘΓ=ΔZ:AΓ\end{matrix}\right.$ (VI. 4.) $\left.\begin{matrix}=ΔΓ:BΓ\\ =BΔ:BΓ\end{matrix}\right)$ (VI. 4. 2. Obs.) $=$ $1:2$ et $ΔΘ:ΘΛ:ΔΛ=ΘE:ΘB:BE=ΘZ:ΘΓ:ZΓ=1:2:3$ (V. 18.). 2) $\triangle ΘBΔ=\triangle ΔΘE$ (Obs. 4. Dem.) $=ΘΔΓ=ΘBΓ$ (I. 38.) et triang. $\left(\begin{matrix}ΘZB:ΘΓB\\ ΘZΛ:ΘΓΛ\end{matrix}\right)=ΘZ:ΘΓ$ (VI. 1.) $=1:2$ (nr. 1.)

- itaque $\begin{matrix}2ΘZB=ΘΓB=2ΘΔB\\ 2ΘZΛ=ΘΓΛ=2ΘΔE\end{matrix}$ et pariter $\begin{matrix}ΘZB=ΘΔB\\ ΘZΛ=ΘΔE\end{matrix}$

3) $\triangle ΘBΓ=ΘΔΓ$ (Obs. 4. Dem.) et $\triangle ΘΛB=\left(\begin{matrix}2ΘZB\\ 2ΘZΛ\end{matrix}\right)$ (I. 38) $=\left(\begin{matrix}ΘΓB\\ ΘΓΛ\end{matrix}\right)$ (nr. 2.). Cf. Pfleiderer. l. c. §. 68.

$B\Gamma$ ita $\Delta\Gamma$ ad ΓE; ut vero $B\Gamma$ ad ΓA ita ΓE ad $E\Delta$; et ex aequo igitur (V. 22.) ut BA ad $A\Gamma$ ita $\Gamma\Delta$ ad ΔE. Aequiangulorum igitur etc.

PROPOSITIO V. (Fig. 351.)

Si duo triangula latera proportionalia habeant, aequiangula erunt triangula; et aequales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ latera proportionalia habentia, sitque ut AB quidem ad $B\Gamma$ ita ΔE ad EZ, ut $B\Gamma$ vero ad ΓA ita EZ ad $Z\Delta$; et adhuc ut BA ad $A\Gamma$ ita $E\Delta$ ad ΔZ; dico aequiangulum esse triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ, et aequales habere angulos, quos homologa latera subten-

Obs. 7. Cum in triangulis aequilateris rectae bifariam dividentes angulos bifariam quoque secent latera opposita, et vicissim (I. 4. I. 8.); liquet identitas conclusionum (Obs. 4. ad VI. 3. et VI. 4. Obs. 6.) ad ipsa applicatarum. Eademque per rectas $A\Delta$, BE, ΓZ in sex, per rectas $A\Theta$, $B\Theta$, $\Gamma\Theta$ in tria triangula similia et aequalia dividuntur. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 69.

Obs. 8. Vicissim, si recta $A\Delta$ ab vertice aliquo trianguli ad punctum bisectionis lateris oppositi Δ ducta ita secatur in Θ, ut segmentum ipsius $A\Theta$ adiacens vertici trianguli duplum sit alterius segmenti $\Delta\Theta$ adiacentis lateri opposito trianguli; ceterae etiam rectae per punctum Θ huius sectionis ex verticibus trianguli ductae bifariam latera iis opposita secant. Ductis nempe rectis $B\Theta E$, ΔE, erunt triangula $\begin{matrix} B\Delta\Theta = 2B\Delta\Theta \\ E\Delta\Theta = 2E\Delta\Theta \end{matrix}$ (VI. 1.) igitur $\triangle B\Delta E = 2B\Delta E$. Sed ob $B\Gamma = 2B\Delta$ (supp.) etiam $\triangle B\Gamma E = 2\triangle B\Delta E$ (VI. 1.). Quare $\triangle B\Delta E = \triangle B\Gamma E$,

καὶ ἴσας ἔχουσι τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Ε, Ζ, τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ ἐστὶν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ τριγώνῳ· τῶν ἄρα ΑΒΓ, ΕΗΖ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔΕ, ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΗΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ

et hinc (I. 38. conv.) $\Delta E = \Gamma E$. Similiterque ostenditur, vel nunc ex Obs. 4. infertur, ducta $\Gamma\Theta Z$ recta fieri etiam $\Delta Z = BZ$. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 70.

Obs. 9. Pariter, si tres rectae $\Theta\Delta$, ΘB, $\Theta\Gamma$ ab puncto Θ intra triangulum ad vertices angulorum eius ductae triangulum in tria aequalia dividunt; rectae hae ad latera usque trianguli opposita continuatae bifariam ea dividunt. Est enim (VI. 1.) $\triangle\Delta\Theta B : \triangle\Theta\Delta B = \Delta\Theta : \Theta\Delta = \Delta\Theta\Gamma : \Delta\Theta\Gamma$. Quare, ob $\triangle\Delta\Theta B = \triangle\Delta\Theta\Gamma$ (supp.), etiam $\triangle\Theta\Delta B = \Delta\Theta\Gamma$ (V. 14.) et hinc (I. 38. conv.) $B\Delta = \Gamma\Delta$. Et similiter in reliquis. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 71.

PROP. V. VI.

Obs. 1. Propositiones hae conversae sunt praecedentis quartae, atque uti haec propositioni I. 26. ita illae propositio-

dunt, angulum quidem $AB\Gamma$ angulo ΔEZ, angulum vero $B\Gamma A$ angulo $EZ\Delta$; et insuper angulum $BA\Gamma$ angulo $E\Delta Z$.

Constituatur enim (I. 23.) ad rectam EZ, et ad puncta in ea E, Z, angulo quidem $AB\Gamma$ aequalis ZEH, angulo vero $B\Gamma A$ aequalis angulus EZH; reliquus (I. 32.) igitur $BA\Gamma$ reliquo EHZ est aequalis.

Aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo EHZ; triangulorum igitur $AB\Gamma$, EHZ proportionalia sunt latera (VI. 4.), circum aequales angulos, et homologa latera aequales angulos subtendunt; est igitur ut AB ad $B\Gamma$ ita HE ad EZ. Sed ut AB ad $B\Gamma$ ita ponitur ΔE ad EZ; ut igitur ΔE ad EZ ita HE ad EZ (V. 11.); utraque igitur ipsarum ΔE, HE ad EZ eandem habet rationem; aequalis igitur est ΔE ipsi HE (V. 9.). Ex eadem ratione et ΔZ ipsi HZ aequalis est. Et quoniam aequalis est ΔE

nibus I. 8. I. 4. respondent, ad quas earum demonstrationes reducuntur, et sub quarum conditionibus triangula similia et aequalia sunt. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 72.

Obs. 2. Sub quintae conditionibus similia esse triangula propositio haec aeque immediate ac quarta efficit: positis autem sextae conditionibus, mediante quarta demum proportionalitas reliquorum circa angulos aequales laterum, ad triangulorum similitudinem per VI. 1. Def. requisita, colligitur. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 73.

Obs. 3. Ope sextae demonstrantur conversae nonnullarum propositionum, quae Obs. 2. ad VI. 4. comprehenduntur, nempe quod, sumtis (Fig. 338. 339.) in eadem recta tribus punctis A, B, Δ, et per duo eorum B, Δ ductis duabus parallelis $B\Gamma$, ΔE ad easdem (vel oppositas) rectae illius partes,

τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστὶν ἴση. Καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ τῇ ὑπὸ ΖΕΗ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον

prouti puncta B, Δ in ea iacent ad easdem (vel oppositas) partes puncti A, sic, ut sit $B\Gamma : \Delta E = AB : A\Delta$, puncta A, Γ, E pariter iaceant in directum. Iunctis enim $A\Gamma$, ΔE rectis, ob angulum $AB\Gamma = \Delta AE$ (I. 29.) et $B\Gamma : \Delta E = AB : A\Delta$ (supp.) est angulus $BA\Gamma = \Delta AE$ (VI. 6.), ideoque priori casu rectarum $A\Gamma$, AE una in alteram incidit (Conv. I. 8. Ax.); posteriori eaedem rectae in directum sibi invicem sunt (Conv. I. 15.). Clavius posterius eodem modo, prius indirecte demonstrat. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 76.

Obs. 4. Sint (Fig. 353.) AB, $\Gamma\Delta$ parallelae, et O, Π rectae quaecunque inaequales. Utrimque a punctis E, Z in parallelis ubicunque sumtis, abscindantur in priore $ZH = Z\eta = O$, in posteriore $E\Theta = E\vartheta = \Pi$, ita ut puncta H, Θ sint ex una rectae EZ parte, η, ϑ ex altera: tres rectae EZ, ΘH, $\vartheta\eta$ in

ipsi EH, communis autem EZ; duae ΔE, EZ duabus HE, EZ aequales sunt, et basis $Z\Delta$ basi ZH est aequalis; angulus igitur ΔEZ angulo HEZ est aequalis (I. 8.). Et triangulum ΔEZ triangulo HEZ aequale, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, quos aequalia latera subtendunt; aequalis igitur est et angulus quidem ΔZE ipsi HZE, angulus vero $E\Delta Z$ ipsi EHZ. Et quoniam angulus quidem $ZE\Delta$ ipsi ZEH est aequalis, sed HEZ ipsi $AB\Gamma$ est aequalis, et $AB\Gamma$ igitur angulus ipsi ΔEZ est aequalis (I. Ax. 1.). Ex eadem ratione angulus $AB\Gamma$ ipsi ΔZE est aequalis, et insuper angulus ad A ipsi ad Δ; aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ. Si igitur duo etc.

PROPOSITIO VI. (Fig. 352.)

Si duo triangula unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa aequales autem angulos latera pro-

eodem extra parallelas puncto K concurrent: et, si duo segmenta ZN, EM ad easdem rectae EZ partes ab parallelis AB, $\Gamma\Delta$ abscissae sunt, ita ut sit $ZN : EM = O : \Pi$, recta quoque NM, altera eorum extrema N, M iungens per punctum K transibit. Quippe rectis EZ, ΘH se in puncto K secantibus (parallelae enim esse nequeunt, quodsi enim parallelae essent, foret $ZH = E\Theta$ (I. 34.) i. e. $O = \Pi$ contra supposit.) est (Obs. 2. ad VI. 4.) $ZH : E\Theta = KZ : KE$. Sed ob $Z\eta = ZH$, $E\vartheta = E\Theta$ est (V. 7. Cor.) $Z\eta : E\vartheta = ZH : E\Theta$, ac (hyp. et V. 7. V. 11.) est $ZN : EM = O : \Pi = ZH : E\Theta$, ideoque (V. 11.) tam $Z\eta : E\vartheta = KZ : KE$, quam $ZN : EM = KZ : KE$, et hinc (Obs. 5.) tam puncta η, ϑ, K, quam puncta N, M, K iacent in directum. Iisdem porro, quae supra, sumtis et factis (nisi quod rectae O, Π nunc etiam possunt esse aequales): tres rectae EZ, $\Pi\vartheta$,

ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἕξει τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ ΔΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ, ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΗ.

Λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι

ηθ se in eodem intra parallelas puncto κ secabunt, et, si segmenta Ζν, Εμ ad alternas rectae ΕΖ partes ab parallelis ΑΒ, ΓΔ abscissa sunt, ut Ο ad Π, recta etiam νμ altera eorum extrema iungens per punctum κ transibit, quod eodem modo demonstratur. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 77. 78.

Obs. 5. Quae in Obs. 4. vidimus, inservinnt solvendo problemati, quod in Loc. 1. et 2. Libri I. Apollonii de Sectione rationis habetur. Praeterea indo patet, in quadrilateris, quorum duo latera sunt parallela, rectam, quae haec latera bifariam dividit, et diagonales figurae in eodem intra quadrilaterum puncto se secare; et si altera duo latera parallela non

portionalia; aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ, unum angulum $BA\Gamma$ uni angulo $E\Delta Z$ aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia, ut BA ad $A\Gamma$ ita $E\Delta$ ad ΔZ; dico aequiangulum esse triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ, et aequalem habiturum esse angulum $AB\Gamma$ quidem angulo ΔEZ, angulum vero $A\Gamma B$ ipsi ΔZE.

Constituatur enim (I. 23.) ad rectam ΔZ, et ad puncta in ipsa Δ, Z, alterutri angulorum $BA\Gamma$, $E\Delta Z$ aequalis angulus $Z\Delta H$, angulo vero $A\Gamma B$ aequalis ipse ΔZH.

Reliquus igitur angulus ad B reliquo ad H aequalis est (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔHZ; proportionaliter igitur est (VI. 4.) ut BA ad $A\Gamma$ ita $H\Delta$ ad ΔZ. Ponitur autem et ut BA ad $A\Gamma$ ita $E\Delta$ ad ΔZ; ut igitur (V. 11.) $E\Delta$ ad ΔZ ita $H\Delta$ ad ΔZ; aequalis igitur (V. 9.) $E\Delta$ ipsi ΔH, et communis ΔZ; duae igitur $E\Delta$, ΔZ duabus $H\Delta$, ΔZ aequales sunt, et angulus $E\Delta Z$ angulo $H\Delta Z$

sint, haec, atque rectam bifariam latera parallela dividentem in eodem extra figuram puncto concurrere; in parallelogrammis igitur diagonales, et rectas bina latera opposita bifariam dividentes eodem in puncto se secare: quod ita fieri alio modo ostenditur in demonstratione XI. 39. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 79—82.

Obs. 6. Perpendicula e tribus angulis trianguli alicuius in latera opposita demissa in eodem puncto se intersecant. Sit (Fig. 354.) $AB\Gamma$ triangulum, in quo duo perpendicula ex oppositis angulis in latera $A\Gamma$, AB demissa se intersecent in puncto Z, iungatur AZ, et producatur, si opus est, usquedum

εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ [1]) ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

1) Verba ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, quae Peyrardus consentiente Cod. a. omittit, ex edd. Oxon. et Basil. restituimus, quum alias etiam Euclidi solemne sit, verba propositionum antecedentium exacte citare, et in I. 4. haec verba expressa sint.

rectae ΒΓ occurrat in Θ, erit ΑΘ perpendicularis ad ΒΓ. Iungatur enim ΑΕ, et circa triangulum ΑΕΖ describatur circulus (IV. 5.), eritque, ob angulum rectum ΑΕΖ, ΑΖ diameter circuli (Obs. 1. ad III. 31.). Eodem modo ostendetur, ΑΖ esse diametrum circuli circa triangulum ΑΖΔ circumscripti: itaque puncta Α, Ε, Ζ, Δ in circumferentia eiusdem circuli positi erunt. At ob angulum ΕΖΒ=ΔΖΓ (I. 15.) et angulum ΒΕΖ =ΓΔΖ (uterque enim rectus est), triangula ΒΕΖ, ΓΔΖ sunt aequiangula, adeoque ΒΖ:ΕΖ=ΓΖ:ΔΖ (VI. 4.), aut alterna

aequalis; basis igitur (I. 4.) EZ basi ZH est aequalis, et triangulum ΔEZ triangulo ΔHZ aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quos aequalia latera subtendunt; aequalis igitur est ΔZH quidem ipsi ΔZE, angulus vero ΔHZ ipsi ΔEZ. Sed ipse ΔZH ipsi $A\Gamma B$ est aequalis (constr.), et $A\Gamma B$ igitur ipsi ΔZE est aequalis. Ponitur autem et $BA\Gamma$ ipsi $E\Delta Z$ aequalis; et reliquus igitur ad B reliquo ad E aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ. Si igitur duo triangula etc.

PROPOSITIO VII. (Fig. 355.)

Si duo triangula unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul vel minorem, vel non minorem recto; aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos, circa quos proportionalia sun latera.

$BZ : \Gamma Z = EZ : \Delta Z$ (V. 16.). Quoniam igitur latera circa angulos aequales $BZ\Gamma$, $BZ\Delta$ sunt proportionalia, triangula $BZ\Gamma$, ΔZE sunt aequiangula (VI. 6.), adeoque angulus $Z\Gamma B = E\Delta Z$. At $B\Delta Z = BAZ$ (III. 21.): itaque $BAZ = Z\Gamma B = Z\Gamma\Theta$. Praeterea autem et $BZA = \Theta Z\Gamma$ (I. 15.): itaque etiam $AEZ = Z\Theta\Gamma$ (I. 32.), adeoque, quum AEZ rectus sit, rectus erit etiam $Z\Theta\Gamma$, vel $A\Theta$ perpendicularis erit ad $B\Gamma$ (Playfair. VI. Prop. H.). — Paullo brevius ita demonstratur, esse angulum $Z\Gamma B = E\Delta Z$. Quum $BE\Gamma$ sit rectus aeque ac $BA\Gamma$, ex Cor. 2. ad III. 21. semicirculus super diametro $B\Gamma$ descriptus per E et Δ transibit, unde erit $Z\Gamma B = E\Delta Z$ (III. 21.). Vid. Klügels Wörterb. I. Th. p. 925. et, qui ibi p. 926. laudatur, Eulerus in Nov. Commentar. Petrop. Tom. XI. a. 1765. — Addi po-

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν μίᾳ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ὑπόκειται ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν

terat: et vice versa, si $A\Theta$ perpendicularis est ad $B\Gamma$, transire debet per Z. Si enim non transeat, alia recta per A et Z ducta ex demonstratione pariter erit ad $B\Gamma$ perpendicularis, quod fieri nequit (I. 17. Cor. 4.).

PROPOSITIO VII.

Obs. 1. Rob. Simson. duobus hac propositione enumeratis casibus tertium addit „omissum, et in demonstrationibus non raro occurrentem" quo reliquorum angulorum alter sit rectus. Demonstratio autem huius casus eadem fere est, quae

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ, unum angulum uni angulo aequalem habentia, angulum nempe $B\Delta\Gamma$ angulo $E\Delta Z$, circa alios autem angulos $AB\Gamma$, ΔEZ, latera proportionalia, ut AB ad $B\Gamma$ ita ΔE ad EZ, reliquorum vero ad Γ, Z primo utrumque simul minorem recto; dico aequiangulum esse triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ, et aequalem fore angulum $AB\Gamma$ angulo ΔEZ, et reliquum nempe angulum ad Γ reliquo ad Z aequalem.

Si enim inaequalis est angulus $AB\Gamma$ angulo ΔEZ, unus ipsorum maior est. Sit maior $AB\Gamma$; et constituatur (I. 23.) ad rectam AB et ad punctum in ea B, angulo ΔEZ aequalis angulus ABH.

Et quoniam aequalis est angulus quidem A angulo Δ, angulus vero ABH ipsi ΔEZ, reliquus igitur AHB reliquo ΔZE est aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum ABH triangulo ΔEZ; est igitur (VI. 4.) ut AB ad BH ita ΔE ad EZ. Ut autem ΔE ad EZ ita ponitur AB ad $B\Gamma$; ut igitur AB ad $B\Gamma$ ita AB ad BH (V. 11.), recta igitur AB ad utrumque ipsarum $B\Gamma$, BH eandem habet rationem; aequalis

casus secundi, nec omnino necesse videtur, tertium hunc casum nominatim afferre, quum expressio „non minor recto" eum etiam casum, quo angulus rectus est, comprehendat.

Obs. 2. Patet, hanc propositionem respondere ei, quam ad I. 26. Obs. 2. ut casum quintum, quo duo triangula aequalia esse possunt, notavimus. Et hoc triangulorum aequalium casu praemisso potest nostra haec propositio eodem modo, quo praecedentes duae demonstrari. Cf. Pfleiderer. l. c. P. II. §. 86.

ΒΗ, ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἐστιν ἴση. Ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστίν. Οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ. Τριγώνου δὴ τοῦ ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἑξῆς.

Obs. 3. Triangula sub conditionibus VI. 7. similia esse, uti ex VI. 6. (vid. ad VI. 6. Obs. 2.) infertur. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 87.

igitur est $B\Gamma$ ipsi BH (V. 9.); quare et angulus ad Γ angulo $BH\Gamma$ est aequalis (I. 5.). Minor autem recto ponitur angulus ad Γ; minor igitur est recto angulus $BH\Gamma$, quare (I. 13.) qui ei deinceps est angulus AHB maior est recto. Et ostensus est aequalis esse angulo ad Z, et ipse angulus ad Z igitur maior est recto. Ponitur autem minor recto, quod est absurdum; non igitur inaequalis est angulus $AB\Gamma$ angulo ΔEZ, aequalis igitur. Est autem et angulus ad A aequalis angulo ad Δ, et reliquus igitur (I. 32.) ad Γ reliquo ad Z aequalis est; aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ.

Sed et rursus ponatur uterque angulorum ad Γ, Z non minor recto; dico rursus et sic aequiangulum esse triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus aequalem esse $B\Gamma$ ipsi BH; quare et angulus ad Γ ipsi $BH\Gamma$ aequalis est. Non minor autem recto est angulus ad Γ; non est igitur minor recto $BH\Gamma$. Trianguli igitur $BH\Gamma$ duo anguli duobus rectis non sunt minores, quod fieri nequit (I. 17.); rursus igitur non inaequalis est angulus $AB\Gamma$ angulo ΔEZ; aequalis igitur. Est autem et angulus ad A angulo ad Δ aequalis, reliquus igitur (I. 32.) ad Γ reliquo ad Z aequalis est; aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ ipsi triangulo ΔEZ. Si igitur duo triangula etc.

Obs. 4. Notari etiam potest, casum primum, quo nempe angulorum ad Γ, Z uterque minor est recto, semper existere, si latera AB, ΔE adiacentia angulis (supp.) aequalibus A, Δ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ δὲ ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ, τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου· καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, κοινὴν τῶν δύο τριγώνων· τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγω-

minora sint alteris ΒΓ, ΕΖ (I. 18. et I. 17. Cor. 3. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 88.

Obs. 5. Necessitas tertiae conditionis propositioni VI. 5. adiunctae simili fere ratione evincitur, ac in Obs. 2. ad I. 26. vidimus, duo triangula, in quibus duo latera cum angulo uni eorum opposito utrimque aequalia sint, non semper aequalia esse, et nova ad hanc aequalitatem determinatione opus esse. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 89. 90.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 356.)

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basin perpendicularis ducatur; quae ad perpendicularem sunt triangula similia et toti et inter se.

Sit triangulum rectangulum $AB\Gamma$, rectum habens angulum $BA\Gamma$, et ducatur ab A ad $B\Gamma$ perpendicularis $A\Delta$; dico simile esse utrumque triangulorum $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ toti $AB\Gamma$ et inter se.

Quoniam enim aequalis est angulus $BA\Gamma$ angulo $A\Delta B$, rectus enim uterque, et communis duobus triangulis $AB\Gamma$ et $AB\Delta$ angulus ad B; reliquus igitur $A\Gamma B$ reliquo $BA\Delta$ est aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $AB\Delta$. Est igitur (VI. 4.) ut $B\Gamma$ subtendens angulum rectum trianguli $AB\Gamma$ ad BA subtendentem angulum rectum trianguli $AB\Delta$, ita eadem AB subtendens angulum ad Γ trianguli $AB\Gamma$ ad $B\Delta$ subtendentem angulum aequalem angulo ad Γ, nempe $BA\Delta$ ipsius trianguli $AB\Delta$; et etiam $A\Gamma$ ad $A\Delta$ subtendentem angulum ad B, communem duobus triangulis; triangulum igitur $AB\Gamma$ triangulo $AB\Delta$ aequiangulum est, et latera circa aequales angulos proportionalia habet; simile igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $AB\Delta$. Similiter osten-

PROPOSITIO VIII.

Obs. 1. Robert. Simson. monet: „manifestum est, alii quem mutasse demonstrationem, quam Euclides huius propositionis dederat. Etenim auctor eius postquam demonstravisset triangula esse inter se aequiangula, particulatim ostendit, latera eorum circa aequales angulos proportionalia esse, quasi hoc non factum fuisset in propositione quarta huius libri. Haec autem superflua non inveniuntur in versione (Campani)

νον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅμοιόν ἐστι ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστιν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ, πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ Β· καὶ ἔτι ἡ ΒΔ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος

ex lingua arabica et nunc (a Simsone) omissa sunt." Ostensa nempe angulorum aequalitate, infert Rob. Simson.: „aequiangula igitur sunt triangula, quare latera circa aequales angulos proportionalia habent (VI. 4.); et propterea inter se similia sunt" (VI. 1. Def.). Et eadem fere est demonstratio Campani.

demus et triangulo $A\Delta\Gamma$ simile esse triangulum $AB\Gamma$; utrumque igitur triangulorum $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ simile est toti triangulo $AB\Gamma$.

Dico etiam et inter se esse similia triangula $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$.

Quoniam enim rectus $B\Delta A$ recto $A\Delta\Gamma$ est aequalis, sed et $BA\Delta$ angulo ad Γ ostensus est aequalis, et reliquus igitur (I. 32.) ad B reliquo $\Delta A\Gamma$ est aequalis; aequiangulum igitur est triangulum $AB\Delta$ triangulo $A\Delta\Gamma$. Est igitur (VI. 4.) ut $B\Delta$ trianguli $AB\Delta$, subtendens angulum $BA\Delta$, ad ΔA trianguli $A\Delta\Gamma$ subtendentem angulum ad Γ, aequalem ipsi $BA\Delta$, ita eadem $A\Delta$ ipsius trianguli $AB\Delta$, subtendens angulum ad B, ad $\Delta\Gamma$ subtendentem angulum $\Delta A\Gamma$ trianguli $A\Delta\Gamma$, aequalem angulo ad B, et etiam $B\Delta$ subtendens rectum $A\Delta B$, ad $A\Gamma$ subtendentem rectum $A\Delta\Gamma$; simile igitur est triangulum $AB\Delta$ triangulo $A\Delta\Gamma$. Si igitur in rectangulo, etc.

COROLLARIUM.

Ex hoc evidens est, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basin perpendicularis ducta fuerit,

Obs. 2. Austin. p. 68. corollarium etiam propositioni adiunctum reprobat. Pfleiderer. l. c. §. 93. circa hanc rem observat: „priore huius corollarii parte, ipsis eius verbis pro more relatis, demonstrationes nituntur VI. 13. partis tertiae Lemm. 1. ante X. 34. ac Lemm. post XIII. 13. Contra eiusdem pars altera in demonstrationibus partis primae Lemm. 1. ante X. 34.; partis tertiae XIII. 13.; Lemm. post eam; partis

ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέσον ἀνάλογόν ἐστιν· καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑτέρου ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΓ, γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ.

ultimae XIII. 18. ac III. 6. Collect. mathem. Pappi, a Propositionibus VI. 8. et VI. 4. deducta traditur: serius itaque, usus illius frequentis caussa, tum locis citatis, tum alibi, ut in demonstrationibus XIII. 14, XIII. 15. XIII. 16. addita (forsan restituta) est censenda." Addit deinde Pfleiderer., praeter duas proportiones corollario hoc enunciatas notari mereri adhuc sequentes: 1) latus, quod trianguli rectanguli angulum rectum subtendit, est ad alterutrum eius latus circa angulum rectum, uti reliquum ipsius latus circa angulum rectum est ad perpendiculum ex vertice anguli recti in hypotenusam demissum, et alterne (IV. 4.). 2) Unum trianguli rectanguli latus circa angulum rectum est ad alterum; uti, quod priori adiacet, segmentum hypotenusae, perpendiculo in eam ex vertice anguli recti demisso abscissum, est ad ipsum hoc perpendiculum; vel uti hoc perpendiculum est ad segmentum hypotenusae adiacens lateri posteriori (IV. 4.).

ductam inter basis segmenta mediam proportionalem esse; et etiam inter basin et utrumlibet segmentorum, huic segmento adiacens latus, medium proportionale esse.

PROPOSITIO IX. (Fig. 357.)

Ab data recta imperatam partem auferre.

Sit data recta AB; oportet ab ipsa AB imperatam partem auferre.

Imperetur pars tertia; et ducatur quaedam recta $A\Gamma$ ab A, quemlibet angulum continens cum ipsa AB; et sumatur quodlibet punctum Δ in $A\Gamma$, et ponantur ipsi $A\Delta$ aequales ΔE, $E\Gamma$ (I. 3.); et iungatur $B\Gamma$, et per Δ parallela huic ducatur ΔZ (I. 31.).

Obs. 3. Cum anguli in semicirculo sint recti (III. 31.), perpendicularis ab quocunque peripheriae circuli puncto ad aliquam eius diametrum ducta est media proportionalis inter segmenta diametri huius ab perpendiculo illo facta: et quaelibet circuli chorda per centrum non transiens media proportionalis est inter diametri per alterutrum eius extremum ductae segmentum ipsi adiacens, quod perpendiculum ab altero chordae extremo in diametrum hanc demissum ab ea abscindit, ipsamque diametrum (VI. 8. Cor.). Cf. Pfleiderer. l. c. §. 94.

PROPOSITIO IX.

Obs. 1. Rob. Simson. monet „demonstratio huius facta est in casu particulari, in quo scilicet pars tertia abscindenda est a data recta" (contra tenorem, ut Pfleiderer. addit, tam propositionis, quam expositionis, et absque ulla mentione applicationis solutionis exhibitae particularis ad caeteros casus),

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ ΑΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη ἡ ΑΓ (δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἄτμητον τῇ ΑΓ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν. Ἔστω τετμημένη ἡ ΑΓ [1]), κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, καὶ διὰ τῶν Δ, Ε τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΚ.

1) Quae uncis inclusa sunt, desunt in ed. Parisiensi et Codd. a. c. d. Quum tamen in expositione apud Euclidem, ea quae in problemate fieri iubentur, expresse repeti soleant, genuina illa omnino esse videntur, et librarii tantum incuria in Mss. omissa. Itaque illa restituimus ex edd. Oxon. et Basil.

„quare minime videtur Euclidis esse. Praeterea in quatuor magnitudinibus proportionalibus concludit auctor, tertiam aequemultiplicem esse quartae, atque prima est secundae; quod quidem in libro V. ut eum nunc habemus, nullibi ostensum est. (Vid. Prop. D. in Exc. ad L. V.). Sed hoc, ut alia, assumit editor ex confusanea apud vulgus recepta proportionalium notione.“ Generalem deinde Simson. addit demonstrationem, dum nempe iubet rectam ΑΓ tam multiplicem

Itaque quoniam uni lateri $B\Gamma$ trianguli $AB\Gamma$ parallela ducta est recta $Z\Delta$; erit (VI. 2.) ut $\Gamma\Delta$ ad ΔA ita BZ ad ZA. Dupla autem $\Gamma\Delta$ ipsius ΔA; dupla igitur et BZ ipsius ZA; tripla igitur BA ipsius AZ.

Ab ipsa igitur data recta AB imperata tertia pars ablata est AZ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X. (Fig. 358.)

Datam rectam insectam similiter secare, ut data recta secta est.

Sit data quidem recta insecta AB, secta vero $A\Gamma$: oportet insectam rectam AB similiter secare, ut $A\Gamma$ secta est. Sit $A\Gamma$ secta in punctis Δ, E, et ponantur ita ut angulum quemlibet contineant, et iungatur ΓB, et (I. 31.) per Δ, E ipsi $B\Gamma$ parallelae ducantur ΔZ, EH, per Δ autem ipsi AB parallela ducatur $\Delta\Theta K$.

sumi rectae $A\Delta$ pro lubitu sumtae, quam multiplex esse debet AB partis abscindendae, et reliquis peractis, ut in textu graeco, concludit, esse (VI. 2.) $\Gamma\Delta : \Delta A = BZ : AZ$, et (V. 16.) componendo $A\Gamma : A\Delta = AB : AZ$, unde (V. Prop. D.) AB tam multiplex erit rectae AZ, quam multiplex sumta fuit $A\Gamma$ rectae $A\Delta$ adeoque AZ eadem pars erit rectae AB, quae pars est $A\Delta$ rectae $A\Gamma$ i. e. AZ erit pars a recta AB abscindenda. Eadem demonstratio, notante Pfleiderer. l. c. §. 98. ita etiam absque subsidio Prop. D. absolvi potest, ut a Baermanno in scholio adiuncto factum est. Ob parallelas $B\Gamma$, $Z\Delta$ est $A\Gamma : A\Delta = AB : AZ$ (VII. 2. Obs. 2.) vel alterne (V. 16.) $A\Gamma : AB = A\Delta : AZ = n . A\Delta : n . AZ$ (V. 11. V. 15.) denotante n numerum integrum, iuxta quem data AB multiplex esse debet partis abscindendae. Quare cum sit $A\Gamma = n \times A\Delta$ (constr.); pariter est $AB = n \times AZ$ (V. 14.).

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΘΒ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΘ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΚΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘΕ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ τῇ ΗΖ· ἐστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΗ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Obs. 2. Eadem ratione ab data recta AB abscindetur segmentum, quod ad totam habeat rationem datam rectae minoris M ad maiorem $M+N$; vel quod ad segmentum residuum habeat rationem datae rectae M ad datam N; seu data recta AB secabitur in data ratione, rectae nimirum datae M ad datam N, abscissa nempe $A\Delta = M$, $\Delta\Gamma = N$, reliquisque ut in VI. 9. peractis (Vid. Pappi ad Libros de Sect. rationis Lemm. I. Collect. Mathem. Halley p. XVIII. XLV. Clavius, Tacquet, alii) Pfleiderer. l. c. §. 99. Similique ratione datae rectae AB alia ab puncto inde A in directum adiicietur, quae ad ipsam habeat datam rationem, datae nimirum rectae M ad datam N;

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $Z\Theta$, ΘB; aequalis igitur (I. 34.) $\Delta\Theta$ ipsi ZH, ΘK vero ipsi HB. Et quoniam uni lateri trianguli $\Delta K\Gamma$ ipsi nempe $K\Gamma$ parallela ducta est recta ΘE; est (VI. 2.) ut ΓE ad $E\Delta$ ita $K\Theta$ ad $\Theta\Delta$. Aequalis autem est $K\Theta$ quidem ipsi BH, $\Theta\Delta$ vero ipsi HZ; est igitur ut ΓE ad $E\Delta$ ita BH ad HZ. Rursus, quoniam uni laterum trianguli AHE ipsi nempe EH parallela ducta est $Z\Delta$; est (VI. 2.) ut $E\Delta$ ad ΔA ita HZ ad ZA. Demonstratum autem est et ut ΓE ad $E\Delta$ ita BH ad HZ; est igitur ut ΓE quidem ad $E\Delta$ ita BH ad HZ, ut vero $E\Delta$ ad ΔA ita HZ ad ZA.

Data igitur recta insecta AB datae rectae sectae $A\Gamma$ similiter secta est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XI. (Fig. 359.)

Duabus datis rectis, tertiam proportionalem invenire.

vel etiam ita, ut composita ex data AB, eique ab extremo inde A versus oppositas partes adiecta habeat ad datam (vel ad adiectam) rationem datae maioris M ad datam minorem N (Pfleiderer l. c. §§. 100. 101.). Caeterum apud Campanum propositio nostra 9. est VI. 11.

PROPOSITIO X.

Obs. 1. Demonstratio huius propositionis (quae apud Campanum est VI. 12.) expeditior redditur, praemissa propositione in Obs. 5. ad VI. 2. contenta. Cf. Pfleiderer l. c. §. 102.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ [1]) ΑΒ, ΑΓ καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζευχθ ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ, τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρεται ἡ ΓΕ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΕ, ΔΖ, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ, παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.

1) Verba: δύο εὐθεῖαι, quae Peyrardus, codicem a secutus, omittit, ex edd. Basil. et Oxon. restituimus ex more Euclidi in enunciatione solenni.

Obs. 2. Si aequalia fuerint unius trianguli lateris ΑΓ segmenta, alterius etiam lateris ΑΒ segmenta, rectis tertio lateri ΒΓ parallelis facta erunt aequalia (V. Prop. A.). Recta itaque data ΑΒ in partes quotcunque aequales secabitur simili

Sint datae duae rectae AB, $A\Gamma$, et ponantur ita t angulum quemlibet contineant; oportet ipsis AB, $A\Gamma$ tertiam proportionalem invenire.

Producantur AB, $A\Gamma$ ad puncta Δ, E, et ponatur ipsi $A\Gamma$ aequalis $B\Delta$, et iungatur $B\Gamma$, et per Δ parallela huic ducatur ΔE (I. 31.).

Quoniam igitur uni laterum trianguli $A\Delta E$, nempe ipsi ΔE parallela ducta est $B\Gamma$, est (VI. 2.) ut AB ad $B\Delta$ ita $A\Gamma$ ad ΓE. Aequalis autem $B\Delta$ ipsi $A\Gamma$, est igitur ut AB ad $A\Gamma$ ita $A\Gamma$ ad ΓE.

Duabus igitur datis rectis AB, $A\Gamma$, tertia proportionalis inventa est ΓE. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII. (Fig. 360.)

Tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire.

Sint datae tres rectae A, B, Γ; oportet ipsis A, B, Γ quartam proportionalem invenire.

Exponantur duae rectae ΔE, ΔZ, angulum continentes quemlibet $E\Delta Z$; et ponatur ipsi quidem A aequalis ΔH, ipsi vero B aequalis HE, et insuper ipsi Γ aequalis $\Delta\Theta$; et iuncta $H\Theta$, parallela illi ducatur per E ipsa EZ (I. 31.).

modo, quo propositum VI. 9. fiebat (Pfleiderer l. c. §§. 103. 104. Clavius, Tacquet., alii). Cf. I. 34. Cor. 23.

Obs. 3. Hac propositione nituntur solutiones variorum problematum, figuras rectilineas datas vario modo in partes quotcunque aequales, seu etiam ita secandi, ut partes datas invicem habeant rationes. Talia problemata habentur in Eu-

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ τετάρτη ἀνάλογον προσεύρεται ἡ ΘΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

clidis, ut quidam arbitrantur, vel, ut alii volunt, in Machometi Bagdedini de Divisionibus libro; apud Wilke neue und erleichterte Methode den Inhalt geradlinichter Flächen zu finden; in I. T. Mayers practisch. Geom. T. III.; apud Pfleiderer. l. c. §§. 108—118.

PROPOSITIO XI.

Obs. Tertiae proportionali duabus rectis datis inveniendae inservit quoque VI. 8. Cor. Sumta nempe (Fig. 356.) recta *BΔ* aequali primae rectarum datarum, et ducta ad eam per *Δ* perpendiculari *ΔA* aequali secundae, iungatur *BA*. Ducta deinde in *A* ad *BA* perpendiculari *AΓ*, quae productae *BΔ* occurret in *Γ*, erit *BΔ*:*ΔA*=*ΔA*:*ΔΓ* (VI. 8. Cor.). (Clavius ad hanc Prop. Pfleiderer. l. c. §. 125.). Aliter idem fiet per

Et quoniam uni laterum trianguli ΔEZ, nempe ipsi EZ parallela ducta est $H\Theta$, est igitur ut ΔH ad HE ita $\Delta\Theta$ ad ΘZ (VI. 2.). Aequalis autem ΔH quidem ipsi A, HE vero ipsi B, $\Delta\Theta$ autem ipsi Γ; est igitur ut A ad B ita Γ ad ΘZ.

Tribus igitur datis rectis A, B, Γ, quarta proportionalis inventa est ΘZ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 361.)

Duabus datis rectis, mediam proportionalem invenire.

Sint datae duae rectae AB, $B\Gamma$; oportet ipsis AB, $B\Gamma$ mediam proportionalem invenire.

Ponantur in directum, et describatur super $A\Gamma$ semicirculus $A\Delta\Gamma$, et ducatur a B puncto ipsi $A\Gamma$ rectae ad rectos $B\Delta$ (I. 11.), et iungantur $A\Delta$, $\Delta\Gamma$.

partem alteram eiusdem VI. 8. Cor. Nempe, si prima recta data maior est, quam secunda, fiat $B\Gamma$ aequalis primae, et, descripto super eam circulo, ex altero eius extremo B aptetur BA aequalis secundae, et ex altero huius extremo A demittatur in $B\Gamma$ perpendicularis $A\Delta$, eritque $B\Gamma : BA = BA : B\Delta$ (VI. 8. Cor.). Sin autem prima recta data minor est, quam secunda: super illa v. c. $B\Delta$ tanquam catheto triangulum constituatur rectangulum $A\Delta B$, cuius hypotenusa AB aequalis sit secundae (ut in II. 14. III. 17.). Tum ad hanc BA in puncto eius extremo ductum perpendiculum $A\Gamma$ productae $B\Delta$ occurret in Γ (I. Post. 5.), eritque $B\Delta : AB = AB : B\Gamma$ (VI. 8. Cor.) Pfleiderer l. c. §. 124. Pappus Collect. Mathem. III. 7. et III. 8. (Nostra Prop. 11. apud Campanum est VI. 10.) Caeterum, si ratio duarum magnitudinum expressa sit per datas rectas,

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ· ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέση ἀνάλογον προσεύρεται ἡ ΒΔ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων [1]) παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ, ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

1) Loco *ἰσογωνίων*, quae vox omnino sufficit, hic et in sequentibus edd. Basil. et Oxon. habent: *μίαν μιᾷ ἴσην ἔχόντων γωνίαν*. Utraque lectio ex I. 29. I. 34. eodem redit. Ceterum etiam infra in demonstratione VI. 16., ubi nostra haec propositio adhibetur, vox *ἰσογωνίων* ponitur.

docet haec propositio modum inveniendi rationem duplicatam rationis datae.

PROPOSITIO XII.

Obs. Facile patet, e tribus rectis datis, quibus quarta proportionalis invenienda est, secundam, quae in figura textus graeci primae *ΔΗ* in directum adiecta est, posse etiam ex *Η*

Et quoniam in semicirculo angulus est $A\Delta\Gamma$, rectus est (III. 31.). Et quoniam in rectangulo triangulo $A\Delta\Gamma$ a recto angulo ad basin perpendicularis ducta est ΔB; ipsa ΔB inter basis segmenta AB, $B\Gamma$ media proportionalis est (VI. 8. Cor.).

Duabus igitur datis rectis AB, $B\Gamma$, media proportionalis inventa est $B\Delta$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 362.)

Parallelogrammorum aequalium et aequiangulorum reciproca sunt latera, quae circa aequales angulos sunt; et quorum aequiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa aequales angulos, illa sunt aequalia.

Sint aequalia et aequiangula parallelogramma AB, $B\Gamma$, aequales habentia angulos ad B, et ponantur in directum ΔB, BE, in directum igitur sunt (I. 14.) et ZB, BH: dico ipsorum AB, $B\Gamma$ reciproca esse latera circa aequales angulos, hoc est, esse ut ΔB ad BE ita HB ad BZ.

versus $H\Delta$, vel etiam (coll. Obs. 2. ad VI. 2.) e vertice Δ ex eadem parte, ad quam est recta ΔH, vel in crure ΔH anguli $H\Delta E$ ad partes oppositas ultra Δ producto sumi, et tum reliqua in cruribus anguli assumti, vel ad verticem ei oppositi simili ratione ac in textu graeco peragi. Praeterea etiam secunda et tertia alterne inter se permutari possunt, ita ut iam non, ut ante prima et secunda in uno anguli assumti crure, tertia et quarta in altero, verum prima et tertia in uno, secunda et quarta in altero sint. Bleiderer l. c. §. 119. 120. Si quis vero disideret, ut prima et quarta in uno, secunda et tertia in altero crure anguli sint, hoc quoque fieri poterit, si

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. Τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ μρὸς τὴν ΒΖ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ οὕτως τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας

ex vertice anguli propositi prima in uno crure, secunda in altero sumatur, et altera harum rectarum puncta extrema recta aliqua iungantur, deinde in eodem crure, in quo sumta est secunda, a vertice abscindatur tertia, atque ab altero eius ex-

Compleatur enim parallelogrammum ZE.

Et quoniam aequale est parallelogrammum AB parallelogrammo $B\Gamma$; est autem aliud quoddam ZE; est igitur (V. 7.) ut AB ad ZE ita $B\Gamma$ ad ZE. Sed (VI. 1.) ut AB quidem ad ZE ita ΔB ad BE, ut vero $B\Gamma$ ad ZE ita HB ad BZ; erit igitur (V. 11.) ΔB ad BE ita HB ad BZ. Parallelogrammorum igitur AB, $B\Gamma$ reciproca sunt latera, quae circa aequales angulos sunt.

Sint autem reciproca latera circa aequales angulos, et sit ut ΔB ad BE ita HB ad BZ; dico aequale esse parallelogrammum AB parallelogrammo $B\Gamma$.

Quoniam enim est ut ΔB ad BE ita HB ad BZ, sed ut ΔB quidem ad BE ita (VI. 1.) parallelogrammum AB ad parallelogrammum ZE, ut HB vero ad BZ ita parallelogrammum $B\Gamma$ ad parallelogrammum ZE; erit igitur (V. 11.) AB ad ZE ita $B\Gamma$ ad ZE; aequale igitur est (V. 9.) parallelogrammum AB parallelogrammo $B\Gamma$. Ergo aequalium etc.

PROPOSITIO XV. (Fig. 363.)

Aequalium et unum angulum uni aequalem habentium triangulorum reciproca sunt latera, quae circa

tremo ducatur ad illud crus, in quo prima sumta fuit, recta, quae sit, ut vocant, antiparallela ei, quae primae et secundae extrema iungit i. e. ita ducatur, ut cum crure uno eundem angulum efficiat, quem illa, cui antiparallela esse debet, cum

γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, ἄλλο δὲ τὸ ΑΒΔ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

altera, et vice versa. Hic quoque situs secundae et tertiae inter se permutari possunt. Cf. Pfleiderer l. c. §. 121. Apud Campanum Prop. nostra VI. 12. non separatim numeratur, sed praecedenti VI. 11. (apud Campanum VI. 10.) tantum subiungitur.

PROPOSITIO XIII.

Obs. Pars posterior Obs. 3. ad VI. 8. etiam adhuc huius problematis solutionem exhibet, facile inveniendam. Pfleiderer l. c. §. 126. Caeterum VI. 13. Prop. est apud Campanum VI. 9. Docet illa aliis verbis „si ratio duarum magni-

aequales angulos sunt; et quorum triangulorum unum angulum uni aequalem habentium reciproca sunt latera circa aequales angulos, illa sunt aequalia.

Sint aequalia triangula $AB\Gamma$, $A\Delta E$, unum angulum uni aequalem habentia, scilicet angulum $B A\Gamma$ angulo ΔAE; dico triangulorum $AB\Gamma$, $A\Delta E$ reciproca esse latera, quae circa aequales angulos sunt, hoc est, esse ut ΓA ad $A\Delta$ ita EA ad AB.

Ponantur enim ita ut in directum sit ΓA ipsi $A\Delta$; in directum igitur est (I. 14.) et EA ipsi AB. Et iungatur $B\Delta$.

Et quoniam aequale est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $A\Delta E$, est autem aliud triangulum $AB\Delta$; est igitur (V. 7.) ut triangulum ΓAB ad triangulum $BA\Delta$ ita triangulum $A\Delta E$ ad triangulum $BA\Delta$. Sed ut ΓAB quidem ad $BA\Delta$ ita (VI. 1.) ΓA ad $A\Delta$, ut $EA\Delta$ vero ad $BA\Delta$ ita EA ad AB: erit igitur (V. 11.) ΓA ad $A\Delta$ ita EA ad AB; triangulorum igitur $AB\Gamma$, $A\Delta E$ reciproca sunt latera, quae circa aequales angulos sunt.

tudinum expressa sit per datas rectas invenire rationem subduplicatam rationis datae.

PROPOSITIO XIV.

Obs. 1. Exemplum huiusmodi parallalogrammorum praebent, quae in I. 43. vocantur parallelogrammorum circa diagonalem complementa. Cf. Pfleiderer l. c. §. 134.

Obs. 2. Demonstratio, qua ex aequalitate angulorum ad B ope I. 14. infertur, si ΔB, BE sint in derectum, fore et ZB, BH in directum, praeter morem praeceps videtur, et rectius deduci posse videtur ex ea converso I. 15. Prop. quam

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν

iam Proclus desideravit, et nos ex eo supra attulimus. Cf. Pfleiderer l. c. §. 136.

PROPOSITIO XV.

Obs. 1. Propositiones 14. et 15. uno enunciato, pariter ac duas propositionis VI. 1. partes comprehendere, atque etiam ope I. 34. unam ex altera inferre licet. Coniunctae autem, quam seiunctae cur facilius intelligerentur, quod Austin. vult haud apparet. Cf. Pfleiderer l. c. §§. 139. 140.

Obs. 2. Propositiones 14. 15. parallelogrammi vel trianguli dati transformationem in aliud dati lateris, circa eundem vel aequalem angulum reducunt ad problemma VI. 12. Iuxta eas scilicet quarta proportionalis lateri dato, et duobus parallelogrammi, triangulive dati circa angulum designatum lateribus

Sint autem reciproca latera triangulorum $AB\Gamma$, $A\Delta E$, et sit ut ΓA ad $A\Delta$ ita EA ad AB; dico aequale esse triangulum $AB\Gamma$ triangulo $A\Delta E$.

Iuncta enim rursus $B\Delta$, quoniam est ut ΓA ad $A\Delta$ ita EA ad AB, sed ut ΓA quidem ad $A\Delta$ ita (VI. 1.) triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum $BA\Delta$, ut EA vero ad AB ita triangulum $EA\Delta$ ad triangulum $BA\Delta$: erit igitur (V. 11.), ut triangulum $AB\Gamma$ ad $BA\Delta$ ita triangulum $EA\Delta$ ad $BA\Delta$; utrumque igitur ipsorum $AB\Gamma$, $A\Delta E$ ad $BA\Delta$ eandem habet rationem; aequale igitur est (V. 9.) triangulum $AB\Gamma$ triangulo $EA\Delta$. Aequalium igitur etc.

PROPOSITIO XVI. (Fig. 364.)

Si quatuor rectae proportionales sint, rectangulum sub extremis contentum aequale est rectangulo sub mediis contento; et si rectangulum sub extremis conten-

exhibet alterum circa hunc angulum latus parallelogrammi triangulive construendi. Nominatim ope Prop. 14. in compendium redigitur solutio problematis I. 44. Cf. Pfleiderer l. c. §§. 141. 142.

Obs. 3. Facile etiam Prop. 15. extendi potest ad triangula, quorum unus angulus unius, et unus angulus alterius simul sumti sunt duobus rectis aequales. Cf. infra ad VI. 23. Obs. 9.

PROP. XVI. XVII.

Obs. 1. Prop. 16. ut Corollarium 14. et Prop. 17. ut Cor. 16. sisti, vel etiam utraque immediate demonstrari potest iisdem modis, quibus 14. Ambae etiam sic enunciari possunt: parallelogrammorum rectangulorum aequalium bases sunt altitudinibus reciproce proportionales; ac vicissim aequalia sunt

ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ· ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῆς Α, Γ σημείων ταῖς ΑΒ, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΗ, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἡ ΑΗ, τῇ δὲ Ε ἴση ἡ ΓΘ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ΒΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν Ε τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΑΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ΒΗ, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων

parallelagramma rectangula, quorum bases sunt altitudinibus reciproce proportionales Cf. Pfleiderer l. c. §. 143.

Obs. 2. Cum quodvis parallelogrammum obliquangulum aequale sit rectangulo aeque alto super eadem basi (I. 35.): generatim etiam (V. 7. V. 11.) duo quaecunque parallelogramma aequalia habent bases altitudinibus reciproce proportionales, ac vicissim. Unde ope I. 41. V. 15. idem de triangulis aequalibus deducitur (ibid. §§. 144. 145.).

Obs. 3. Quodsi priores 16. et 17. partes ad corollaria §. in Elementis ac in Obss. 2. 3. ad VI. 8. subiuncta applicantur; hae emergunt propositiones. Perpendiculo ab vertice anguli recti trianguli rectanguli in hypotenusam demisso, 1) quadratum huius perpendiculi aequatur rectangulo sub segmentis hypotenusae ab ipso factis. 2) Cuiuslibet catheti quadratum aequale est rectangulo sub hypotenusa, et sub eius segmento, quod catheto huic adiacet. 3) Rectangulum sub lateribus circa angulum rectum aequale est rectangulo sub hypotenusa et per-

ım aequale est rectangulo sub extremis contento, quatuor rectae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae proportionales AB, $\Gamma\Delta$, E, Z, ıt AB ad $\Gamma\Delta$ ita E ad Z; dico rectangulum sub AB, Z contentum aequale esse rectángulo sub $\Gamma\Delta$, E conento.

Ducantur enim ab ipsis A, Γ punctis ipsis AB, $\Gamma\Delta$ rectis ad rectos angulos AH, $\Gamma\Theta$, et ponatur ipsi quidem Z aequalis AH, ipsi vero E aequalis $\Gamma\Theta$, et compleantur parallelogramma BH, $\Delta\Theta$.

Et quoniam est ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita E ad Z, aequalis autem E quidem ipsi $\Gamma\Theta$, ipsa vero Z ipsi AH; est igitur (V. 7.) ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita $\Gamma\Theta$ ad AH; parallelogrammorum igitur BH, $\Delta\Theta$ reciproca sunt la-

pendiculo. 4) Rectangulum sub alterutro latere circa angulum rectum et sub perpendiculo aequatur rectangulo sub altero latere circa angulum rectum et sub segmento hypotenusae, quod priori adiacet catheto. In circulo 5) quadratum perpendiculi ab quocunque peripheriae puncto ad aliquam eius diametrum ducti aequatur rectangulo sub segmentis diametri ab perpendiculo factis. 6) Cuiuslibet chordae per centrum non transeuntis quadratum aequale est rectangulo sub diametro per unum chordae extremum ducta, et sub diametri huius segmento chordae contiguo, quod ab illa abscindit perpendiculum in illam ex altero chordae extremo demissum. Unde porro consequitur: perpendiculo in hypotenusam trianguli rectanguli (diametrum circuli) demisso ex vertice anguli recti (puncto quocunque peripheriae), et in circulo ductis ab hoc puncto rectis ad extrema diametri; 7) hypotenusam (diametrum) esse ad alterutrum ipsius segmentum, uti quadratum hypotenusae (diametri) ad quadratum catheti (chordae) huic segmento ad-

ἀντεπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντεπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶ ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ, ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Γ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ, ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ, ἴση γὰρ

iacentis: vel ut huius catheti (chordae) quadratum ad quadratum istius segmenti; vel ut quadratum catheti (chordae) adiacentis alteri segmento ad quadratum perpendiculi. Nempe (Fig. 356.)

$B\Gamma : \Gamma\Delta = B\Gamma^q : B\Gamma \times \Gamma\Delta$ (Obs. 4. ad VI. 1.) $= B\Gamma^q : \Gamma\Delta^q$

$= B\Gamma \times \Gamma\Delta : \Gamma\Delta^q$ $= A\Gamma^q : \Gamma B^q$

$= \Gamma B \times B\Delta : \Gamma\Delta \times \Delta B$ $= AB^q : A\Delta^q$

nr. 2. 6.

8) Ipsa autem hypotenusae (diametri) segmenta esse, ut quadrata cathetorum (chordarum) adiacentium $B\Delta : \Delta\Gamma = \Gamma B \times B\Delta : \Gamma B \times \Delta\Gamma$ (Obs. 4. ad VI. 1.) $= AB^q : A\Gamma^q$ (nr. 2. 6.)

9) Eodemque, quo nr. 8. modo ostenditur, ex eodem peripheriae puncto ductis diametro et duabus pluribusve chordis, perpendiculisque ab alteris harum terminis in diametrum demissis: quadrata chordarum esse ut segmenta ipsis adiacentia

ra, quae circa aequales angulos sunt. Quorum autem aequiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa aequales angulos, illa sunt aequalia (VI. 14.); aequale igitur est parallelogrammum BH parallelogrammo $\Delta\Theta$. Et est BH quidem sub AB, Z contentum, aequalis enim AH ipsi Z; parallelogrammum vero $\Delta\Theta$ sub $\Gamma\Delta$, E continetur, aequalis enim $\Gamma\Theta$ ipsi E; rectangulum igitur sub AB, Z contentum aequale est rectangulo sub $\Gamma\Delta$, E contento.

Sit autem rectangulum sub AB, Z contentum aequale rectangulo sub $\Gamma\Delta$, E contento; dico quatuor rectas proportionales fore, ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita E ad Z.

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum sub AB, Z aequale est rectangulo sub $\Gamma\Delta$, E contento, et est rectangulum quidem sub AB, Z ipsum BH, aequalis enim AH ipsi Z; rectangulum vero sub $\Gamma\Delta$,

diametri. Cf. Pfleiderer l. c. §. 147. (Caeterum quatuor primas in hac observatione occurrentes propositiones iam vidimus in corollariis ad I. 41. et I. 43.).

Obs. 4. Propositionum obs. praecedente expositarum tres primae, usus in demonstrandis X. 34. X. 35. X. 36. gratia traduntur in Lemm. 1. ante X. 34. et ope VI. 17. VI. 16. stabiliuntur mediantibus analogiis una ab VI. 8. Cor. parte priori petita, caeteris ex ipsis propositionibus VI. 8. VI. 4. deductis (vid. Obs. 2. ad VI. 8.); tertia insuper demonstratur, rectangulis sub BA et $A\Gamma$, $B\Gamma$ et $A\Delta$ descriptis, colligendo ex I. 34. utrumque duplum esse trianguli $AB\Gamma$. Primae et secundae demonstratio eadem, quae in Lemm. 1. ante X. 34. repetitur in Lemm. post XIII. 13. ad efficiendam praecedentis septimae (Obs. 3.) partem tertiam. Eiusdem septimae pars prima in demonstrationibus XIII. 14. XIII. 15. XIII. 16. tan-

ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ· καὶ ἔστιν ἰσογώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ· ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

quam nota simpliciter sumitur: pariterque bis in demonstratione XIII. 18. semel autem, bisve, cum adiuncta ratione, ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΓΑΔ τριγώνῳ: in demonstrationibus XIII. 13. autem, pariter ac secunda pars in XIII. 18. ex proportione ΒΓ:ΓΑ=ΑΓ:ΓΔ, vel ΓΔ:ΑΓ=ΑΓ:ΒΓ rursus utrobique ab VI. 8. VI. 4. deducta infertur per VI. 20. Cor. 2. Quae omnia, iuncta iis, quae Obs. 2. ad VI. 8. notata fuere, nimis, quam ut auctori Elementorum tribui possint, ab methodo abludunt alias ipsi solenni, praemissas demonstrationum subsequentium suis locis ad perpetuam deinceps usum stabiliendi; nominatim etiam theorematum generaliorum ad speciales casus applicationes frequenter deinceps

ipsum $\Delta\Theta$, aequalis enim $\Gamma\Theta$ ipsi E; erit parallelogrammum BH aequale parallelogrammo $\Delta\Theta$ et sunt equiangula. Aequalium autem et aequiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera (VI. 14.), circa equales angulos; est igitur ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita $\Gamma\Theta$ ad ΘH. Aequalis autem $\Gamma\Theta$ quidem ipsi E, ipsa vero ΘH ipsi Z; est igitur ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita E ad Z. si igitur quatuor etc.

PROPOSITIO XVII. (Fig. 365.)

Si tres rectae proportionales sint, rectangulum sub extremis contentum aequale est quadrato ex media; et si rectangulum sub extremis contentum aequale sit quadrato ex media, tres rectae proportionales erunt.

Sint tres rectae proportionales A, B, Γ, ut A ad B ita B ad Γ; dico rectangulum sub A, Γ contentum aequale esse quadrato ex B.

Ponatur ipsi B aequalis Δ.

adhibendas. quamvis obvias et faciles, seorsim enunciandi, ut immediate essent ad usus occurrentes paratae. Cf. Obs. 2. ad II. 3. Unde, quum incuriae et oscitantiae auctoris ista tribuere haud liceat, probabile fit, ut hodiernum, ita et olim communibus, tironum praecipue etiam usibus parata fuisse elementorum exemplaria variis modis respectibusque, compandii ac facilitatis gratia, forsan et arctioris systematis praetextu (vid. Proclus in libr. II. p. 21.) truncata, sicque plura, praesertim, quae solis X. ac XIII. in praecedentibus libris inservirent, his excidisse: ac multifariam, nec apte semper et uniformiter, illorum textui assutis lemmatibus (Cf. Obs. 5. ad

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τῷ ἀπὸ τῆς Β ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

VI. 1.), insertisque auctariis ansam dedisse. Cf. Pfleiderer §. 148.

Obs. 5. Ope Prop. VI. 17. demonstrari posse I. 47. diximus in Excursu ad I. 47. Cf. Pfleiderer §. 149.

Obs. 6. Eadem Prop. VI. 17. explicat identitatem constructionis problematum II. 14. et VI. 13., quae aequipollere docet. Cf. Pfleiderer §. 150.

Obs. 7. Uti casus particularis Prop. III. 35. quem sistunt assertum Obs. 3. nr. 5. ac solutio problematis II. 14. (vid. Obs. 3. ad II. 14. sub finem) in libro II. et III. ope II. 5. I. 47. demonstratur, heic per III. 31. VI. 8. VI. 17. adstruitur, ita universim Prop. III. 35. ex III. 21. VI. 4. VI. 16. potest inferri. Ostenditur nempe, duas rectas intra circulum se secantes se mutuo secare in partes reciproce proportionales, unde caetera ex VI. 16. fluunt. Cf. Pfleiderer. §. 151.

Obs. 7. Similiter Prop. III. 36. ipsiusque conversum III. 37. ex III. 32. eiusque conversa, et VI. 4. VI. 6. VI. 17. nectere licet. Ostendetur nempe, duabus rectis in circulum incidentibus, quarum una circulum contingat, altera secet, contingentem mediam proportionalem esse inter secantem, eiusque partem exteriorem, et contingentis quadratum aequari rectangulo sub tota secante, ipsiusque parte exterioti, et vice versa. Cf. Pfleiderer. §. 152.

Et quoniam est ut A ad B ita B ad Γ, aequalis utem B ipsi Δ; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. i autem quatuor rectae proportionales sint, rectangu- um sub extremis contentum aequale est (VI. 16.) re- tangulo sub mediis contento; rectangulum igitur sub A, Γ aequale est rectangulo sub B, Δ. Sed rectan- gulum sub B, Δ est quadratum ex B, aequalis enim B ipsi Δ; rectangulum igitur sub A, Γ contentum equale est quadrato ex B.

Obs. 8. Quodsi (Fig. 365) ΔB circulum contingat in B, $\Delta\Gamma$ secet in A et Γ, triangula ΔAB, $\Delta B\Gamma$, ob angulum Δ utrique communem, et $\Delta AB = \Delta B\Gamma$ (III. 32.) aequiangula erunt (I. 32.), adeoque

$$\left.\begin{array}{l} \Delta A : \Delta B = AB : B\Gamma \text{ (VI. 4.)} = AB_q : AB \times B\Gamma \\ \Delta B : \Delta\Gamma = AB : B\Gamma \qquad\qquad = AB \times B\Gamma : B\Gamma_q \end{array}\right\} \text{(Obs. 4. ad VI. 1.}$$

taque $\Delta A : \Delta\Gamma = AB_q : B\Gamma_q$ (V. 22.) h. e. ab puncto extra circulum ductis recta eum contingente, et altera ipsum secante, ductisque in circulo rectis tangentibus punctum contactus prioris et puncta sectionum alterius; tota secans recta est ad partem ipsius exteriorem, uti quadratum rectae ab puncto contactus ad extremum secantis totius ductae, ad quadratum rectae tangentis punctum contactus, atque alterum sectionis punctum. Vicissim, si $\Delta A : \Delta\Gamma = AB_q : B\Gamma$, cum ducta rectae AB parallela ΓE, etiam sit $\Delta A : \Delta\Gamma = AB : \Gamma E = AB_q : AB \times \Gamma E$ (Obs. 2. ad VI. 4. et Obs. 2. ad VI. 1.), ideoque (V. 11.) $AB_q : B\Gamma_q = AB_q : AB \times \Gamma E$ et (V. 9.) $B\Gamma_q = AB \times \Gamma E$, et (VI. 17.) $AB : B\Gamma = B\Gamma : \Gamma E$, ac sit angulus $AB\Gamma = B\Gamma E$ (I. 29), est angulus $A = \Delta B\Gamma$ (VI. 6.) et hinc ΔB circulum in B contingit (Obs. 2. ad III. 32.). Cf. Pfleiderer §. 155.

Obs. 9. Proposita Obs. 7. 8. sic etiam enunciantur: circa triangulum non aequicrurum descripto circulo, et per verticem trianguli ducta recta circulum tangente; haec basi productae sic occurrit, ut rectangulum sub rectis puncto huic occursus

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Β, Δ. Ἐστι

extremisque basis interiacentibus aequale sit quadrato rectae ab eodem occursus puncto ad verticem trianguli ductae; rectae vero inter punctum illud occursus ac terminos basis in ipsa abscissae eandem habeant rationem, quam crurum trianguli quibus adiacent, quadrata. Nempe, si triangulo ΑΓΒ, cuius crus ΑΒ > ΒΓ, circulus circumscribitur, et hunc in Β contingens agitur recta ΒΔ: ob angulum ΔΒΓ = Α (III. 32.) < ΑΓΒ (I. 18.), ideoque angulos ΔΒΓ + ΔΓΒ < ΑΓΒ + ΑΓΒ h. e. (I. 13.) < 2 rectis: ad partes angulorum ΔΒΓ, ΑΓΒ concurrunt rectae ΑΓ, ΒΔ (I. Post. 5.). Ac tum rectang. ΑΔ × ΔΓ = ΔΒ q (Obs. 7.) et ΑΔ : ΔΓ = ΑΒ q : ΒΓ q (Obs. 8.) Vicissim 1) si trianguli non aequicruri ΑΓΒ basis ΑΓ ad partes cruris minoris ΒΓ sic producitur, ut rectangulum sub adiecta ΓΔ et sub composita ΔΑ ex basi ΑΓ et adiecta ΓΔ aequale sit quadrato rectae ΔΒ ab termino Δ continuationis basis ad trianguli verticem Β ductae: recta haec circulum triangulo circumscriptum in Β contingit (Obs. 8. nr. 2.) et segmenta basis ΑΔ, ΔΓ terminis ipsius Α, Γ, ac puncto Δ intercepta sunt uti quadrata crurum trianguli ΑΒ, ΒΓ, ipsis adiacentia (Obs. 8. nr. 1.). Atque 2) si trianguli non aequicruri ΑΓΒ basis ΑΓ ad partes cruris minoris sic in Δ usque producitur, ut segmenta eius ΑΔ, ΔΓ, puncto hoc Δ, terminisque basis Α, Γ intercepta, sint, ut crurum trianguli ΑΒ, ΒΓ ipsis adiacentium quadrata; recta ab puncto Δ ad verticem Β trianguli ducta circulum triangulo circumscriptum in Β contingit (Obs. 9. nr. 2.) et rectae ΔΒ quadratum aequale est rectang. sub segmentis ΑΔ, ΔΓ basis puncto Δ ac terminis eius Α, Γ

Sed rectangulum sub A, Γ aequale sit quadrato ex B; dico esse ut A ad B ita B ad Γ.

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum sub A, Γ aequale est quadrato ex B, sed quadratum ex B est rectangulum sub B, Δ, aequalis enim B ipsi Δ; erit igitur rectangulum sub A, Γ aequale rectan-

interceptis (Obs. 8. nr. 1.). Posterior converſa est Lemma 2. Libri II. Locorum planorum Apollonii. Cf. Pfleiderer. §. 154.

Obs. 10. Pariter immediate per III. 21. vel III. 22. et VI. 4. VI. 16. demonstratur, quod a Clavio et Baermanno III. Prop. 36. subiungitur corollarium (vid. supra III. 36. Cor. 1.), nempe si a puncto extra circulum ducantur duae rectae eum secantes, rectangula sub totis secantibus, et partibus earum exterioribus aequalia esse, sive, quod eodem redit, totas secantes esse partibus suis exterioribus reciproce proportionales. Cf. Pfleiderer. §. 155.

Obs. 11. Ex VI. 16. porro consequitur, cuiuslibet trianguli $AB\Delta$ (Fig. 366.) angulo quocunque Δ bifariam secto per rectam $\Delta\Gamma$, rectangulum sub eius lateribus $A\Delta$, ΔB angulum Δ comprehendentibus aequale esse rectangulo sub segmentis $A\Gamma$, ΓB tertii lateris, ab recta $\Delta\Gamma$ factis, una cum huius rectae $\Delta\Gamma$ quadrato (quae est Rob. Simson. Libr. VI. Prop. B.). Circumscribatur enim triangulo $AB\Delta$ circulus (IV. 5.), cui recta $\Delta\Gamma$ producta rursus occurrat in E, et iungatur alterutra recta AE, BE. Posteriore ducta, est angulus $A=E$ (III. 21.). Quare, cum etiam sit angulus $A\Delta\Gamma=B\Delta E$ (hyp.) est $A\Delta:\Delta\Gamma=E\Delta:\Delta B$ (VI. 4.) et hinc rectang. $A\Delta\times\Delta B=E\Delta\times\Delta\Gamma$ (VI. 16.) $=\Delta\Gamma\times\Gamma E+\Delta\Gamma q$ (II. 3.) $=\Delta\Gamma\times\Gamma B+\Delta\Gamma q$ (III. 35.). Cf. Pfleiderer. §. 157.

Obs. 12. Porro rectangulum sub duobus quibuscunque lateribus cuiuslibet trianguli aequale est rectangulo sub diametro circuli triangulo circumscripti et sub perpendiculo ex vertice anguli, quem latera ista comprehendunt, in latus ter-

δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσων ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ. Ἐὰν ἄρα τρεῖς, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

tium demisso. 1) Si ipsum alterutrum latus AB (Fig. 367.) tertio $B\Gamma$ est perpendiculare: alterum $A\Gamma$ diameter est circuli triangulo circumscripti (III. 31. Conv. vid. Obs. ad III. 31. vel III. 33. nr. 2.) et propositio ad hanc identicam redit: rectang. $BA \times A\Gamma = \Gamma A \times AB$. 2) Si uterque ad basin sed tertium latus $B\Gamma$ (Fig. 368.) angulus est acutus, quicunque si angulus $BA\Gamma$ duobus lateribus BA, $A\Gamma$ comprehensus; vel si alteruter ad basin angulus $AB\Gamma$ (Fig. 369.) est obtusus, per verticem A ducta diametro AZB, et iuncta BE recta, perpendiculoque $A\Delta$ in basin $B\Gamma$ demisso; ob angulos ABE, $A\Delta\Gamma$ rectos (III. 31. et Constr.) atque $E = \Gamma$ (III. 21.) in triangulis ABE, $A\Delta\Gamma$ est $BA : AE = \Delta A : A\Gamma$ (VI. 4.), proinde rectangul. $BA \times A\Gamma = EA \times A\Delta$ (VI. 16.). (Rob. Simson. Prop. C. Libri VI. Pfleiderer, §. 158.). Hinc rectang. $B\Gamma \times A\Delta : BA \times A\Gamma = B\Gamma \times A\Delta : EA \times A\Delta$ (V. 7.) $= B\Gamma : EA$ (Obs. 4. ad VI. 1.), ubi rectang. $B\Gamma \times A\Delta$ duplum est areae trianguli (I. 41.). Quare duplum areae cuiusvis trianguli est ad rectangulum sub duobus ipsius lateribus, uti tertium latus ad diametrum circuli triangulo circumscripti. Cf. Pfleiderer. §. 159.

Obs. 13. Rectangulum contentum diagonalibus $A\Gamma$, $B\Delta$ (Fig. 370.) figurae quadrilaterae circulo inscriptae aequale est duobus rectangulis $AB \times A\Gamma + B\Gamma \times A\Delta$ contentis oppositis eius lateribus. Fiat enim angulus ABE aequalis angulo $AB\Gamma$, et

gulo sub B, Δ. Si autem rectangulum sub extremis aequale est rectangulo sub mediis contento, quatuor rectae proportionales sunt (VI. 16.); est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Aequalis autem B ipsi Δ; ut igitur A ad B ita B ad Γ. Si igitur tres etc.

PROPOSITIO XVIII. (Fig. 374.)

A data recta linea dato rectilineo simile et similiter positum rectilineum describere.

utrique addatur, vel ab utroque subtrahatur, angulus communis $EB\Delta$, eritque angulus $AB\Delta$ aequalis angulo $EB\Gamma$. Et, quum praeterea sit angulus $A\Delta B = B\Gamma E$ (III. 21.), quippe in eodem cum illo segmento positus, erit triangulum $AB\Delta$ aequiangulum triangulo $EB\Gamma$, adeoque (VI. 4.) $B\Gamma : \Gamma E = B\Delta : \Delta A$, ideoque rectangulum $B\Gamma \times A\Delta = \Gamma E \times B\Delta$. Porro, quum angulus ABE aequalis sit angulo $\Delta B\Gamma$, et angulus BAE aequalis angulo $B\Delta\Gamma$ (III. 21.), erit triangulum ABE aequiangulum triangulo $\Delta B\Gamma$, adeoque (VI 4.) $B\Delta : AE = B\Delta : \Delta\Gamma$, ideoque rectangulum $B\Delta \times \Delta\Gamma = AE \times B\Delta$. At ostensum fuit, esse rectangulum $B\Gamma \times A\Delta = \Gamma E \times B\Delta$. Erunt itaque rectangula $B\Delta \times \Delta\Gamma + B\Gamma \times A\Delta = A\Gamma \times B\Delta$. Haec propositio est theorema Ptolemaei in μεγάλη σύνταξις L. 1. c. 9. et apud ipsum fundamenti loco inservit tabulis eius trigonometricis. Habetur illud etiam apud Rob. Simson. Prop. D., VI. in ed. Angl., apud Plaifayr., Kraft. Instit. Geom. Sublim. §. 91. aliosque. Ad eandem propositionem referri potest sequens theorema, quod est apud Plaifayr. Prop. E., VI. Si segmentum aliquod circuli $AB\Gamma$ (Fig. 371.) bisectum sit in Γ, et e punctis extremis A, B segmenti, pariterque e puncto bisectionis Γ inflexae sint ad punctum aliquod Δ reliquae circumferentiae rectae $A\Delta$, $B\Delta$, $\Gamma\Delta$: summa rectarum $A\Delta + B\Delta$ a punctis extremis basis inflexarum ad $\Gamma\Delta$ rectam a puncto bisectionis inflexam eandem rationem habebit, quam AB basis

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖαι ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Α, Β τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ

segmenti ad ΔΓ basin segmenti dimidii. Quum enim sit ΑΒΓΔ quadrilaterum circulo inscriptum, erit ex praeced. ΑΔ×ΒΓ+ΔΒ×ΑΓ=ΑΒ×ΔΓ i. e. ob ΒΓ=ΑΓ (III. 29.) (ΑΔ+ΔΒ)×ΑΓ=ΑΒ×ΔΓ (II. 1)., adeoque ΑΔ+ΒΔ : ΓΔ=ΑΒ : ΑΓ (VI. 14.). (Playfair Prop. E. VI. Cf. 94. vel ut est apud Rob. Sims. Dat. 97.).

Obs. 14. Conversas praecedentium, praeter iam Obs. 7. sqq. expositas notamus adhuc sequentes. Si quadratum perpendiculi ΑΔ (Fig. 356.), quod in trianguli ΑΒΓ latus ΒΓ angulis ipsius acutis interiacens ex vertice opposito Α demittitur, aequale est rectangulo sub segmentis ΒΔ, ΔΓ lateris ΒΓ ab perpendiculo ΑΔ factis, seu (VI. 17.) si perpendiculum ΑΔ medium proportionale est inter segmenta ΒΔ, ΔΓ lateris ΒΓ: trianguli ad verticem Α angulus est rectus. Quippe ob ΒΔ : ΔΑ=ΔΑ : ΔΓ, et angulos ad Δ rectos, est angulus ΒΑΔ=Γ (VI. 6.); angulus igitur ΒΑΓ=Γ+ΓΑΔ= recto (I. 32. Cor. 5.). Cf. Pfleiderer. §. 160. Pappus Collect. Mathem. l. VII, Prop. 203. propositioni huic adiungit: si quadratum perpendiculi ΑΔ (Fig. 372.) minus fuerit rectangulo sub segmentis ΒΔ, ΔΓ lateris ΒΓ, angulus ΒΑΓ erit obtusus, si maius (Fig. 373.) acutus. Semicirculo enim super diametro ΒΓ descripto, qui perpendiculum ΑΔ in puncto Ε secet, ac rectis

Sit data quidem recta AB, datum autem rectilineum ΓE; oportet a recta linea AB rectilineo ΓE simile et similiter positum rectilineum describere.

Iungatur ΔZ, et constituatur (I. 23.) ad rectam AB et ad puncta in ea A, B angulo quidem ad Γ aequalis angulus HAB, angulo vero $\Gamma\Delta Z$ aequalis angulus ABH; reliquus igitur $\Gamma Z\Delta$ reliquo AHB est aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum $Z\Gamma\Delta$ triangulo HAB; est igitur (VI. 4.) ut $Z\Delta$ ad HB ita $Z\Gamma$ ad HA et $\Gamma\Delta$ ad AB. Rursus, con-

BE, ΓE iunctis ob $B\Delta q =$ rectangulo $B\Delta \times \Delta\Gamma$ (Obs. 3. nr. 5.) priori casu erit $A\Delta < E\Delta$, et hinc angulus $BA\Gamma > BE\Gamma$ (I. 21.); posteriori $A\Delta > E\Delta$, atque angulus $BA\Gamma < BE\Gamma$ (I. 21.). Rectus autem est angulus $BE\Gamma$ (III. 31.). Cf. Pfleiderer. §. 161. Propositorum in hac observatione casus specialis, quo segmenta $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ aequalia sunt, comprehenditur etiam iis, quae nr. 2. in Excursu ad I. Prop. 47. etc. ad finem libri II. diximus. Cf. Pfleiderer. §. 162. Et, quum ostensum sit, rectum esse angulum $BA\Gamma$ (Fig. 356.), quem ab extremis B, Γ rectae $B\Gamma$ ad extremum A perpendiculi $A\Delta$ ductae BA, ΓA comprehendunt, si rectang. $B\Delta \times \Delta\Gamma = \Delta A q$, seu si $B\Delta : \Delta A = \Delta A : \Delta\Gamma$; per conversam III. 31. consequitur: circuli super diametro $B\Gamma$ descripti peripheriam transire per verticem A rectae ΔA diametro $B\Gamma$ inter extrema ipsius normalis, quae media proportionalis est inter segmenta diametri $B\Gamma$ puncto Δ facta, seu cuius quadratum rectangulo sub segmentis illis est aequale. Cf. Pfleiderer. §. 163. Ea quae ad hanc propositionem notata sunt solutioni etiam plurimorum problematum inservire possunt, quorum exquisitam copiam exhibet Pfleiderer. l. c. §§. 166–194, quae brevitatis studio hic praeterimus. *Quae hactenus ad Propositiones libri VI. observata sunt, desumsimus pleraque ex Pfleiderer. scholiis in libro VI. Elementorum Eu-*

ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. Πάλιν, συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἥ τε ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστὶν ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῷ πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

elidis, quorum P. I. Tubingae 1800.; P. II. 1801.; P. III. 1802. typis expressas fuerunt. Pars IV. prodiit ibidem 1805., in qua unice de VI. propositione 23. et VI. definitione 5., utpote qua nititur VI. Prop. 23. agitur. Quippe hanc ipsam VI. 23. inepte loco suo motam et inter propositiones ad figuras similes pertinentes positam fuisse indicat auctor. De ea itaque postea loco suo, et in excursu ad hunc librum videri mus. Dolendum autem est, scholia Pfleidereri in reliquos libri VI. propositiones, quas ille iam elaborata in scrinio habet, sublata in Universitate Tubingensi consuetudine, occasione Magisterii philosophici quotannis dissertationes publicae conscribendi, non in publicam lucem exire potuisse. E quibus benevole ab auctore nobiscum communicatis, nonnulli

tituatur (I. 23.) ad rectam BH et ad puncta in ea B, H, angulo quidem ΔZE aequalis $BH\Theta$, angulo vero $Z\Delta E$ aequalis $HB\Theta$; reliquus igitur ad E reliquo ad Θ est aequalis (I. 32.); aequiangulum igitur est triangulum $Z\Delta E$ triangulo $HB\Theta$; est igitur (VI. 4.) ut ΔZ ad HB ita ZE ad $H\Theta$, et $E\Delta$ ad ΘB. Ostensum est autem etiam, ut $Z\Delta$ ad HB ita $Z\Gamma$ ad HA et $\Gamma\Delta$ ad AB, ut igitur (V. 11.) $Z\Gamma$ ad AH ita et $\Gamma\Delta$ ad AB et ZE ad $H\Theta$, et adhuc $E\Delta$ ad ΘB. Et quoniam aequalis est angulus quidem $\Gamma Z\Delta$ angulo AHB, angulus vero ΔZE angulo $BH\Theta$; totus igitur ΓZE toti $AH\Theta$ est aequalis. Ex eadem ratione et $\Gamma\Delta E$ angulo $AB\Theta$ est aequalis, est autem et angulus quidem ad Γ ipsi ad A aequalis, angulus vero ad E ipsi ad Θ; aequiangulum igitur est $A\Theta$ ipsi ΓE, et circa aequales angulos latera proportionalia habet; simile igitur est rectilineum $A\Theta$ rectilineo ΓF (VI. 1, Def.).

certe in sequentibus breviter lectoribus nostris sistere voluimus, nos rem ipsis admodum gratam facturos esse, persuasi. Cf. quae supra diximus ad VI. Def. 1.

PROPOSITIO XVIII.

Obs. 1. Quod ad sensum problematis, et maxime verborum „similiter positum" attinet, Clavius eum ita exprimit: „dicuntur rectilinea super lineas rectas descripta esse similia et similiter posita, quando anguli aequales constituuntur super ipsas rectas lineas, et tam reliqui aequales anguli, quam latera proportionalia semper ordine sese consequuntur." Borellus autem rem ita explicat (Euclid. restit. lib. IV. Prop. 16.): problema poscit, super data recta linea describere polygonum

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ΓΕ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ ΑΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας

dato aequiangulum, et habens circum angulos aequales latera proportionalia lateribus illius, ita ut data recta homologa sit dato lateri polygoni. Necessitatem autem vocum „similiter positum", quae Ramus definiri debuisse non sine ratione monet, iure asserit Tartalea contra Campanum (in cuius versione VI. Prop. apud ipsum 19. illae omissae sunt). Nempe omissis his vocibus plura uno rectilineo super data recta construi possunt, ita ut dato rectilineo sint similia. Cf. Pfleiderer. Schol. msc. §§. 256. 257.

A data igitur recta AB dato rectilineo ΓE simile et similiter positum rectilineum $A\Theta$ descriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIX. (Fig. 376.)

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione homologorum laterum

Sint similia triangula $AB\Gamma$, ΔEZ, angulum ad B aequalem habentia angulo ad E, et sit ut AB ad $B\Gamma$ ita ΔE ad EZ, ita ut homologum sit $B\Gamma$ ipsi EZ; dico triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum ΔEZ duplicatam rationem habere eius quam habet $B\Gamma$ ad EZ.

Sumatur enim (VI. 11.) ipsis $B\Gamma$, EZ tertia proportionalis BH, ita ut sit ut $B\Gamma$ ad EZ ita EZ ad BH; et iungatur HA.

Et quoniam est ut AB ad $B\Gamma$ ita ΔE ad EZ; alterne igitur est (V. 16.) ut AB ad ΔE ita $B\Gamma$ ad EZ. Sed ut $B\Gamma$ ad EZ ita est EZ ad BH; ut igitur (V. 11.) AB ad ΔE ita EZ ad BH; triangulorum igitur ABH, ΔEZ reciproca sunt latera circa aequales angulos. Quorum autem triangulorum unum angulum uni aequalem habentium, reciproca sunt latera circa ae-

Obs. 2. Circa demonstrationem huius propositionis, ut est in textu graeco, iure monet Rob. Simson., vitiatam eam videri, quod in quadrilateris tantum ostendatur propositio, nec dicatur, quo modo extendi possit ad rectilinea quinque aut plurium laterum. Idem praeterea observat, in duobus triangulis inter se aequiangulis hic concludi, esse latus unius ad latus homologum alterius, ut latus aliud primi ad latus alterius huic homologum, sine permutatione proportionalium contra morem Euclidis, ut ex sequente Prop. 19. manifestum sit,

Ὧν δὲ, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τριγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις·

idemque vitium recurrere in conclusione. Contra hanc tamen observationem forte haud iniuria monere queas, niti conclusionem a Rob. Simson. reprehensam non quidem enunciato et demonstratione VI. 4. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 261. Perfectior autem demonstratio problematis solutionem ostendere potest primum in triangulis, ab his procedere ad figuras quadrilateras, ab his ad quinquelateras, et ita semper a quavis figura recti-

quales angulos, illa sunt aequalia (VI. 15.); aequale igitur est triangulum *ABH* triangulo *ΔEZ*. Et quoniam est ut *BΓ* ad *EZ* ita *EZ* ad *BH*; si autem tres rectae proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur (V. 10. Def.) eius quam ad secundam; *BΓ* igitur ad *BH* duplicatam rationem habet eius quam *BΓ* ad *EZ*. Ut autem *BΓ* ad *BH* ita (VI. 1.) triangulum *ABΓ* ad triangulum *ABH*; ergo et triangulum *ABΓ* ad *ABH* duplicatam rationem habet eius quam *BΓ* ad *EZ*. Aequale autem est triangulum *ABH* triangulo *ΔEZ*; unde et triangulum *ABΓ* (V. 7.) ad triangulum *ΔEZ* duplicatam rationem habet eius quam *BΓ* ad *EZ*. Ergo similia etc.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si tres rectae proportionales sint, esse ut prima ad tertiam ita triangulum ex prima ad triangulum ex secunda simile et similiter descriptum; quia ostensum est, ut *ΓB* ad *BH* ita triangulum *ABΓ* ad triangulum *ABH*, hoc est *ΔEZ*.

PROPOSITIO XX. (Fig. 378.)

Similia polygona in similia triangula dividuntur, et numero aequalia et homologa totis; et polygonum ad

linea ad aliam, quae habeat numerum laterum unitate maiorem, unde deinde generaliter propositum constabit.

Obs. 3. Alium modum paullo expeditiorem, super linea data *AB* constituendi figuram rectilineam similem et similiter positam dato rectilineo *AΓΔEZ* (Fig. 375.) Clavius docet ita fere. Ponatur data *AB* super latus *AΓ*, quod ei homologum esse debet, ducantur deinde ex *A* ad vertices angulorum figurae

καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ· καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΖΛ. Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ

rectae ΑΔ, ΑΕ etc. per Ε ducatur ΒΘ parallela rectae ΓΔ: per Θ pariter ΘΙ parallela rectae ΔΕ etc. et facile ostendetur esse triangula ΑΒΘ, ΑΓΔ; ΑΘΙ, ΑΔΕ etc. adeoque tota rectilinea ΑΒΘΙΚ, ΑΓΔΕΖ similia et similiter posita.

Obs. 4. Huc pertinet problema (vid. XII. 2. et XII. 11.) dato circulo inscribendi (circumscribendi) figuram rectilineam datae circulo alii inscriptae (circumscriptae) similem et similiter positam. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 263. 264.

PROPOSITIO XIX.

Obs. 1. Sensus huius propositionis est (Cf. dicta ad V. Def. 10.), similia triangula inter se habere rationem, quae *eadem sit* rationi duplicatae laterum homologorum, vel triangulum ΑΒΓ esse ad aliud ei simile ΔΕΖ in eadem ratione in

ygonum duplicatam rationem habet eius quam ho-
ologum latus ad homologum latus.

Sint similia polygona $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$, homo-
gum vero sit latus AB ipsi ZH; dico $AB\Gamma\Delta E$,
$H\Theta K\Lambda$ polygona in similia triangula dividi et in
umero aequalia et homologa totis, et polygonum
$B\Gamma\Delta E$ ad polygonum $ZH\Theta K\Lambda$ duplicatam ratio-
em habere eius quam habet AB ad ZH.

Iungantur BE, $E\Gamma$, $H\Lambda$, $\Lambda\Theta$.

Et quoniam simile est polygonum $AB\Gamma\Delta E$ poly-
ono $ZH\Theta K\Lambda$, aequalis est angulus BAE angulo
$HZ\Lambda$; et est ut BA ad AE ita ZH ad $Z\Lambda$ (VI.
Def. 1.). Et quoniam duo triangula ABE, $ZH\Lambda$
unum angulum uni angulo aequalem habentia, circa
aequales autem angulos latera proportionalia; aequian-
gulum igitur est triangulum ABE triangulo $ZH\Lambda$
(VI. 6.), quare et (VI. 4.) simile; aequalis igitur est

qua est latus $B\Gamma$ prioris trianguli ad rectam aliquam, ad quam $B\Gamma$ habet rationem duplicatam eius rationis, quam $B\Gamma$ habet ad latus EZ ipsi homologum in altero triangulo, vel, si sumitur (VI. 11.) $B\Gamma : EZ = EZ : BH$, esse triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum ΔEZ in eadem ratione, in qua est $B\Gamma$ ad BH. Caeterum patet, loco laterum $B\Gamma$, EZ quaevis alia homologa poni potuisse. Et inverse erit ratio trianguli ΔEZ ad triangulum $AB\Gamma$ duplicata lateris EZ ad $B\Gamma$, vel erit triangulum ΔEZ ad triangulum $AB\Gamma$ ut BH ad $B\Gamma$ (Cor. ad B. V.). Pfleiderer. in sched. mse. §§. 269. 270. 271. 273.

Obs. 2. Quodsi in triangulorum similium (Fig. 377.) homologa latera $B\Gamma$, EZ perpendicula $A\Theta$, ΔK demittantu ex verticibus angulorum homologorum, erit, ob angulos B et E, pariterque Θ et K, adeoque (I. 32.) etiam reliquos aequa-

γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. Ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ· δίτσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον (ἔτι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ [1]). Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν, ὅτι ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

1) Verba uncis inclusa desunt in Ed. Oxon., nec multum refert, utrum ea ponas an omittas.

les, in triangulis aequiangulis $A\Theta : \Delta K = AB . \Delta E$ (VI. 4. demonstr.) $= B\Gamma : EZ = A\Gamma : \Delta Z$, adeoque (vid. dicta ad V. Def. 10.) triangula $AB\Gamma$, ΔEZ erunt etiam in ratione duplicata altitudinum $A\Theta$, ΔK, vel perpendiculorum similem situm habentium. Pfleiderer. §§. 280. 281.

Obs. 3. Quum parallelogramma semper dupla sint trian-

ıgulus *ΑΒΕ* angulo *ΖΗΛ*. Est autem et totus *ΕΒΓ* toti *ΖΗΘ* aequalis, propter similitudinem polygonorum; reliquus igitur angulus *ΕΒΓ* reliquo *ΛΗΘ* et aequalis. Et quoniam propter similitudinem triangulorum *ΑΒΕ*, *ΖΗΛ*, est ut *ΕΒ* ad *ΒΑ* ita *ΛΗ* ad *ΗΖ*, sed et propter similitudinem polygonorum, est ut *ΑΒ* ad *ΒΓ*, ita *ΖΗ* ad *ΗΘ*; ex aequo igitur est (V. 22.), ut *ΕΒ* ad *ΒΓ* ita *ΛΗ* ad *ΗΘ*, et circa aequales angulos *ΕΒΓ*, *ΛΗΘ* latera proportionalia sunt; aequiangulum igitur est (VI. 6.) triangulum *ΕΒΓ* triangulo *ΛΗΘ*, quare (VI. 4.) et simile (triangulum *ΕΒΓ* triangulo *ΛΗΘ*). Ex eadem ratione et triangulum *ΕΓΛ* simile est triangulo *ΛΘΚ*; ergo similia polygona *ΑΒΓΛΕ*, *ΖΗΘΚΛ* in similia triangula dividuntur et in aequalia numero.

Dico et homologa totis, hoc est, ut proportionalia sint triangula, et antecedentia quidem sint *ΑΒΕ*, *ΕΒΓ*, *ΕΓΛ*, consequentia vero eorum *ΖΗΛ*, *ΛΗΘ*, *ΛΘΚ*, et *ΑΒΓΛΕ* polygonum duplicatam rationem habere eius quam homologum latus ad homologum latus, hoc est, *ΑΒ* ad *ΖΗ*.

gulorum eandem basin, eandemque altitudinem habentium (I. 41.), erunt etiam (V. 15.) similia parallelogramma in ratione laterum duplicata, vel etiam (Obs. 2.) in ratione duplicata perpendiculorum similiter positorum. Pfleiderer. §. 282. sqq.

Obs. 4. Quum porro quadrata omnia sint parallelogramma similia (I. Def. 29.; I. 28.; VI. Def. 1.) erunt duo quaecunque quadrata in ratione duplicata laterum homologorum. Unde, si super rectis homologis *ΒΓ*, *ΕΖ* triangulorum similium *ΑΒΓ*, *ΔΕΖ* quadrata constructa imagineris, erunt tam

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ· ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστὶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ· Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς ΝΘ· ὥστε καὶ δι᾽ ἴσου, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ. Ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΜ τρίγωνον πρὸς ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς ΕΜΓ, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ

triangula, quam quadrata in ratione duplicata rectarum ΒΓ, ΕΖ, adeoque etiam triangula similia erunt in ratione quadratorum laterum homologorum. Pfleiderer. §. 278.

Obs. 5. Quodsi latera homologa duorum similium triangulorum (parallelogrammorum) aequalia sunt, ista triangula (parallelogramma) aequalia erunt (V. 22. Cor.) et vice versa (Cor. Prop. m. in Excursu ad libr. V.)

Jungantur enim $A\Gamma$, $Z\Theta$.

Et quoniam propter similitudinem polygonorum aequalis est angulus $AB\Gamma$ angulo $ZH\Theta$, et est ut AB ad $B\Gamma$ ita ZH ad $H\Theta$; aequiangulum est (VI. 6.) triangulum $AB\Gamma$ triangulo $ZH\Theta$; aequalis igitur est angulus quidem $BA\Gamma$ angulo $HZ\Theta$, angulus vero $B\Gamma A$ angulo $H\Theta Z$. Et quoniam aequalis est angulus BAM angulo HZN, ostensus autem est et ABM angulo ZHN aequalis; et reliquus igitur (I. 32.) AMB reliquo ZNH aequalis est; aequiangulum igitur est triangulum ABM triangulo ZHN. Similiter ostendemus et triangulum $BM\Gamma$ aequiangulum esse triangulo $HN\Theta$; est igitur (VI. 4.) ut AM quidem ad MB ita ZN ad NH, ut vero BM ad $M\Gamma$ ita HN ad $N\Theta$; quare et ex aequo (V. 22.) ut AM ad $M\Gamma$ ita ZN ad $N\Theta$. Sed ut AM ad $M\Gamma$ ita triangulum ABM ad $MB\Gamma$, et AME ad $EM\Gamma$, inter se enim sunt ut bases (VI. 1.); et (V. 12.) ut unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut igitur triangulum AMB ad $BM\Gamma$, ita ABE ad ΓBE. Sed ut AMB ad $BM\Gamma$ ita AM ad $M\Gamma$; ergo ut (V. 11.) AM ad $M\Gamma$ ita triangulum ABE ad triangulum $EB\Gamma$. Ex eadem ratione et ut ZN ad $N\Theta$ ita triangulum $ZH\Lambda$ ad triangulum $H\Lambda\Theta$. Et est ut AM ad $M\Gamma$

Obs. 6. Corollarium Prop. 19. adiectum, quod et Austin. observat, nonnisi ipsam Prop. 19. aliis verbis, substituendo nempe termino „ratio duplicata" definitionem eius, enunciat, verumtamen expeditioris in sequentibus (vid. Demonstr. VI. 22.; VI. 25.; VI. 31.) argumentationis causa diserte ea exponere e re erat. Idem observandum est de Cor. Prop. 20. VI. 2. Cf. Pfleiderer. §. 300.

ΖΝ πρὸς ΝΘ οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τ
ΗΛΘ τρίγωνον. Καὶ ἐστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕ-
τως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον
πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον
πρὸς τὸ ΗΘΛ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒΕ
τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕΓ
τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. Ὁμοίως δὴ δεί-
ξομεν, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΒΛ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τ
ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον οὕτως κ
ΕΓΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. Καὶ ἐπ
ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον
οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι ΕΓΛ πρὸς τ
ΛΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶ
ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα

PROPOSITIO XX.

Obs. 1. Quum polygona hac varia ratione in triang
dividi possint, distinctius dici oportebat, qua ratione id fie
debeat, ut in utroque similium polygonorum respective sim
existant triangula. Nempe si in uno polygonorum a vertic
anguli cuiuscunque v. gr. a vertice *E* ad vertices reliquorum
angulorum omnium (exceptis duobus proximis) ducantur rectae
EB, *EΓ* etc., pariterque in altero polygono a vertice eius an-
guli, qui cum angulo *E* similiter positus est, ducantur
vertices reliquorum angulorum rectae *ΛΗ*, *ΛΘ* etc., tum
Atque, triangulis ita formatis, diagonales homologae, i.e.
quae vertices angulorum respective aequalium iungunt, ut
demonstratione patet, in partes respective aequales divid
angulos, per quos transeunt, et ipsae hae diagonales sunt l
teribus figurarum homologis proportionales. Cf. Pfleide
Schol. §. 292.

Obs. 2. Quod demonstrationem attinet, pars secunda
quod nempe homologa sint triangula *ΑΒΕ*, *ΖΗΛ*, pariterque
ΕΒΓ, *ΛΗΘ* praeter rationem prolixa esse videtur, quum, de

ita ZN ad $N\Theta$; ergo (V. 11.) ut triangulum ABE ad triangulum $BE\Gamma$, ita triangulum $ZH\Lambda$ ad triangulum $H\Theta\Lambda$, et alterne (V. 16.) ut triangulum ABE ad triangulum $ZH\Lambda$ ita triangulum BEM ad triangulum $H\Lambda\Theta$. Similiter ostendemus, iunctis $B\Lambda$, HK, ut triangulum $BE\Gamma$ ad triangulum $H\Lambda\Theta$ ita triangulum $E\Gamma\Delta$ ad triangulum $\Lambda\Theta K$. Et quoniam est ut triangulum ABE ad $ZH\Lambda$ ita $EB\Gamma$ ad $\Lambda H\Theta$, et insuper $E\Gamma\Delta$ ad $\Lambda\Theta K$; erit ut (V. 12.) unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; est igitur ut triangulum ABE ad triangulum $ZH\Lambda$ ita polygonum $AB\Gamma\Delta E$ ad polygonum $ZH\Theta K\Lambda$. Sed triangulum ABE ad triangulum $ZH\Lambda$ duplicatam rationem habet eius quam

monstrata ante triangulorum similitudine, res statim ex VI. 19. et V. 11. patet, ut in altera demonstratione ad finem addita ostenditur. Unde haud paucis potior visa fuit haec posterior demonstratio, quam multi editores solam habent (v. c. Clavius, Giordano da Bitonto, Candalla, Billingsley, Orontius Fineus, Henrion, Borellus, Barrow., Cotesius, Rob. Simson., Playfair. alii) vel alteri addunt (ut Campanus, Zambertus, Commandinus, Boermannus, alii). Pfleiderero tamen (§. 291.) prior illa, subtiliori arte, et per consequentias magis immediatas suppositi argumentans, potius genuina videtur, quam altera expeditior, at remotiori consectario utens, et demonstrationem partis tertiae imitans. Caeterum, si haec altera demonstratio eo tantum consilio adhibetur, quod inscriptio indicat, nempe ut ostendatur, homologa esse illa triangula, nihil opus erat verbis in Ed. Oxon. ad finem additis, quae in variantibus notavimus: sin autem tertia quoque propositionis pars, nempe, similia polygona esse in ratione duplicata laterum homologorum inde derivanda sint, sunt illa omnino necessaria.

Obs. 3. Circa corollaria huic propositioni addita obser-

τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ α.

Ὡσαύτως δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ β.

Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ, ΖΗ τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ, ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ὁμόλογος

vat Austin., quemvis lectorem videre, vocem polygoni hic adhiberi de quavis figura rectilinea, quae plura quam tria latera habeat, unde nihil opus sit taediosis his corollariis, quae in ipsa propositione contenta sint. Verum enim vero, praeterquam quod vox πολύγωνον vel πολύπλευρον ita alio sensu sumenda foret, ac in I. Def. 23. eaedem etiam rationes, quas in Obs. 6. ad VI. 19. vidimus, corollarii secundi enunciatum

latus homologum AB habet ad ZH latus homologum; similia enim triangula in duplicata ratione sunt (VI. 19.) laterum homologorum; ergo et polygonum $AB\Gamma\Delta E$ ad polygonum $ZH\Theta K\Lambda$ duplicatam rationem habet eius quam homologum latus AB ad homologum latus ZH. Ergo similia etc.

COROLLARIUM I.

Similiter et in similibus quadrilateris ostendetur, ea in duplicata ratione esse laterum homologorum. Ostensum autem est et in triangulis (VI. 19.); quare et universe similes rectilineae figurae inter se in duplicata ratione sunt laterum homologorum.

COROLLARIUM II.

Et si ipsis AB, ZH tertiam proportionalem sumamus quae sit Ξ, AB ad Ξ duplicatam rationem habet (V. 10. Def.) eius quam AB ad ZH. Habet autem et polygonum ad polygonum, et quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam rationem eius quam homologum

tuentur. Praeterea observat Austin. in corollario hoc secundo primum occurrere vocem εἶδος, quum alias Euclides, qui a recepta semel dicendi forma recedere non soleat, voce σχῆμα utatur, ut in I. Def. 14. ad indicandum spatium terminis circumscriptum. Nec vocem εἶδος apud Euclidem recurrere, nisi in demonstratione VI. 25., ubi hoc ipsum corollarium modo minus necessario in usum vocetur, et in Prop. VI. 27; VI.

πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΖΗ· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων ὥςτε καὶ καθόλου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον

ΑΛΛΩΣ.

Δείξομεν δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ καὶ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΘΚΛ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ. Πάλιν,

28.; VI. 29; VI. 30.; VI. 31., quae hoc ipso nomine suspecta videantur. Nec omnino consequi hoc corollarium ita generaliter expressum ex propositione, in qua sermo sit tantum de figuris rectilineis aut polygonis, non de quibuscunque spatii speciebus aut figuris. — Forte tamen non sine ratione responderi possit, ad vocem εἶδος subintelligendam esse vocem πολύπλευρον, vel πολύγωνον ex antecedentibus facile supponendam, et id ipsum, quod corollarium non de figura quacunque ex propositione consequatur, Euclidi causae fuisse, cur generaliore voce σχῆμα hic uti nollet.

atus ad homologum latus, hoc est AB ad ZH; ostensum est autem hoc et in triangulis; quare et universe manifestum est, si tres rectae proportionales sint, ut prima ad tertiam ita futuram esse figuram a prima ad figuram a secunda, similem et similiter descriptam.

ALITER.

Ostendemus etiam aliter expeditius homologa esse triangula.

Exponantur enim rursus polygona $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$, et iungantur BE, $E\Gamma$, $H\Lambda$, $\Lambda\Theta$; dico esse ut triangulum ABE ad $ZH\Lambda$ ita $EB\Gamma$ ad $\Lambda H\Theta$ et $\Gamma\Delta E$ ad $\Theta K\Lambda$.

Quoniam enim simile est triangulum ABE triangulo $ZH\Lambda$, triangulum ABE ad triangulum $ZH\Lambda$ duplicatam rationem habet (VI. 19.) eius quam BE ad $H\Lambda$. Ex eadem ratione et triangulum $BE\Gamma$ ad triangulum $H\Lambda\Theta$ duplicatam rationem habet eius quam BE ad $H\Lambda$; est igitur (V. 11.) ut triangulum ABE ad triangulum $ZH\Lambda$ ita $EB\Gamma$ ad $\Lambda H\Theta$. Rursus, quoniam

Obs. 4. Patet etiam, polygona similia, quorum homologa latera sunt inter se aequalia, esse quoque aequalia inter se. Nempe, quum ratio homologorum laterum sit (supp.) ratio aequalitatis, ratio duplicata laterum homologorum pariter erit ratio aequalitatis (V. 22. Cor.) i. e. ratio polygonorum similium super homologis istis lateribus descriptorum erit ratio aequalitatis, adeoque polygona aequalia. Et contra, si polygona similia fuerint aequalia, vel rationem aequalitatis habeant, ratio subduplicata eorum, h. e. ratio laterum homologorum etiam erit ratio aequalitatis (Cor. ad Prop. m. in Excursu ad

ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ· τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΛΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΛ ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ [1]. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶν ὅμοιον.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιόν τε ἐστιν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς

1) Edd. Basil. et Oxon. addunt: καὶ ὡς ἄρα (V. 12.) ἑ τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν τῇ προτάσει δείξει. De hac lectione vide infra, quae ad hanc Propos. observavimus.

Libr. V.) i. e. latera homologa erunt aequalia. (Quod posterius est Lemma ad VI. 22.) Cf. Obs. 5. ad VI. 19. Borellus

imile est triangulum *EBΓ* triangulo *ΛHΘ*; *EBΓ* gitur (VI. 19.) ad *ΛHΘ* duplicatam rationem habet eius quam *ΓE* recta ad *ΘΛ*. Ex eadem ratione et triangulum *EΓΔ* ad triangulum *ΛΘK* duplicatam rationem habet eius quam *ΓE* ad *ΘΛ*; est igitur (V. 11.) ut triangulum *EBΓ* ad *ΛHΘ* ita *EΓΔ* ad *ΛΘK*. Ostensum est autem et ut *EBΓ* ad *ΛHΘ* ita *ΛBE* ad *ZHΛ*; ergo ut *ΛBE* ad *ZHΛ* ita *BEΓ* ad *HΛΘ* et *EΓΔ* ad *ΛΘK*. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXI. (Fig. 379.)

Quae eidem rectilineo sunt similia, et inter se sunt similia.

Sit enim utrumque rectilineorum *A*, *B* ipsi *Γ* simile; dico et *A* ipsi *B* esse simile.

Quoniam enim est simile rectilineum *A* ipsi *Γ*, et aequiangulum est ipsi (VI. 1. Def.), et circa aequales angulos latera proportionalia habet. Rursus, quoniam simile est rectilineum *B* ipsi *Γ*, et aequiangulum est ipsi (VI. 1. Def.), et circa aequales angulos latera proportionalia habet; utrumque igitur ipsorum *A*, *B* ipsi *Γ* aequiangulum est et circa aequales angulos latera proportionalia habet, quare et rectilineum *A* ipsi *B*

Cor. 2. ad Prop. IV. 17. Pfleiderer. l. c. §. 299. Pariter, si polygonorum similium areae fuerint aequales, triangula quoque, quae diagonales homologae abscindunt, et similia et aequalia erunt. Cf. Pfleiderer. §. 298.

Obs. 5. Ut duo rectilinea *M*, *N* (triangulis quoque sub hac denominatione comprehensis) similia eam habeant rationem, quam latus aliquod *A* prioris habet ad rectam datam *Γ*,

ἀναλογον ἔχει [1]. Ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ, ΝΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ, τῶν δὲ ΕΖ, ΗΘ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ο. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν Ο· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ οὕτως τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

1) Verba haec ab ὥστε inde ad absolvendam demonstrationem prorsus necessaria, quae ex Cod. a. sine dubio tantum ex oscitantia librarii exciderant, omittit Peyrardus. Nos motem Euclidi solemnem secuti ea restituimus, ut sunt in Edd. Basil. et Oxon.

posterioris latus homologum debet esse media proportionalis

aequiangulum (I. Ax. 1.) et latera circum aequales ;ulos habet proportionalia (V. 11.). Simile igitur *A* ipsi *B* (VI. Def. 1.). Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXII. (Fig. 380.)

Si quatuor rectae proportionales sint, et quae ab iis fiunt rectilinea, similia et similiter descripta, pro-rtionalia erunt; et si, quae ab ipsis fiunt rectilinea nilia et similiter descripta proportionalia sint, et ipsae ctae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae proportionales *AB*, *ΓΔ*, *EZ*, *Θ*, ut *AB* ad *ΓΔ* ita *EZ* ad *HΘ*, et describantur) ipsis quidem *AB*, *ΓΔ* similia et similiter posita ctilinea *KAB*, *ΛΓΔ*, ab ipsis vero *EZ*, *HΘ* similia : similiter posita rectilinea *MZ*, *NΘ*; dico esse ut *AB* ad *ΛΓΔ* ita *MZ* ad *NΘ*.

Sumatur enim (VI. 11.) ipsis quidem *AB*, *ΓΔ* rtia proportionalis *Ξ*, ipsis vero *EZ*, *HΘ* tertia pro-ortionalis *O*. Et quoniam est ut *AB* quidem ad *ΓΔ* a *EZ* ad *HΘ*, ut *ΓΔ* vero ad *Ξ* ita (V. 11.) *MΘ* d *O*; ex aequo igitur est (V. 22.) ut *AB* ad *Ξ* ita *EZ* ad *O*. Sed (VI. 20. Cor. 2.) ut *AB* quidem ad *Ξ* ita *KAB* ad *ΛΓΔ*, ut *EZ* vero ad *O* ita *MZ* ad *NΘ*; ut igitur (V. 11.) *KAB* ad *ΛΓΔ* ita *MZ* ad *NΘ*.

iter latus illud *Λ*, et rectam datam *Γ*. Sit enim illa media roportionalis *B*, ita ut $A:B=B:\Gamma$, dico, latus illud homo-gum posterioris figurae esse $=B$. Quodsi enim non fuerit $=B$, sit illud alia recta quaecunque *Δ* diversa a B, sitque $A:\Delta=\Delta:E$, eritque $M:N=A:E$. At, quum ratio $A:\Delta$ iversa sit a ratione $A:B$, diversa quoque erit ratio $A:E$

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΑΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Γεγονέτω γὰρ [1]) ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῳ τῶν ΜΖ, ΝΘ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ, ΑΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΠΡ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΑΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΑΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· (καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ [2]) τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκατέρον τῶν ΝΘ, ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. Ἔστι δὲ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ ΗΘ τῇ ΠΡ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἑξῆς.

1) Loco verborum γεγονέτω γὰρ Peyrardus ex Cod. a habet: εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. ἔστω κ. τ. λ. At, quum ita indirecta demonstratio sequi debere videatur, Euclides autem directam habeat, praeferenda omnino videtur lectio Edd. Oxon. et Basil.

2) Voces uncis inclusas omittit Ed. Oxon. et possunt illae omnino abesse.

a ratione $A:\Gamma$ (Cor. ad Prop. m in Excursu ad Libr. V.). At utraque ratio $A:\Gamma$ (suppos.) et $A:B$ (demonstr.) sequalis est rationi $M:N$: itaque (V. 11.) etiam ratio $A:\Gamma$ eadem est

Sed sit ut KAB ad $\Lambda\Gamma\Delta$ ita MZ ad $N\Theta$; dico esse et ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad $H\Theta$.

Fiat enim (VI. 12.), ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad ΠP, et describatur (VI. 18.) a ΠP alterutri ipsorum MZ, $N\Theta$ simile et similiter positum rectilineum ΣP.

Et quoniam est ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad ΠP, et descripta sunt ab ipsis quidem AB, $\Gamma\Delta$, similia et similiter posita KAB, $\Lambda\Gamma\Delta$, ab ipsis vero EZ, ΠP, similia et similiter posita $M\Sigma$, ΣP; est igitur (per part. prior. hui.) ut KAB ad $\Lambda\Gamma\Delta$ ita MZ ad ΣP. Ponitur autem et ut KAB ad $\Lambda\Gamma\Delta$ ita MZ ad $N\Theta$; et ut igitur (V. 11.) MZ ad ΣP ita MZ ad $N\Theta$; ergo MZ (V. 11.) ad utrumque ipsorum $N\Theta$, ΣP eandem habet rationem; aequale igitur est (V. 9.) $N\Theta$ ipsi ΣP. Est autem ipsi simile et similiter positum; aequalis igitur (sequens Lemma) $H\Theta$ ipsi ΠP. Et quoniam est ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad ΠP, aequalis autem ΠP ipsi $H\Theta$; est igitur (V. 7.) ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad $H\Theta$. Si igitur quatuor etc.

rationi $A:E$, quod est absurdum. Latus igitur homologum posterioris figurae erit $=B$. Cf. Pfleiderer. §. 301.

Obs. 6. Hinc facile solvetur problema describendae figurae rectilineae similis datae figurae M', et quae ad hanc figuram M eandem rationem habeat, quam recta data Σ ad rectam datam Π. Sumatur nempe latus quodcunque A figurae M, et fiat $\Pi:\Sigma=A:\Gamma$ (VI. 12.). Inveniatur deinde rectis A, Γ media proportionalis B (VI. 11.), ut itaque sit $A:B=B:\Gamma$, et super recta B describatur (VI. 18.) figura similis et simi-

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ᾖ καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δείξομεν οὕτως.

Ἔστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΠ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ·

Εἰ γὰρ ἄνισοί εἰσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. Μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄνισοί ἐστιν ἡ ΠΡ τῆς ΗΘ, ἴση ἄρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν [1]).

1) Omnes quidem editiones legunt saltim: ἐκ τῶν πλευρῶν, nec Peyrardus aliam ex Codd. Mss. lectionem notavit. Quum tamen, ut recte monet Rob. Simson. in Not. ad VI. 23. p. 5[illegible] vulgaris lectio sit absurda, non dubitavimus illi aliam veneremem substituere.

liter posita figurae M, ita ut latera B, A, sint latera homologa, erit figura descripta, quam N vocabimus ea, quae describi iussa erat. Est enim $M:N=A:\Gamma=\Pi:\Sigma$, vel $N:M=\Sigma:\Pi$. Cf. Pfleiderer. §. 302. Nominatim eodem modo solvetur problema, triangulum datum per rectas designato eius latere parallelas dividendi in partes quotcunque aequales, vel etiam quae rationes invicem habeant aequales rationibus rectarum datarum. Cf. Pfleiderer. §. 303.

Obs. 7. Quum nominatim etiam quadrata super homo-

LEMMA.

Si autem rectilinea aequalia sint et similia, homoga ipsorum latera aequalia inter se esse, sic ostenmus.

Sint aequalia et similia rectilinea $N\Theta$, ΣP, et sit ΘH ad HN ita $P\Pi$ ad $\Pi\Sigma$; dico aequalem esse Π ipsi ΘH.

Si enim inaequales sint, una ipsarum maior est. t maior $P\Pi$ ipsa ΘH. Et quoniam est ut $P\Pi$ ad Σ ita ΘH ad HN, et alterne (V. 16.) ut $P\Pi$ ad H ita $\Pi\Sigma$ ad HN. Maior autem ΠP ipsa ΘH; aior igitur (Prop. A. libri V.) et $\Pi\Sigma$ ipsa HN; nare et (VI. 20.) $P\Sigma$ maius est ipso ΘN; sed et aeuale, quod fieri nequit; non igitur inaequalis est ΠP ›si $H\Theta$, aequalis igitur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXIII. (Fig. 381.)

Aequiangula parallelogramma inter se rationem haent compositam ex rationibus laterum.

›gis lateribus figurarum similium descripta sint in ratione duicata horum laterum patet, polygona similia quaecunque triangulis quoque et quadrilateris similibus sub hac denomiatione comprehensis Obs. 4. ad VI. 19.) esse in ratione quaratorum laterum homologorum.

PROPOSITIO XXI.

Obs. Potest haec propositio deduci ut corollarium Prop. 7I. 18. Ita est apud Borellum in Cor. ad Prop. 16. Libr. IV.

PROPOSITIO XXII.

Obs. 1. Propositi› haec derivari facile potest ex VI. 20. et ex Cor. V. 22. et Cor. Prop. m in Excursu ad Li r. V.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν [1]), τοῦ τε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ· καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

1) Hic quoque ex eadem ratione ac in ipsa propositione ex ingenio adiecimus vocem τῶν.

Lemma subsequens deductum est supra in Obs. 4. ad VI. 20. Aliter ac in textu graeco Boermannus, et accuratius, omissa etiam permutatione superflua, hoc lemma ita demonstrat. Si rectilinea $N\Theta$, ΣP sint similia et aequalia, latera quoque homologa $H\Theta$, ΠP aequalia erunt. Si enim non sint aequalia, alterutrum velut ΠP maius erit, unde, quum sit (VI. Def. 1.) $\Pi P : \Pi\Sigma = H\Theta : HN$, erit quoque $\Pi\Sigma > HN$ (V. 14.) adeoque triangulum $\Sigma\Pi P$ ipsi $NH\Theta$ impositum non congruet, sed maius erit (Cor. ad I. 14.). Est autem rectilin. ΣP : rectilin. $N\Theta$ = triang. $\Sigma\Pi P$: triang. $NH\Theta$ (VI. 20.) Itaque rectilin. $\Sigma P >$ rectilin. $N\Theta$ (Prop. A. libr. V.) contra hypothesin, ergo $\Pi P = H\Theta$.

Obs. 2. Prop. 22. etiam valet de quatuor figuris rectilineis, non binis solum, sed omnibus similibus. Speciatim quatuor rectarum quadrata sunt proportionalia et vicissim.

Sint aequiangula parallelogramma $\Delta\Gamma$, ΓZ, aequalem habentia angulum $B\Gamma\Delta$ angulo $E\Gamma H$; dico parallelogrammum $\Delta\Gamma$ ad parallelogrammum ΓZ rationem habere compositam ex rationibus laterum, nempe ex ea, quam habet $B\Gamma$ ad ΓH et ex ea quam habet $\Delta\Gamma$ ad ΓE.

Ponantur enim ita ut in directum sit $B\Gamma$ ipsi ΓH; in directum igitur est et $\Delta\Gamma$ ipsi ΓE (I. 14.); et compleatur parallelogrammum ΔH, et exponatur quaedam recta K, et fiat (VI. 12.) ut $B\Gamma$ ad ΓH ita K ad Λ, ut $\Delta\Gamma$ vero ad ΓE ita Λ ad M.

Rationes igitur ipsius K ad Λ et ipsius Λ ad M eaedem sunt quae rationes laterum, videlicet lateris $B\Gamma$ ad ΓH et ipsius $\Delta\Gamma$ ad ΓE. Sed ipsius K ad

PROPOSITIO XXIII.

Obs. 1. Sensus huius propositionis, ut ex demonstratione eius patet (collat. Excursu ad hunc librum §. 8.), hic est: cognitis laterum circa aequales parallelogrammorum aequiangulorum angulos rationibus mutuis, colligi ex iis posse rationem, quam areae parallelogrammorum invicem habeant. Vel rationem mutuam parallelogrammorum aequiangulorum pendere ab rationibus laterum ipsorum circa aequales angulos, et modum, quo illa ex his eliciatur, propositio haec docet. Demonstrationis enim momentum eo redit, ut, si vel ipsa parallelogrammorum circa aequales angulos latera, proinde et eorum rationes dentur, rectae, quarum rationes eaedem sint rationibus laterum binorum parallelogrammorum, ostendatur, duas quoque exhiberi posse rectas, quarum ratio mutua eadem sit rationi parallelogrammorum. Cf. Pfleiderer. l. c. P. IV. §. 195. Pfleiderer simul observat, cum propositio haec, pariter ac VI. 14. nonnisi iterata propositionis VI. 1. applicatione nitatur, et argumenti 14. coepti continuatio ac supplementum sit; transpo-

Ἀλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τῶν σιγκειμένον ἐκ τῶν τῶν, πλευρῶν [1]. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ· ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ· ἀλλ' ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον· δίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΑΓ

1) Hic quoque et pariter ad finem demonstrationis voces τῶν altera vice positam ex coniectura adiecimus.

sitione haud apta propositiones inter ad figuras similes pertinentes, nec ullo modo cum ipsa connexas, insertam fuisse videri. Caeterum ΑΓ et ΓΕ in directum fore, si ΒΓ, ΓΗ in directum ponantur, simili ratione ostendi potest ac in Obs. 2 ad VI. 14.

Obs. 2. Rationem, quae ex duabus datis rationibus per lineas rectas expressis componitur, dari, h. e. (Eucl. D. Def. 2.) ipsi aequalem lineis rectis exhiberi posse, eiusdem demonstratio Prop. VI. 23. idemque similiter ad plures, quas d. as rationes sic datas, ex iisque compositas extenditur. C. Pfleiderer. §. 212.

Obs. 3. Eaedem consequentiae, quae in demonstratione inde deducuntur, quod rationes ΒΓ : ΓΗ, et ΑΓ : ΓΕ dari sup-

M ratio componitur ex ratione ipsius K ad Λ et ex atione ipsius Λ ad M (Def. rationis compos.); quare t K ad M rationem habet compositam ex rationibus aterum. Et quoniam est (VI. 1.) ut ΒΓ ad ΓΗ ita ΑΓ parallelogrammum ad ΓΘ; sed ut ΒΓ ad ΓΗ ta K ad Λ; erit igitur (V. 11.) K ad Λ ita ΑΓ ad ΓΘ. Rursus, quoniam est (VI. 1.) ut ΔΓ ad ΓΕ ita ΓΘ parallelogrammum ad ΓΖ; sed, ut ΔΓ ad ΓΕ ta Λ ad M; erit ut igitur (V. 11.) Λ ad M ita parallelogrammum ΓΘ ad parallelogrammum ΓΖ. Quoniam igitur ostensum est, ut K quidem ad Λ ita parallelogrammum ΑΓ ad parallelogrammum ΓΘ, ut Λ vero ad M ita parallelogrammum ΓΘ ad parallelogrammum ΓΖ; ex aequo igitur est (V. 22.), ut K ad M ita parallelogrammum ΑΓ ad parallelogrammum ΓΖ. At vero K ad M rationem habet compositam ex rationibus laterum; et ΑΓ igitur ad ΓΖ rationem habet

ponuntur, nectuntur, si rationes solum posteriores (Prop. B. in Excursu ad Libr. V.) invertantur, et rationes ΒΓ : ΓΗ, et ΓΕ : ΔΓ dari ponantur. Tum nempe ob parallelogr.

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda\Gamma : \Gamma\Theta = B\Gamma : \Gamma H \\ Z\Gamma : \Gamma\Theta = \Gamma E : \Delta\Gamma \end{array}\right\} \text{(VI. 1.)}$$

simili ratione consequitur, dari rationem mutuam parallelogrammorum ΑΓ, ΖΓ, si utriusque ratio ad idem parallelogrammum ΓΘ detur. Cf. Pfleiderer. §. 213.

Obs. 4. Hac ipsa methodo Euclides praemissis propositionibus (Dat. 1. 2.): duarum magnitudinum homogenearum datarum dari rationem mutuam; et vicissim dari magnitudinem cuius ad datam magnitudinem ratio detur (si nempe, quod Rob. Simson. addit, duabus magnitudinibus, quibus haec ratio exprimitur, et magnitudini datae quartae proportionalis possit inveniri), generatim ostendit, duas magnitudines, quarum rationes ad eandem tertiam dentur, pariter mutuo habere

παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον· Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν. Τὰ ἄρα ἰσογώνια, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ

datam rationem in Dat. Prop. 8. (apud Rob. Simson. et Schwab. Prop. 9.). Cf. Pfleiderer. §. 214. Quo nixus principio Euclides deinde suam datorum tractationem absque rationum compositione instruit; nominatim Prop. 70. partem priorem (apud Rob. Simson. et Schwab. Prop. 67.) Elementorum VI. 23. respondentem demonstrat. Cf. Pfleiderer. §. 215.

Obs. 5. Quatenus ab modo rationem ex laterum $B\Gamma$, ΓH, $\Delta\Gamma$ ac ΓE rationibus compositam, lineis rectis datis exhibendi abstrahitur; demonstratio VI. 23. praeeunte Candalla eo redigi potest, ut observetur: rationem parallelogrammorum $\Delta\Gamma$, ΓZ componi ex rationibus parallelogrammi $\Delta\Gamma$ ad $\Gamma\Theta$, et

:omposítam ex rationibus laterum. Ergo aequiangula, etc.

PROPOSITIO XXIV. (Fig. 383.)

Omnis parallelogrammi, quae circa diametrum sunt parallelogramma similia sunt et toti inter se.

Sit parallelogrammum $AB\Gamma\Delta$, diameter autem eius recta $A\Gamma$, circa $A\Gamma$ autem parallelogramma sint EH, ΘK; dico utrumque parallelogrammorum EH, ΘK simile esse toti $AB\Gamma\Delta$ et inter se.

Quoniam enim uni laterum trianguli $AB\Gamma$ videlicet ipsi $B\Gamma$ parallela ducta est EZ, erit (VI. 2.) ut BE ad EA ita ΓZ ad ZA. Rursus, quoniam uni lateri trianguli $A\Gamma\Delta$ nempe ipsi $\Gamma\Delta$ parallela ducta est ZH, erit (VI. 2.) ut ΓZ ad ZA ita ΔH ad HA. Sed ut ΓZ ad ZA ita ostensa est et BE ad EA;

huius ad ΓZ (Exc. ad hunc libr. §. 3. nr. 1.) quae eaedem sint rationibus laterum ipsorum $B\Gamma : \Gamma H$, $\Delta\Gamma : \Gamma E$ (VI. 1.); itaque etiam dici ex his componi (Exc. ad hunc libr. §. 3. nr. 2.). Cf. Clavius et Rob. Simson. Pfleiderer. §. 216.

Obs. 6. Quodsi desideratur, ut ratio parallelogrammorum $A\Gamma$, ΓZ (Fig. 382.) seu composita ex rationibus laterum eorum, exhibeatur per rationem quam ipsum prioris latus alterutrum $B\Gamma$ habeat ad aliquam rectam datam; hàec erit quarta proportionalis duobus reliquis parallelogrammorum lateribus $\Delta\Gamma$, ΓE, et lateri ΓH posterioris ΓZ, quod respondet lateri $B\Gamma$ prioris $A\Gamma$.

Ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συντεθέντι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΓΒ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστιν. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ἔτι

Facta enim (VI. 12.) $\Delta\Gamma : \Gamma E = \Gamma H : I$

erunt parallelogr. $\Delta\Gamma : \Gamma\Theta = B\Gamma : \Gamma H$ (VI. 1.)

$\Gamma\Theta : \Gamma Z = \Delta\Gamma : \Gamma E$ (VI. 1.) $= \Gamma H : I$ (V. 11.)

proinde $\Delta\Gamma : \Gamma Z = B\Gamma : I$ (V. 22.). Cf. Pfleiderer. §. 217.

Obs. 7. Si ab recta ΓB (producta, quando opus est) abscinditur $\Gamma N = I$ (Fig. 382.) (quod iuxta Obs. 4. ad VI. 2.) immediate fit, diagonali ΔH parallelam EN agendo per punctum E) ac per N ducitur rectae $\Delta\Gamma$ parallela: fit parallelogrammum $\Gamma O = \Gamma Z$ (VI. 14.), et hinc

$$\Delta\Gamma : \Gamma Z = \Delta\Gamma : \Gamma O \text{ (V. 7.) } B\Gamma : \begin{cases} \Gamma N \\ I \end{cases} \text{ (VI. 1.)}$$

rgo (V. 11.) ut *BE* ad *EA* ita *ΔH* ad *HA*; et componendo (V. 18.), ut *BA* ad *AE* ita *ΔA* ad *AH*, et lterne (V. 16.) ut *BA* ad *AΔ* ita *EA* ad *AH*; p - allelogrammorum igitur *ABΓΔ*, *EH* proportionali unt latera, quae circa communem angulum *BAΔ* unt. Et quoniam parallela est *HZ* ipsi *ΔΓ*, aequa- s est angulus *AHZ* angulo *AΔΓ* (I. 29.), angulus ero *HZA* angulo *ΔΓA*, et communis duobus trian- ulis *AΔΓ*, *AHZ* angulus *ΔAΓ*; aequiangulum igi- ur est triangulum *AΔΓ* triangulo *AHZ*. Ex eadem atione et triangulum *AΓB* aequiangulum est trian- ulo *AZE*; totum igitur parallelogrammum *ABΓΔ* parallelogrammo *EH* aequiangulum est; ergo (VI. 4.) ut *AΔ* ad *ΔΓ* ita *AH* ad *HZ*. Ut autem *ΔΓ* ad *ΓA* ita *HZ* ad *ZA*, ut *AΓ* vero ad *ΓB* ita *AZ* ad *ZE*, et insuper ut *ΓB* ad *BA* ita *ZE* ad *ZA*: itaque quoniam ostensum est ut *ΔΓ* ad *ΓA* ita *HZ* ad *ZA*, ut vero *AΓ* ad *ΓB* ita *AZ* ad *ZE*; ex aequo igitur est (V. 22.) ut *ΔΓ* ad *BΓ* ita *HZ* ad *ZE*. Parallelogrammorum igitur *ABΓΔ*, *EH* proportio-

Quare sic etiam potest Prop. VI. 23. enunciari: si parallelogramma *AΓ*, *ΓZ* sint aequiangula; fiatque, ut unum latus *ΔΓ* prioris ad unum latus *ΓE* posterioris, sic huius alterum latus *ΓH* ad rectam *I*: erit parallelogrammum *AΓ* ad *ΓZ*, ut alterum latus *BΓ* prioris ad hanc rectam *I*. Cf. Pfleiderer. §§. 218. 219. Unde, data ratione parallelogrammi *AΓ* ad *ΓZ* datur ratio lateris *BΓ* prioris ad rectam *I*; estque, ut unum latus *ΔΓ* prioris parallelogrammi *AΓ* ad unum latus *ΓE* posterioris *ΓZ*, sic huius alterum latus *ΓH* ad hanc rectam *I*, ad quam alterum parallelogrammi prioris *AΓ* latus *BΓ* habet datam rationem mutuam parallelogrammorum *AΓ*, *ΓZ*. Quae

ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ ἴσον, τὸ Δ· δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

est Dator. Prop. 56. (apud Rob. Simson. et Schwab. pr. prior 63.). Cf. Pfleiderer. §. 220.

Obs. 8. Triangula quoque unum angulum aequalem habentia sunt in ratione composita ex rationibus laterum circa aequales angulos. Quod ipsum vel immediate simili ratione demonstrari potest ac VI. 23. vel ex VI. 23. ope I. 34. V. 18 derivari. Cf. Pfleiderer. in sched. mss. §. 239. Commandin. Cor. ad VI. 23.

Obs. 9. Parallelogramma quaevis aequiangula sunt inter se ut parallelogramma rectangula sub iisdem respective latera

nalia sunt latera, quae circa aequales angulos; simile igitur est (VI. Def. 1.) parallelogrammum *ΑΒΓΔ* parallelogrammo *ΕΗ*. Ex eadem ratione et parallelogrammum *ΑΒΓΔ* parallelogrammo *ΘΚ* simile est; utrumque igitur parallelogrammorum *ΕΗ*, *ΘΚ* parallelogrammo *ΑΒΓΔ* simile est. Quae autem eidem rectilineo similia sunt, et inter se sunt similia (VI. 21.) ergo et parallelogrammum *ΕΗ* parallelogrammo *ΘΚ* simile est. Omnis igitur etc.

PROPOSITIO XXV. (Fig. 384.)

Dato rectilineo simile, et alteri dato aequale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere, *ΑΒΓ*, cui vero aequale, sit *Δ*; oportet igitur ipsi quidem *ΑΒΓ* simile, ipsi vero *Δ* aequale idem constituere.

bus comprehensa. Quod ipsum etiam fecit Pappus Collect. Mathem. Libr. VII. Prop. 172., seu in Apollon. Conic. I. Lemm. 8. Cf. Commandinus et Clavius ad VI. 23. et Pfleiderer. §§. 240. 241. Idem valet de triangulis, quorum unus angulus aequalis est (Cf. iidem, Pfleiderer. §. 242. et Pappus Libr. VII. Coll. Math. Prop. 146. vel in Porism. 1. Lemma 20.). Pappus addit (ibid. Prop. 147.) idem valere in triangulis, quorum unum angulum habet, qui deinceps est alteri. Pfleiderer. §. 243. Pappus rem ad praecedentem Prop. 146. reducit, dum unus latus eius anguli, qui in uno triangulo ae-

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ [1]) ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΕΜ. Καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέσον ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. Ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλλη-

1) Vox τριγώνῳ, τρίγωνον et similia proprie non huc pertinent, quum manifesto de figuris rectilineis quibuscumque sermo sit. Vid. observationem Rob. Simsonis ad hunc locum. Quum tamen illa in omnibus, qui hactenus comparati sunt, codicibus legantur, noluimus ea expungere.

qualis est angulo deinceps posito alterius trianguli, producit usquedum latus ita productum aequale sit ei ipsi, quod producebatur, lateri, ubi tum res facile patet. Poterat autem idem etiam aliis modis demonstrari.

Obs. 10. Pet. VI. 23. et Obs. 8. duo parallelogramma (triangula) rectangula, et hinc quaevis (I. 35. I. 37. V. 7. V.

Applicetur enim (I. 44. et 45.) ad rectam quidem $B\Gamma$ tri-
gulo $AB\Gamma$ aequale parallelogrammum BE, ad rectam
o ΓE ipsi Δ aequale parallelogrammum ΓM in an-
o $Z\Gamma E$, qui est aequalis angulo ΓBA; in directum
tur est (I. 14.) $B\Gamma$ quidem ipsi ΓZ, et AE
i EM. Et sumatur (VI. 13.) inter ipsas $B\Gamma$, ΓZ
dia proportionalis $H\Theta$, et describatur (VI. 18.) ex
Θ rectilineo $AB\Gamma$ simile et similiter positum recti-
eum $KH\Theta$.

Et quoniam est ut $B\Gamma$ ad $H\Theta$ ita $H\Theta$ ad ΓZ, si
tem tres rectae proportionales sint, est (VI. 20. Cor.
) ut prima ad tertiam ita figura ex prima ad figuram
secunda, similem et similiter descriptam; est igitur
$B\Gamma$ ad ΓZ ita triangulum $AB\Gamma$ ad triangulum
$H\Theta$. Sed et (VI. 1.) ut $B\Gamma$ ad ΓZ ita parallelo-
ammum BE ad parallelogrammum EZ; ut igitur
iangulum $AB\Gamma$ ad triangulum $KH\Theta$ ita parallelo-
grammum BE ad parallelogrammum EZ; alterne
itur (V. 16.) ut triangulum $AB\Gamma$ ad parallelogram-
um BE ita triangulum $KH\Theta$ ad parallelogrammum
Z. Aequale autem triangulum $AB\Gamma$ parallelogrammo
E; aequale igitur et triangulum $KH\Theta$ parallelo-

.) sunt in ratione composita ex rationibus basium et altitu-
num, quod et aliter demonstrari potest. Commandinus et
lavius ad VI. 23. Pfleiderer, §§. 247. 248. Cuiuslibet igitur
rallelogrammi ad quadratum aliquod ratio componitur ex
tionibus, quas basis et altitudo parallelogrammi habent ad
tus quadrati. Unde per Defin. Simson. (in Exc. ad h. libr.
3. coll. §. 7.) consequitur regula generalis dimensionis pa-
llelogrammorum. Cf. in Prop. II. 1. Cor. 4. Pfleiderer. §.
19. Schol. in libr. II. Elem. P. I. §. 5. sq.

Obs. 11. Ex VI. 23. indeque deductis Obs. 8. 10. per

λογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. Ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστὶν ἴσον. Ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον· τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνίσταται τὸ ΚΗΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ παραλληλογράμμου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ ΑΕΖΗ, ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΕΖΗ.

es, quae in Exc. ad hunc libr. §. 22. §. 25. notantur, consequuntur propositiones VI. 14. VI. 15. et Obs. 12. ad Prop. 16. 17. libr. VI. Pfleiderer. §. 250.

Obs. 12. Sint rectae A : B = C : D
et E : F = G : H
erunt etiam (per VI. 23. et Exc. ad hunc libr. §. 10.) rectangula A×E : B×F = C×G : D×H. Vicissim si A×E : B×F = C×G : D×H, atque E : F = G : H, pariter erit A : B = C : D (VI. 23. et in Exc. ad hunc libr. §. 14.). Cf. Pfleiderer §. 251.

Obs. 13. Per Obs. 10. et Exc. ad hunc libr. §. 13. duorum quorumvis parallelogrammorum, triangulorumve altitudines sunt in ratione composita ex directa arearum et inversa basium; bases in ratione composita ex directa arearum et inversa altitudinum. Pfleiderer. §. 263.

ammo *EZ*. Sed parallelogrammum *EZ* ipsi *Δ* est quale; et *KHΘ* igitur ipsi *Δ* est aequale. Est autem *KHΘ* et ipsi *ABΓ* simile; dato igitur rectilineo *ABΓ* simile, et alteri dato *Δ* aequale idem constitutum est *KHΘ*. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXVI. (Fig. 385.)

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur, simile toti et similiter positum, communem cum ipso angulum habens, circa eandem diametrum est circa quam totum.

A parallelogrammo enim *ABΓΔ* parallelogrammum auferatur *AEZH*, simile ipsi *ABΓΔ* et similiter positum, communem angulum habens *ΔAB* cum ipso; dico circa eandem diametrum esse *ABΓΔ* circa quam ipsum *AEZH*.

Obs. 14. Rursus (quae est altera Prop. 23. et praeced. Obs. 8. conversa), duo parallelogramma vel triangula, quorum areae sunt in ratione composita ex rationibus duorum laterum contiguorum, habent angulos lateribus his comprehensos vel angulos aequales, vel simul aequales duobus rectis. Quod ipsum facile, sumto contrario, probatur. Pfleiderer. §. 254.

PROPOSITIO XXIV.

Obs. 1. Rob. Simson. monet, videri imperitum quendam ex duabus diversis huius propositionis demonstrationibus hanc, quam nunc habemus, composuisse, ex una nempe, quae per VI. 2. et ex altera, quae per VI. 4. fieri potest. Postquam enim, ita pergit Simson., per VI. 2. et componendo, permutandoque ostenderat, latera circa communem angulum parallelogrammorum (talia enim parallelogramma observante

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔστω αὐτοῦ [1]) ἡ διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ [2]) ἐκβληθείσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τοῦ ΑΒΓΔ, ΕΗ, ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ [3]) περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΕΖΗ πα-

1) Ita recte ex Cod. a posuit Peyrardus, quum edd. Basil. et Oxon. haberent: αὐτῶν, quum tamen de diametro unius tantum parallelogrammi ΑΒΓΔ hic sermo sit.

2) Pro verbis: καὶ ἐκβληθείσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ, quae ex Cod. a. posuit Peyrardus, cum quibus consentit etiam versio Commandini, in edd. Oxon. et Basil. solum legitur: καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ. Utraque lectio bona habet, prout schema ita formatum imagineris, ut diametrum ΑΘΓ rectam ΗΖ productam, aut ipsam rectam ΗΖ in puncto aliquo Θ secet. Priorem casum et figuram lectio codicis, posteriorem lectio ed. Oxon. supponit.

3) Pro his verbis Cod. a. et ex eo Peyrardus, correctis mendis typographicis ad calcem libri indicatis, habet: οὐκ ἄρα οὐκ ἐστὶ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΠ (ita enim legendum est, non ΚΗ). Nos veriorem lectionem ex ed. Basil. et Oxon. restituimus.

Clavio intelliguntur, quae habeant unum angulum cum toto parallelogrammo communem, quod etiam Candalla, Henrion aliique nominatim addunt proportionalia esse, immediate concludere potuisset, proportionalia esse latera circa reliquos angulos aequales, ope scilicet Prop. I. 34. et V. 7. Verum ut

Non enim, sed si fieri potest, sit ipsius diameter $A\Theta\Gamma$, et ducta HZ producatur ad Θ, et ducatur per Θ alterutri ipsarum $A\Delta$, $B\Gamma$ parallela ΘK (I. 31.)

Quoniam igitur circa eandem diametrum est parallelogrammum $AB\Gamma\Delta$ circa quam parallelogrammum KH, simile est (VI. 24.) $AB\Gamma\Delta$ ipsi KH; est igitur (VI. Def. 1.) ut ΔA ad AB ita HA ad AK. Est autem et propter similitudinem ipsorum $AB\Gamma\Delta$, EH, ut ΔA ad AB ita HA ad AE; ut igitur (V. 11.) HA ad AK ita HA ad AE; ipsa HA igitur ad utramque ipsarum AK, AE eandem habet rationem; aequalis igitur est (V. 9.) AE ipsi AK, minor maiori, quod fieri nequit; non igitur est circa eandem diametrum parallelogrammum $AB\Gamma\Delta$ circa quam ipsum KH; circa eandem igitur est diametrum parallelogrammum

hoc negligens pergit ostendere, triangula et parallelogramma esse aequiangula, et longo circuitu, ope VI. 4. et V. 22. concludit rem eandem. Manifestum propterea est, hanc inscite factam demonstrationem minime Euclidis esse. Ipse deinde Rob. Simson., superfluis reiectis, simpliciorem exhibet demonstrationem, postquam ostenderat, aequiangula esse triangula AHZ, $A\Delta\Gamma$ ope VI. 4. I. 34. et V. 7., quoad maximam partem similem ei, quae est apud Campanum, nisi quod is pro VI. 4. adhibet VI. 2., et triangula, quae diximus, aequiangula esse monet quidem, at non demonstrat. Simsonis demonstrationem habet etiam Playfair. et Peletarius.

Obs. 2. Perspicuum est, quod Clavius monet, parallelogramma circa eandem diametrum non solum similia esse sed etiam similiter posita. Cf. observata ad VI. 18.

Obs. 3. Praeterea, eodem Clavio monente, etiam, si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam consistat parallelogrammum aliud, ita, ut duo huius latera recta duas

ραλληλογράμμῳ. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΓΕ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, τουτέστι τῆς ΓΒ· λέγω ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις

componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illis his sint parallela, eadem fere ratione ostenditur, hoc illi esse simile.

Obs. 4. Parallelogramma, quae unum angulum uni angulo aequalem, et circum eos proportionalia latera habent, similia sunt. Hoc Corollarium addit Boermannus. Et ope Obs. 3. ad Prop. 5. et 6. libri VI. et nostrae huius propositionis id facile probatur.

PROPOSITIO XXV.

Obs. 1. Rob. Simson. ad hanc propositionem monet: „liquido patet demonstrationem huius, quam Euclides dederat, vitiatam fuisse ab editore quodam geometriae minus perito. Postquam enim ostenderat, „ut rectilineum *ABΓ* ad rectilineum *KHΘ*, ita parallelogrammum *BE* ad parallelogrammum *EZ*" opus fuit

ΔΒΓΔ quam parallelogrammum ΑΕΖΗ. Si igitur a parallelogrammo etc.

PROPOSITIO XXVII. *) (Fig. 386.)

Omnium secundum eandem rectam applicatorum parallelogrammorum et deficientium figuris parallelogrammis, similibus et similiter positis ei, quae ex dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum parallelogrammum, simile existens defectui.

Sit recta ΑΒ et secetur bifariam in Γ, et applicetur ad rectam ΑΒ parallelogrammum ΑΔ deficiens figura parallelogramma ΓΕ, simili et similiter posita ei, quae ex dimidia ipsius ΑΒ descripta est, hoc est ex ΓΒ; dico omnium secundum ΑΒ applicatorum parallelogrammorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ipsi ΓΕ, maximum esse ΑΔ. Applicetur enim ad rectam ΑΒ parallelogram-

*) Ut sequentes tres propositiones melius intelligantur Rob. Simson. praemittit sequentia: 1) Parallelogrammum ad rectam applicari dicitur, quando super recta illa describitur. Ex. gr. parallelogrammum ΑΘ (Fig. 386.) applicari dicitur, ad rectam ΑΒ, quando super ΑΒ describitur. (Hoc casu dicitur Pfleiderero monente: ἀναγράφεσθαι seu παραβάλλεσθαι ἀπὸ τῆς ΑΒ. 2) Sed parallelogrammum ΑΖ dicitur applicari ad (secundum) rectam ΑΒ (παραβάλλεσθαι παρὰ τὴν ΑΒ) deficiens figura parallelogramma, quando ΑΚ basis eius minor est recta ΑΒ, et propterea parallelogrammum ΑΖ deficit ab ipso ΑΘ, quod super recta ΑΒ describitur in eodem angulo, et inter easdem parallelas figura parallelogramma ΚΘ, quae quidem dicitur defectus ipsius ΑΖ. 3) Et parallelogrammum ΑΞ (Fig. 293.) applicari dicitur ad (secundum) rectam ΑΒ (παραβάλλεσθαι παρὰ τὴν ΑΒ), excedens figura parallelogramma, quando ΑΟ basis ipsius ΑΞ maior est recta ΑΒ, et propterea ΑΞ excedit parallelogrammum ΑΠ ad ΑΒ applicatam figura parallelogramma ΠΟ.

solummodo addere, est autem rectilineum ΑΒΓ aequale pa-

τῷ ΓΕ, μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΚΘ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΓΕ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον. Ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ κατεγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον· ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση ἐστὶν· καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΛΜΝ γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν. [1])

1) Ed. Basil. hic iam addit: πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων, καὶ τὰ ἑξῆς, quae Gregorius, quamvis ea in omnibus codicibus tam mss. quam impressis invenire, iure ad casus secundi finem reiecit, quem etiam Peyrardus, nulla tamen lectionis variantis mentione facta, secutus est.

rallelogrammo *BE*, aequale igitur est rectilineum *KΠΘ* parallelogrammo *EZ*" videlicet per V. 14, sed inter has duas sententias interposuit „quare alterne, ut rectilineum *ΑΒΓ* ad parallelogrammum *BE* ita rectilineum K*HΘ* ad parallelogrammum *EZ*" putavit scilicet, non tam perspicuum esse concludere secundam quatuor proportionalium quartae aequalem esse ex aequalitate primae et tertiae, quod quidem demonstratum est in V. Prop. 14. quam concludere, tertiam aequalem esse quartae ex aequalitate primae et secundae, quod nuspiam in Elementis, quae iam habemus, ostensum est. Verum quamvis haec propositio, tertiam scilicet quatuor proportionalium aequalem esse quartae, si

imile. Sed $H\Theta$ ipsi $E\Lambda$ est simile; et MN igitur
21.) ipsi $E\Lambda$ simile est; circa eandem igitur (VI.
diametrum est ipsum $E\Lambda$ circa quam MN. Du-
r eorum diameter $Z\Xi$, et describatur figura.
Et quoniam aequale est $H\Theta$ ipsis $E\Lambda$, Γ, sed $H\Theta$
MN aequale est; et MN igitur ipsis $E\Lambda$, Γ

erenda fuerit, quod in schemate casus secundi non eaedem
rae Alphabeti adhibitae fuerunt, quae in schemete primi
is, quod utique, ut Rob. Simsòn notat, fieri debebat. Quo
o haec foret demonstratio.

*Εστω πάλιν ἡ ΑΒ τμηθεῖσα
ι κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβλη-
παρὰ τὴν ΑΒ τὸ ΑΔ, ἐλ-
πον εἴδει τῷ ΓΕ, καὶ παρα-
βλήσθω πάλιν παρὰ τὴν ΑΒ
ΑΖ παραλληλόγραμμον ἐλ-
πον τῷ ΚΘ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως
μένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς
Β τῷ ΓΕ· λέγω, ὅτι μεῖζόν
τι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παρα-
βληθὲν τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ. Ἐπεὶ
ρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΕ τῷ ΚΘ,
περὶ αὐτήν εἰσι διάμετρον. Ἔστω
ὐτῶν διάμετρος ἡ ΖΒ, καὶ κα-
ιγεγράφθω τὸ σχῆμα. Καὶ ἐπεὶ
ον ἐστὶ τὸ ΔΘ τῷ ΔΗ, ἐπεὶ
αὶ ἡ ΘΝ τῇ ΗΝ· μεῖζον ἄρα
ὸ ΔΘ τοῦ ΟΖ. Ἴσον δὲ τὸ
ΔΘ τῷ ΔΚ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ
ΔΚ τοῦ ΟΖ. Κοινὸν προσκείσθω
ὸ ΟΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΔ ὅλου
οῦ ΑΖ μεῖζόν ἐστιν.*

Sit rursus (f. 388.) AB secta bifariam in Γ, et applicatum sit ad AB parallelogrammum $A\Delta$, deficiens figura ΓE, et applicetur rursus ad AB parallelogrammum AZ deficiens figura $K\Theta$ simili et similiter posita ei, quae ex dimidia AB descripta est, nempe ΓE: dico, maius esse parallelogrammum, quod ad dimidiam applicatur, nempe $A\Delta$, parallelogrammo AZ. Quoniam enim simile est ΓE ipsi $K\Theta$, circa eandem diametrum sunt: sit eorum diameter ZB, et descibatur figura. Et, quoniam aequale est $\Delta\Theta$ ipsi ΔH, etenim et ΘN aequalis est ipsi HN; maius igitur $\Delta\Theta$ ipso OZ. Aequale autem $\Delta\Theta$ ipsi ΔK: maius igitur et ΔK ipso OZ. Commune addatur OK: totum igitur $A\Delta$ toto AZ maius est.

Ἔστω γὰρ πάλιν ἡ ΑΒ τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβληθὲν τὸ ΑΔ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΓΜ, καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν ΑΒ τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον τῷ ΔΖ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, τῷ ΓΜ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ ΑΔ τοῦ ΑΕ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔΖ τῷ ΓΜ, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΖ τῷ ΔΘ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ΔΖ τοῦ ΚΕ. Ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ ΔΛ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΕΚ. Κοινὸν προσκείσθω [1]) τὸ ΚΔ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΔ ὅλου τοῦ ΑΕ μεῖζόν ἐστιν. Πάντων ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παρα-

1) Ita rectius omnino Peyrardus ex Cod. a. habet, quam ut vulgo legitur: κοινὸν ἔστω τὸ ΚΔ.

percipiant. Praeterea, quamvis rectilineum ΑΒΓ, cui simile aciendum est, possit esse cuiuscunque generis, in demonstratione tamen graeci codices habent triangulum vice rectilinei, qui error correctus est in versionis Commandini editione, quae Oxonii impressa est." Huic Simsonis observationi addi potest, Campani quoque duplicem demonstrationem differre a demon-

Sit enim rursus AB secta bifariam in Γ; et applicatum sit ΔA, deficiens figura ΓM; et applicetur rursus secundum AB parallelogrammum AE, deficiens figura ΔZ, simili et similiter posita ei, quae ex dimidia ΓB describitur, nempe ΓM, dico maius esse parallelogrammum, quod ad dimidiam applicatur, nempe ΔA parallelogrammo AE.

Quoniam enim simile est ΔZ ipsi ΓM, circa eandem sunt diametrum (VI. 26.); sit eorum diameter ΓB, et describatur figura.

Et quoniam (I. 36.) aequale est ΔZ ipsi $\Delta\Theta$, etenim et ZH aequalis est ipsi $H\Theta$; maius igitur ΔZ ipso KE. Aequale autem ΔZ ipsi ΔA (I. 43.); maius igitur est ΔA ipso EK. Commune addatur $K\Delta$; totum igitur ΔA toto AE maius est. Omnium igitur etc.

PROPOSITIO XXVIII. (Fig. 390.)

Secundum datam rectam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma simili alteri dato; oportet autem datum rectilineum, cui aequale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existenti-

stratione sextus graeci. In eorum priore sine permutatione proportionalium res refertur ad partem posteriorem V. 9. in posteriore permutatio proportionalium pariter adhibetur.

Obs. 2. Pfleiderer. in schedis mss. §. 308 monet, inepte inter VI. 24. eiusque conversam VI. 26. insertam esse hanc VI. 25. quae nullam ad illas habeat relationem, contra immediate nitatur VI. 20. Apud Campanum id vitium non reperitur, quum, quae vulgo sunt VI. 24., VI. 26. sint apud ipsum

βαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμάτων τοῦ τ
ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθ
εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν,
τὸ Γ, μὴ μεῖζον ὂν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλ-
λομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, ᾧ δε
ὅμοιον ἐλλείπειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσα
εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσ
παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει π
ραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, κ
ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμο
κείμενον τὸ ΕΒΖΗ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ
παραλληλόγραμμον· τὸ δὲ ΑΗ ἤτοι ἴσον ἐστὶ τ
ἢ μεῖζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ὁρισμόν. Εἰ μὲν οὖν
ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· π
ραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν
τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγρ
μον τὸ ΑΗ, ἐλλεῖπον εἰδει παραλληλογράμμῳ τῷ

VI. 22., VI. 23., nostra haec autem pariter VI. 25. Quae
tem vulgo est VI. 23. apud Campanum est VI. 24.

Obs. 3. Huc referri potest problema, quod est
Thom. Simpson 14. libri VI., quo iubetur describi figura
lis datae figurae rectilineae, quae ad aliam datam figuram
lineam sit in ratione data.

PROPOSITIO XXVI.

Obs. 1. Si quis sumere velit, dari posse rectam
quae non transeat per punctum Z, necessario is ponere
rectam HZ ipsam aut productam convenire in puncto
Θ cum recta ΑΘΓ. Quoniam enim, ob angul. ΑΗΖ=Α
(supp.) recta HZ parallela est rectae ΔΓ (I. 28.) et ΔΓ

s defectu eius, quod ad dimidiam et parallelogrammo, i oportet simile deficere [1]).

Sit data quidem recta AB, datum vero rectilineum, ii oportet aequale ad AB applicare, sit Γ, non ma- s existens eo, quod ad dimidiam applicatum est si- ilibus existentibus defectibus, cui autem oportet mile deficere, sit Δ; oportet secundum datam rectam AB dato rectilineo Γ aequale parallelogrammum ap- licare, deficiens figura parallelogramma, quae simil s it ipsi Δ.

Secetur AB (I. 10.) bifariam in puncto E, et de- cribatur ex ipsa EB (VI. 18.) ipsi Δ simile et simi- iter positum $EBZH$, et compleatur parallelogrammum AH; itaque AH vel aequale est ipsi Γ, vel maius ipso, ob determinationem. Et si quidem aequale est AH ipsi Γ, factum erit propositum; applicatum erit enim secundum datam rectam AB dato rectilineo Γ aequale parallelogrammum AH, deficiens figura paral- lelogramma EZ ipsi Δ simili. Si autem non, maius

1) Ad finem huius propositionis in versione latina prae- eunte Boermanno paululum recessimus a textu graeco, quo ve- rius rem ipsam exprimeremus. Neque enim de duobus defec- tibus sermo esse potest, quorum alter pertineret ad parallelo- grammum illud, cui oportet simile deficere. Itaque graeca quoque ita habere debebant: ὁμοίων ὄντων τοῦ τε ἐλλείματος τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ (εἴδους) ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν. Caeterum, monente Pfleiderero propositio haec ita etiam po- test exprimi: datae figurae rectilineae aequale describere pa- rallelogrammum sub angulo dato, cuius unum latus circa hunc angulum sit segmentum rectae datae, alterum vero latus habeat rationem datam ad reliquum segmentum rectae datae: dum- modo figura rectilinea data maior non sit parallelogrammo sub eodem angulo dato, cuius unum latus circa hunc angulum est semissis rectae datae, alterum vero ad semissem rectae datae, seu ad prius eius latus habet eandem rationem datam.

rectam $A\Theta\Gamma$ in Γ (supp.), etiam HZ ipsa vel producta eandem

ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. Εἰ δὲ οὔ, μεῖζόν ἐστι τὸ ΘΕ τοῦ Γ. Ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. Ὡι δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. Ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἐστὶν ὅμοιον. Ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ μεῖζον ἄρα ἐστὶ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μεῖζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΛΚ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. Κείσθω τῇ μὲν ΚΛ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ὅμοιον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΚΜ τὸ ΗΠ. Ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστι· καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ διαγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ ΗΠ τῷ ΚΜ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΦΧ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΠ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΓΦ γνώμονί ἐστιν ἴσον. Ἀλλὰ ὁ ΥΦΧ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ ΑΠ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον πα-

ΑΘΓ secabit in puncto aliquo Θ (I. 29. Cor. 3.). Hinc propter duo casus distingui debere videntur, prout punctum Θ in ipsa

ΘE ipso *Γ*. Aequale autem *ΘE* ipsi *HB*; ius igitur et *HB* ipso *Γ*. Quo autem maius est *B* ipso *Γ*, ei excessui aequale, ipsi autem *Δ* sile et similiter positum idem constituatur *KΛMN* I. 25.). Sed *Δ* ipsi *HB* est simile; et *KM* igitur ıi *HB* est simile. Sit igitur homologa quidem *KΛ* ıi *HE*, *ΛM* vero ipsi *HZ*. Et quoniam aequale : *HB* ipsis *Γ*, *KM*, maius igitur est *HB* ipso *KM*; ıior igitur est et *HE* ipsa *ΛK* (VI. 20. Cor. 1.), *Z* vero ipsa *ΛM*. Ponatur (I. 3.) ipsi quidem *KΛ* qualis *HΞ*, ipsi vero *ΛM* aequalis *HΘ*, et compleır parallelogrammum *ΞHOΠ*; aequale igitur et sile est ipsi *KM* ipsum *HΠ* (VI. 24.). Sed *KM* si *HB* simile est; et *HΠ* igitur ipsi *HB* simile est: rca eandem igitur diametrum est *HΠ*, circa quam *IB* (VI. 26.). Sit eorum diameter *HΠB*, et descriıtur figura.

Et quoniam aequale est *BH* ipsis *Γ*, *KM*, quorum *HΠ* ipsi *KM* est aequale; reliquus igitur *ΥΦX* gnoıon reliquo *Γ* est aequalis. Et quoniam (I. 43.) aeuale est *OP* ipsi *ΞΣ*, commune apponatur *ΠB*; toım igitur *OB* toti *ΞB* aequale est. Sed *ΞB* ipsi *TE* st aequale (I. 36.), quoniam et latus *AE* lateri *EB* st aequale; et *TE* ipsi *OB* est aequale. Commune pponatur *ΞΣ*; totum igitur *TΣ* toti gnomoni *ΥΦX* st aequale. Sed gnomon *ΥΦX* ipsi *Γ* ostensus est equalis; et *ΔΠ* igitur ipsi *Γ* est aequale.

Secundum datam igitur rectam *AB* dato rectilineo Γ aequale parallelogrammum applicatum est *ΣT*, de-

ecta *HZ*, vel in ea producta poni sumas. Atque haec ipsa causa uisse videtur lectionis variantis, quam ad hunc locum obser-

τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ, ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ· τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον

patet, esse etiam $AK = B\pi$, adeoque $AK + A\pi = AB$. Cl. Whiston. Cor. 2. ad VI. 27.

PROPOSITIO XXVIII.

Obs. 1. Ex iis, quae in Obs. 4. ad VI. 27. dicta sunt, emergit casu secundo alia adhuc huius problematis solutio. Factis nempe, ut ante (Fig. 391.) parallelogrammis $EBZH$, $AEH\Theta$ dato Δ similibus, producatur ipsius $EBZH$ latus EH, et diameter BH, fiatque in angulo ipsi EHZ ad verticem opposito parallelogrammum $H o \pi \xi$ aequale ipsi $KAMN$ i. e. aequale excessui parallelogrammi $EBZH$ super figuram Γ, ipsique $EBZH$ simile, similiterque positum. Erit itaque $H\pi$ simile et aequale HH in constructione priori, et productis rectis $\pi\xi$, $A\Theta$, usquedum in γ, pariterque rectis $\pi\xi$, BZ, usquedum in ρ conveniant, ob $E\sigma = H o = AM = HO$ (constr.) $= E\Sigma$, et

:iens figura parallelogramma ΠB simili existenti ipsi , quandoquidem ΠB ipsi $H\Pi$ simile est. Quod ›ortebat facere.

PROPOSITIO XXIX. (Fig. 393.)

Secundam datam rectam dato rectilineo aequale pa-allelogrammum applicare, excedens figura parallelo-ramma simili datae.

Sit data recta AB, datum vero rectilineum Γ, cui ›portet aequale secundum AB applicare, Δ autem cui ›portet simile applicare; oportet igitur secundum AB ›ectam ipsi Γ rectilineo aequale parallelogrammum ap-plicare, excedens figura parallelogramma simili ipsi Δ.

Secetur AB bifariam in E (I. 9.), et describatur ex EB (VI. 18.) ipsi Δ simile et similiter positum parallelogrammum BZ, et utrisque simul quidem BZ, Γ aequale, ipsi vero Δ simile et similiter positum idem constituatur $H\Theta$ (VI. 25.); simile igitur est $H\Theta$ ipsi $E\Delta$. Homologa autem sit $K\Theta$ quidem ipsi $Z\Delta$, KH vero ipsi ZE. Et quoniam maius est, parallelogram-mum $H\Theta$ ipso ZB, maior igitur est et recta quidem $K\Theta$ ipsa $Z\Delta$, recta vero KH ipsa ZE. Producantur $Z\Delta$, ZE, et ipsi quidem $K\Theta$ aequalis sit $Z\Delta M$ (I. 3.), ipsi vero KH aequalis ZEN et compleatur pa-rallelogrammum MN; ergo MN ipsi $H\Theta$ aequale est

intersectionis cum alterutra harum rectarum sumi potest, adeo-que in ea ipsa positum est. Atque ita rem expedit Clavius.

Obs. 2. In conditionibus Theorematis, ut monet Clavius, haud negligi debet ea, parallelogramma non tantum similia,

καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. Ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἐν ἄρα τοῖς, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΛΛΛΩΣ.

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἄρα εἶδος

etam AB ita dividere, ut rectangulum inter segmenta eius contentum aequale sit dato spatio: hoc spatium autem oportet non maius esse quadrato ex linea dimidia. Ita Playfair. rem exprimit, qui hunc modo casum particularem huius problematis, utpote maxime necessarium exprimit. Aliter problema ita enunciari potest: data summa AB laterum trianguli, et rectangulo ipso magnitudine dato, latera invenire. Vid. Rob. Simson. l. c. Potest autem hic casus particularis brevius multo ac generalis ille construi. Nempe datum spatium rectilineum, cui aequale constituendum est rectangulum inter segmenta rectae AB, vel quadratum erit, vel non. Priore casu quomodo res efficiatur, iam ostensum fuit in Obs. 3. ad II. 14., unde eo remittimus lectorem. Poterit tamen etiam huic casui applicari solutio problematis generalis. Posterior casus ope VI. 25. facile ad priorem revocari poterit. Eius autem casus, sub posteriore hoc comprehensi, quo spatium rectilineum datum est rectangulum (qui ope VI. 13. et VI. 17. vel ope II. 14. etiam

: simile. Sed $H\Theta$ ipsi $E\Delta$ est simile; et MN igitur VI. 21.) ipsi $E\Delta$ simile est; circa eandem igitur (VI. 6.) diametrum est ipsum $E\Delta$ circa quam MN. Duatur eorum diameter $Z\Xi$, et describatur figura.

Et quoniam aequale est $H\Theta$ ipsis $E\Delta$, Γ, sed $H\Theta$ ɔsi MN aequale est; et MN igitur ipsis $E\Delta$, Γ

uaerenda fuerit, quod in schemate casus secundi non eaedem tterae Alphabeti adhibitae fuerunt, quae in schemete primi asus, quod utique, ut Rob. Simson notat, fieri debebat. Quo icto haec foret demonstratio.

Ἔστω πάλιν ἡ AB τμηθεῖσα ίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβληθὲν παρὰ τὴν AB τὸ $A\Delta$, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΓE, καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν AB τὸ AZ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον τῷ $K\Theta$, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB τῷ ΓE· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ $A\Delta$ τοῦ AZ. Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓE τῷ $K\Theta$, περὶ αὐτήν εἰσι διάμετρον. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ZB, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $\Delta\Theta$ τῷ ΔH, ἐπεὶ καὶ ἡ ΘN τῇ HN· μεῖζον ἄρα τὸ $\Delta\Theta$ τοῦ OZ. Ἴσον δὲ τὸ $\Delta\Theta$ τῷ ΔK· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔK τοῦ OZ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ OK· ὅλον ἄρα τὸ $A\Delta$ ὅλου τοῦ AZ μεῖζόν ἐστιν.

Sit rursus (f. 388.) AB secta bifariam in Γ, et applicatum sit ad AB parallelogrammum $A\Delta$, deficiens figura ΓE, et applicetur rursus ad AB parallelogrammum AZ deficiens figura $K\Theta$ simili et similiter posita ei, quae ex dimidia AB descripta est, nempe ΓE: dico, maius esse parallelogrammum, quod ad dimidiam applicatur, nempe $A\Delta$, parallelogrammo AZ. Quoniam enim simile est ΓE ipsi $K\Theta$, circa eandem diametrum sunt: sit eorum diameter ZB, et descibatur figura. Et, quoniam aequale est $\Delta\Theta$ ipsi ΔH, etenim et ΘN aequalis est ipsi HN; maius igitur $\Delta\Theta$ ipso OZ. Aequale autem $\Delta\Theta$ ipsi ΔK: maius igitur et ΔK ipso OZ. Commune addatur OK: totum igitur $A\Delta$ toto AZ maius est.

πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα λόγον ἤ ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ· καὶ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδη οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα. Ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα,

ΑΙ, ΒΖ inter se parallelae, aequales erunt ΑΔ, ΑΒ, et aequales etiam sunt (III. 3.) ΕΚ, ΚΗ. Est autem, ob determinationem, rectangulum Γ×Δ non maius quadrato ex ΑΔ dimidio ipsius ΑΒ, ergo et rectangulum ΕΑ×ΑΗ non maius est quadrato ex ΑΔ h. e. ex ΙΚ: commune addatur quadratum ex ΚΕ, et quadratum ex ΑΚ (II. 6.) non maius erit quadratis ex ΕΚ, ΙΚ h. e. quadrato ex ΙΕ: quare recta ΑΚ seu ΙΑ non maior est ipsa ΙΕ. Et, siquidem ΙΕ aequalis fuerit ipsi ΙΔ, circulus ΕΗΙΖ continget rectam ΑΒ in Δ, et quadratum ex ΑΔ (III. 36.) aequale erit rectangulo ΕΑ×ΑΗ, sive dato rectangulo Γ×Δ, et factum erit, quod proponebatur. Si ve-

equale est. Commune auferatur $E\Delta$; reliquus igitur $\Psi X\Phi$ gnomon ipsi Γ est aequalis. Et quoniam aequalis est AE ipsi EB, aequale est (I. 36.) et AN ipsi NB, hoc est (I. 43.) ipsi ΔO. Commune apponatur $E\Xi$; totum igitur $A\Xi$ aequale est gnomoni $\Phi X\Psi$. Sed $\Phi X\Psi$ gnomon ipsi Γ aequalis est; et $A\Xi$ igitur ipsi Γ aequale est.

Secundum datam igitur rectam AB dato rectilineo Γ aequale parallelogrammum applicatum est $A\Xi$, excedens figura parallelogramma ΠO simili ipsi Δ, quoniam et ipsi $E\Delta$ simile est $O\Pi$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXX. (Fig. 395.)

Datam rectam terminatam secundum extremam et mediam rationem secare.

producta sumatur punctum quodcunque Z, et per illud ducantur rectae $HZ\Theta$, ZK, quae sint parallelae rectis AB, $B\Theta$: dicetur parallelogrammum AZ super recta AK constitutum applicari secundum rectam AB ita, ut deficiat parallelogrammo $K\Theta$ simili et similiter posito (VI. 26.) parallelogrammo ΓE, et demonstrari poterit, parallelogrammum $A\Delta$ super dimidia recta $A\Gamma$ constitutum maius esse quocunque parallelogrammo AZ hac ratione super alio segmento rectae AB nempe AK constituto. Ita fere Clavius.

Obs. 3. Differentia, qua parallelogrammum $A\Delta$ superat alterum AZ, aequalis est parallelogrammo $Z\Delta$ simili et similiter posito parallelogrammo ΓE. Huius parallelogrammi $Z\Delta$ unum latus $ZN = K\Gamma$ (I. 34.) $= A\Gamma - AK$ (vel $AK - A\Gamma$) alterum $N\Delta$: $\left\{\begin{matrix} ZN \\ K\Gamma \end{matrix}\right. = A\Gamma : \Gamma B = ZK : KB$ (VI. 4.). Ex schedis Pfleiderer. Hinc eodem observante sequens emergit propositionis huius enunciatum magis determinatum: parallelogram-

ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτω τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Εὐθείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη

rectangulum $A\Pi$ applicatum est deficiens quadrato $B\Pi$, quod facere oportebat.

Obs. 3. Data recta AB, et rectilineo, per hanc propositionem et observationem praecedentem habebitur NB vel $N\Pi$ latus quadrati, quo deficit rectangulum $A\Pi$ rectilineo dato aequale, et secundum datam rectam AB applicatum. Pro quantitate incognita NB vel $N\Pi$ ponatur y, unde $AO = AB \times y$ et $NO = y^q$, ergo $A\Pi = AB \times y - y^q$, vel $\Gamma \times \Delta = AB \times y - y^q$. Atque haec est prima aequationum affectarum quadraticarum species seu forma, quam ex hac Prop. 28. solverunt geometae

Sit data recta terminata AB; oportet igitur AB ectam secundum extremam et mediam rationem ecare.

Describatur enim (I. 46.) ex AB quadratum $B\Gamma$, et applicetur (VI. 29.) secundum $A\Gamma$ ipsi $B\Gamma$ aequale parallelogrammum $\Gamma\Delta$, excedens figura $A\Delta$ simili ipsi $B\Gamma$.

Quadratum autem est $B\Gamma$; quadratum igitur est et $A\Delta$. Et quoniam aequale est $B\Gamma$ ipsi $\Gamma\Delta$, commune inferatur ΓE; reliquum igitur BZ reliquo $A\Delta$ est aequale. Est autem et ipsi aequiangulum; ipsorum BZ, $A\Delta$ igitur (VI. 14.) reciproca sunt latera circa aequales angulos; est igitur ut ZE ad $E\Delta$ ita AE ad EB. Aequalis autem est ZE ipsi $A\Gamma$, (I. 34.) hoc est ipsi AB, et $E\Delta$ ipsi AE; est igitur ut BA ad AE ita AE ad EB. Maior autem AB ipsa AE; major igitur et AE ipsa EB.

super dimidia recta. (Hoc nempe excedit rectangulum quodcunque ipsi ipsoperimetrum quadrato, cuius latus aequale est, differentiae inter latus prioris quadrati et latus quodcunque illius rectanguli.) Atque haec propositio eadem est cum ea, quam habuimus in II. 5. Cor. 1., quae itaque casus particularis est VI. Prop. 27. (vid. Pfleidereri Schol. in Libr. 2. §. 33. sqq.) Playfair. loco generalioris propositionis Euclideae et quam in elementis haud necessariam esse iudicat, tantum hunc casum particularem, utpote saepissime obvium, et tironibus magis accomodatum et sufficientem posuit, et similiter etiam in duabus sequentibus propositionibus versatus est. Paullo generalior adhuc maneret propositio, si parallelogrammum super dimidia AB descriptum foret quidem aequilaterum, a non rectangulum.

ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστιν. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε

$\frac{AB}{2}$, erit $IB^q = KI^q + KB^q = \left(\frac{AB}{2}\right)^q + \left(\frac{\Gamma-\Delta}{2}\right)^q$. Et $LA = AK = AH + HK = \Delta + \frac{\Gamma-\Delta}{2} = \frac{\Gamma+\Delta}{2}$; hinc $NA^q = IN^q - IA^q = IB^q - IA^q = \left(\frac{AB}{2}\right)^q + \left(\frac{\Gamma-\Delta}{2}\right)^q - \left(\frac{\Gamma+\Delta}{2}\right)^q = \left(\frac{AB}{2}\right)^q - \Gamma\times\Delta$, unde $NB = AB - NA = \frac{AB}{2} - \sqrt{\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^q - \Gamma\times\Delta\right)}$, et eodem modo $NA = \frac{AB}{2} + \sqrt{\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^q - \Gamma\times\Delta\right)}$.

PROPOSITIO XXIX.

Obs. 1. Quod primum sensum huius propositionis attinet, facile ille intelligetur ex ea explicatione, quam in Obs. 2. ad VI. 27. de simili expressione attulimus. Nempe in Prop. 27. 28. de defectu, in Prop. 29. de excessu sermo est, resque ita intelligenda erit: Si linea aliqua AB producatur ad punctum aliquod O, tumque super AO constituatur parallelogrammum $A\bar{E}$ excedens figura parallelogramma $B\bar{E}$, et haec

Ipsa igitur AB recta secundum extremam et mediam rationem secta est in E, et maius eius segmentum est AE. Quod oportebat facere.

ALITER. (Fig. 396.)

Sit data recta AB; oportet rectam AB secundum extremam et mediam rationem secare.

Secetur enim AB in Γ, ita (II. 11.) ut rectangulum sub AB, $B\Gamma$, aequale sit quadrato ex $A\Gamma$.

Et quoniam rectangulum sub AB, $B\Gamma$ aequale est quadrato ex ΓA; est igitur (VI. 17.) ut AB ad $A\Gamma$ ita $A\Gamma$ ad ΓB; ergo (VI. Def. 3.) AB secundum extremam et mediam rationem secta est in Γ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXI. (Fig. 396.)

In rectangulis triangulis figura ex latere rectangulum angulum subtendente aequalis est figuris ex lateri-

Erit itaque (I. 43.) parallelogrammum $K\zeta$ aequale parallelogrammo $\Theta\zeta$ (I. 43.). At ob $B\varkappa = AK$ (hyp.) vel $M\Theta = HZ$, erit parallelogrammum $\Theta\zeta = HA$, itaque et $K\zeta = HA$, additeque communi AA, erit $AZ = A\zeta$ (Whiston. Cor. 1. ad VI. 27.). Aliter ita: quum parallelogrammum BA, vel id, quod ei aequale est, AA superet, ut ex demonstr. VI. 27. patet, parallelogrammum $A\zeta$ parallelogrammo $A\zeta$; pariterque parallelogrammum AA superet parallelogrammum AZ parallelogrammo AA, sit autem, ob $K\Gamma = \Gamma\varkappa$ (hyp.), etiam parallelogrammum $A\zeta = AA$, erit $A\zeta = AZ$. Contra, si sit $AZ = A\zeta$, caeteris ut ante manentibus, erit $\Gamma\varkappa = \Gamma K$ Nam parallelogramma aequalia AZ, $A\zeta$ aequaliter different a parallelogrammo AA, nempe parallelogrammis AA, $A\zeta$: itaque AA, $A\zeta$ aequalia erunt, unde erit $AN = N\zeta$ (Obs. ad I. 36.), adeoque $\Gamma K = I\varkappa$ (I. 34.) Simul

πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς (ἄτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι [1]).

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς Η, Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἥτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομεύ

1) Verba, quae uncis inclusimus, Rob. Simson. omittenda censet, utpote imperiti cuiusdam additamentum. Scarburgh. etiam iudicat, haec verba absurdam continere notam e margine in textum receptam. Et reapse, quum ex III. 1 Def. nulli alii dentur sectores circuli, quam qui ad centrum constituti sunt, superflua certe sunt haec verba, quibus insertis praecedentes anguli sive ad centrum, sive ad circumferentias insistentes occasionem dedisse videntur. In Cod. omnia, quae de sectoribus dicta sunt, nec non Corollarium manu aliena vel inter lineas, vel in margine exarata sunt vocabulis contractis. Hinc Peyrardus iudicat, in Praefat. ad Tom. I. quoniam Rob. Simson. in Ed. Angl. monuerat, pariter a Scarburgh. additam esse hanc secundam. Propositionis partem quae moram saltim afferat, Euclidi et nusquam in sequentibus adhibeatur, a Theone ipso referente in Commentar. in Ptol. Μεγάλη σύνταξις p. 50. Ed. 1538, ubi ille: ἐπὶ δὲ τῶν ἴσων κύκλων τομεῖς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς αἱ γωνίαι, ἃς ὧν βεβήκασι, δέδεικται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων τῷ τέλει τοῦ ἕκτου βιβλίου.

gulum (qui pariter ope VI. 13. et VI. 17. vel ope II. 14. ad priorem reduci potest) exhibet Rob. Simson. in not. ad VI. 29., et solutionem similem ei, quae in problemate simili ad VI. 28. habebatur, in hunc modum affert. Sit data recta Γ (Fig. 391.), datum autem rectangulum sit id, quod rectis Δ continetur: oportet secundum datam rectam AB dato rectangulo $\Gamma \times \Delta$ aequale rectangulum applicare excedens quadrato. Ducantur AE, BZ ad rectos angulos ipsi AB, et ad contrarias eius partes, quarum AE aequalis sit ipsi Γ, et BZ rectae

entra, sive ad circumferentias insistant; adhuc etiam t sectores (quippe ad centra constituti).

Sint aequales circuli $AB\Gamma$, ΔEZ, et ad centra quidem ipsorum H, Θ sint anguli $BH\Gamma$, $E\Theta Z$; ad circumferentias vero anguli $BA\Gamma$, $E\Delta Z$; dico esse ut $B\Gamma$ circumferentia ad EZ circumferentiam ita angulum $BH\Gamma$ ad angulum $E\Theta Z$, et angulum $BA\Gamma$ ad angulum $E\Delta Z$; et adhuc sectorem $HB\Gamma$ ad sectorem ΘEZ.

Δ. Iungatur EZ et bifariam secetur in I, centroque I, intervallo IE describatur circulus, occurratque rectae AE rursus in H, et iungatur HZ, et ad AB ducatur IA parallela ipsi AE; occurrat vero circulus rectae AB productae in M et N, et super BN describatur quadratum $NBO\Pi$, et compleatur rectangulum $AN\Pi\Theta$. Quoniam igitur angulus EHZ in semicirculo aequalis est angulo recto EAB, parallelae erunt AB, IZ: aequales igitur sunt AH, BZ, et rectangulum $EA\times AH=EA\times BZ$ h. e. rectangulo $\Gamma\times\Delta$. Et, quoniam aequales sunt MA, AN, ut et AA, AB, erunt et MA, BN aequales, et propterea rectangulum $AN\times NB=MA\times AN=$ (III. 35.) $EA\times AH=\Gamma\times\Delta$. Rectangulum igitur $AN\times NB$ h. e. ipsum $A\Pi$ aequale est rectangulo $\Gamma\times\Delta$. Secundum datam igitur rectam AB dato rectangulo $\Gamma\times\Delta$ aequale rectangulum $A\Pi$ applicatum est excedens quadrato $B\Pi$. Quod oportebat facere.

Obs. 3. Data recta linea AB, et rectilineo, per hanc propositionem et observationem praecedentem habebitur NB vel $N\Pi$ latus quadrati, quo excedit rectangulum datum $A\Pi$ secundum datam rectam AB applicatum Pro quantitate incognita NB vel $N\Pi$ ponatur y, unde $AO=AB\times y$, et $NO=yq$, ergo $A\Pi=AB\times y+yq$, i. e. $\Gamma\times\Delta=AB\times y+yq$. Pariterque, si ponatur $AN=x=AB+y$, erit $BN-x=AB$, unde $A\Pi=AN\times BN=xq-x\times AB$. Et has aequationum quadraticarum affectarum species ex hac Prop. 29. solverunt Geome-

καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. Ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἐν ἄρα τοῖς, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΛΛΛΩΣ.

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἄρα εἶδος

etiam *AB* ita dividere, ut rectangulum inter segmenta eius contentum aequale sit dato spatio: hoc spatium autem oportet non maius esse quadrato ex linea dimidia. Ita Playfair. rem exprimit, qui hunc modo casum particularem huius problematis, utpote maxime necessarium exprimit. Aliter problema ita enunciari potest: data summa *AB* laterum trianguli, et rectangulo ipso magnitudine dato, latera invenire. Vid. Rob. Simson. l. c. Potest autem hic casus particularis brevius multo ac generalis ille construi. Nempe datum spatium rectilineum, cui aequale constituendum est rectangulum inter segmenta rectae *AB*, vel quadratum erit, vel non. Priore casu quomodo res efficiatur, iam ostensum fuit in Obs. 3. ad II. 14., unde eo remittimus lectorem. Poterit tamen etiam huic casui applicari solutio problematis generalis. Posterior casus ope VI. 25. facile ad priorem revocari poterit. Eius autem casus, sub posteriore hoc comprehensi, quo spatium rectilineum datum est rectangulum (qui ope VI. 13. et VI. 17. vel ope II. 14. etiam

ad $B\Delta$ ita figura ex $B\Gamma$ ad figuram ex BA, similem et similiter descriptam. Eadem ratione et ut $B\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ ita figura ex $B\Gamma$, ad figuram ex ΓA; quare et ut $B\Gamma$ ad ipsas $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ ita figura ex $B\Gamma$ ad figuras ex BA, $A\Gamma$, similes et similiter descriptas. Aequalis autem $B\Gamma$ ipsis $B\Delta$, $\Delta\Gamma$; igitur et figura ex $B\Gamma$ aequalis figuris ex BA, $A\Gamma$, similibus et similiter descriptis. Ergo in rectangulis, etc.

ALITER.

Quoniam (VI. 23.) similes figurae in dupla ratione sunt laterum homologorum, figura ex $B\Gamma$ ad figuram ex

facile ad priorem reduci poterat) sequentem solutionem habet Rob. Simson. in Not. ad VI. 28. desumtam ex Willebrordi Snellii Apollonio Batavo, et Halleio in Schol. ad Prop. 18. libri 8. Conicor. Apollonii. Sit nempe data recta AB (Fig. 392.), datum autem rectangulum, quod rectis Γ, Δ, continetur, non maius existens quadrato ex dimidio rectae AB: oportet secundum datam rectam AB dato rectangulo $\Gamma \times \Delta$ aequale rectangulum applicare, deficiens quadrato. Ducantur AE, BZ ad rectos angulos ipsi AB, et ad easdem eius partes, quarum AE quidem aequalis sit Γ, BZ vero Δ. Bifariam secetur iuncta EZ in I, centroque I, intervallo IE describatur circulus, occurratque rectae AE rursus in H, et iungatur HZ, cui parallela ducatur IK, et ad AB ducatur IA parallela rectae AE. Quoniam igitur angulus EHZ in semicirculo aequalis est recto EAB, parallelae erunt AB, HZ, et parallelas sunt AH, BZ, quare AH aequalis est BZ et rectangulum $EA \times AH$ aequale erit ipsi $EA \times BZ$, hoc est rectangulo $\Gamma \times \Delta$. Et, quoniam aequales

πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος οὕτως τὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον· ὥςτε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδη οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα. Ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα,

ΑΙ, ΒΖ inter se parallelae, aequales erunt ΑΛ, ΛΒ, et aequales etiam sunt (III. 3.) ΕΚ, ΚΗ. Est autem, ob determinationem, rectangulum Γ×Δ non maius quadrato ex ΑΛ dimidio ipsius ΑΒ, ergo et rectangulum ΕΛ×ΛΗ non maius est quadrato ex ΑΛ h. e. ex ΙΚ: commune addatur quadratum ex ΚΕ, et quadratum ex ΑΚ (II. 6.) non maius erit quadratis ex ΕΚ, ΙΚ h. e. quadrato ex ΙΕ: quare recta ΑΚ seu ΙΛ non maior est ipsa ΙΕ. Et, siquidem ΙΕ aequalis fuerit ipsi ΛΔ, circulus ΕΗΖ continget rectam ΑΒ in Δ, et quadratum ex ΑΛ (III. 36.) aequale erit rectangulo ΕΛ×ΛΗ, sive dato rectangulo Γ×Δ, et factum erit, quod proponebatur. Si vero

BA duplam rationem habet eius quam habet *ΓB* ad *BA*. Habet autem et quadratum ex *BΓ* (VI. 20. Cor. 1.) ad quadratum ex *BA* duplam rationem eius quam *ΓB* ad *BA*; ut igitur (V. 11.) figura ex *BΓ* ad figuram ex *BA* ita quadratum ex *ΓB* ad quadratum ex *BA*. Ex eadem ratione et ut figura ex *BΓ* ad figuram ex *ΓA* ita quadratum ex *BΓ* ad quadratum ex *ΓA*; quare et ut figura ex *BΓ* ad figuras ex *BA*, *AΓ* ita quadratum ex *BΓ* ad quadrata ex *BA*, *AΓ*. Aequale autem quadratum ex *BΓ* (I. 47.) quadratis ex *AB*, *AΓ* aequalis igitur et figura ex *BΓ* figuris ex *BA*, *AΓ* similibus et similiter descriptis. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXXII. (Fig. 397.)

Si duo triangula componantur secundum unum angulum, duo latera duobus lateribus proportionalia ha-

sunt *EI*, *IZ*, et *AE*, inaequales fuerint *IE*, *IA*, erit *IE* maior, et propterea circulus *EHZ* secabit rectam *AB*; secet in *M*, *N* punctis, et super *NB* describatur quadratum *NBOΠ*, et compleatur rectangulum *ANΠΘ*. Quoniam igitur aequales sunt *MA*, *AN*, et aequales ostensae sunt *AA*, *AB*, aequales erunt *AM*, *NB*. Rectangulum igitur *AN*×*NB* aequale est ipsi *NA*×*AM*, hoc est (III. 36. Cor.) rectangulo *EA*×*AH*, sive rectangulo *Γ*×*Δ*. Rectangulum vero *AN*×*NB* est ipsum *AΠ*, est enim *ΠN*=*NB*. Ergo rectangulum *AΠ* aequale est rectangulo *Γ*×*Δ*. Igitur secundum datam rectam *AB* dato *Γ*×*Δ* rectangulo aequale

ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Εὐθείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη

rectangulum $A\Pi$ applicatum est deficiens quadrato $B\Pi$, quod facere oportebat.

Obs. 3. Data recta AB, et rectilineo, per hanc propositionem et observationem praecedentem habebitur NB vel $N\Pi$ latus quadrati, quo deficit rectangulum $A\Pi$ rectilineo dato aequale, et secundum datam rectam AB applicatum. Pro quantitate incognita NB vel $N\Pi$ ponatur y, unde $AO = AB \times y$, et $NO = y^q$, ergo $A\Pi = AB \times y - y^q$, vel $\Gamma \times \Delta = AB \times y - y^q$. Atque haec est prima aequationum affectarum quadraticarum species seu forma, quam ex hac Prop. 28. solverunt geometrae

bentia, ita ut homologa eorum latera et parallela sint; reliqua triangulorum latera in directum erunt.

Sint duo triangula $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$, duo latera BA, $A\Gamma$ duobus lateribus $\Gamma\Delta$, ΔE proportionalia habentia ut AB quidem ad $A\Gamma$ ita $\Delta\Gamma$ ad ΔE, parallela vero sit AB ipsi $\Delta\Gamma$, $A\Gamma$ vero ipsi ΔE; dico $B\Gamma$ in directum esse ipsi ΓE.

Quoniam enim parallela est AB ipsi $\Delta\Gamma$, et in ipsas incidit recta $A\Gamma$, alterni anguli $BA\Gamma$, $A\Gamma\Delta$ aequales inter se sunt (I. 29.) Ex eadem ratione et $\Gamma\Delta E$ ipsi $A\Gamma\Delta$ est aequalis; quare et $BA\Gamma$ ipsi $\Gamma\Delta E$ est aequalis. Et quoniam duo triangula sunt $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$ unum angulum ad A uni angulo ad Δ aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia, ut BA ad $A\Gamma$ ita $\Gamma\Delta$ ad ΔE; aequiangulum est (VI. 6.) triangulum $AB\Gamma$, triangulo $\Delta\Gamma E$; aequalis igitur angulus $AB\Gamma$ ipsi $\Delta\Gamma E$. Ostensus autem est et $A\Gamma\Delta$ ipsi $BA\Gamma$ aequalis; totus igitur $A\Gamma E$ duobus $AB\Gamma$, $BA\Gamma$ aequalis est. Communis appo-

veteres, inveniendo quantitatem incognitam NB, vel NH per applicationem rectanguli dato rectangulo aequalis secundum datam rectam AB et deficientis quadrato. Et ipsa etiam regula, qua ad solvendas aequationes huius formae utuntur recentiores, ex huius Prop. 28. constructione, vel, quod idem est, ex constructione in Obs. 3. ad II. 14. allata deduci potest (Whiston. Cor. 2. et 3. ad VI. 28.). Obtinebitur nempe $HE = AE - BZ = \Gamma - \Delta$, et $KE = \frac{HE}{2} = \frac{\Gamma - \Delta}{2}$, et ob $KI = AA =$

ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστίν. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε

$\frac{AB}{2}$, erit $IB^q = KI^q + KB^q = \left(\frac{AB}{2}\right)^q + \left(\frac{\Gamma - \Delta}{2}\right)^q$. Et $IA = AK = AH + HK = \Delta + \frac{\Gamma - \Delta}{2} = \frac{\Gamma + \Delta}{2}$; hinc $NA^q = IN^q - IA^q = IB^q - IA^q = \left(\frac{AB}{2}\right)^q + \left(\frac{\Gamma - \Delta}{2}\right)^q - \left(\frac{\Gamma + \Delta}{2}\right)^q = \left(\frac{AB}{2}\right)^q - \Gamma \times \Delta$, unde $NB = AB - NA = \frac{AB}{2} - \sqrt{\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^q - \Gamma \times \Delta\right)}$, et eodem modo $N\Delta = \frac{AB}{2} + \sqrt{\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^q - \Gamma \times \Delta\right)}$.

PROPOSITIO XXIX.

Obs. 1. Quod primum sensum huius propositionis attinet, facile ille intelligetur ex ea explicatione, quam in Obs. 2. ad VI. 27. de simili expressione attulimus. Nempe in Prop. 27. 28. de defectu, in Prop. 29. de excessu sermo est, resque ita intelligenda erit: Si linea aliqua AB producatur ad punctum aliquod O, tumque super AO constituatur parallelogrammum $A\bar{B}$ excedens figura parallelogramma $B\bar{B}$, et haec

itur *AΓB*: anguli igitur *AΓE*, *AΓB* ipsis *EAΓ*, *ABΓ*, *AΓB* aequales sunt. Sed (I. 32.) *BAΓ*, *ABΓ* *AΓB* duobus rectis aequales sunt; et ipsi *AΓE*, *AΓB* igitur duobus rectis aequales sunt. Ad quandam igitur rectam *AΓ*, et ad punctum in ea *Γ*, duae rectae *BΓ*, *ΓE*, non ad easdem partes positae, angulos deinceps *AΓE*, *AΓB* duobus rectis aequales faciunt; in directum igitur est *BΓ* ipsi *ΓE* (I. 14.). Si igitur duo etc.

PROPOSITIO XXXIII. (Fig. 400.)

In aequalibus circulis anguli eandem rationem habent quam circumferentiae quibus insistunt, sive ad

ipsa figura *BE* excessus dicitur, isque excessus in hac propositione 29. similis esse debet dato parallelogrammo *Δ*, et totum parallelogrammum *AE* debet aequale esse spatio dato *Γ*. Caeterum etiam hic duplex solutio locum habet, at posterior cum priore eodem redit.

Obs. 2. Si datum istud rectangulum *Δ* quadratum fuerit, problema sic efferetur: Ad datam rectam *AB* dato rectilineo *Γ* aequale rectangulum applicare excedens quadrato (Ita Whiston in Cor. 1. ad VI. 29. et Rob. Simson in Not. ad h. l.) Aliter ita: Datam rectam *AB* producere ad punctum aliquod *O*, ita ut rectangulum contentum segmentis inter hoc punctum et puncta extrema rectae *AB* interceptis aequale sit spatio dato. Ita Playfair rem exprimit, qui etiam hic in casu hoc particulari subsistit. Vel etiam: data *AB* differentia laterum rectanguli, ipsoque rectangulo magnitudine dato, invenire latera. Vid. Rob. Simson. l. c. Erit autem spatium datum, cui aequale fieri debet rectangulum, vel quadratum, vel non. Priore casu problema solutum est supra in Obs. 4. ad II. 11. Posterioris casum particularem, quo spatium datum est rectan-

πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς (ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι [1]).

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς Η, Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἥτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα

1) Verba, quae uncis inclusimus, Rob. Simson. omittenda censet, utpote imperiti cuiusdam additamentum. Scarburgh. etiam indicat, haec verba absurdam continere notam e margine in textum receptam. Et reapse, quum ex III. 10 Def. nulli alii dentur sectores circuli, quam qui ad centra constituti sunt, superflua certe sunt haec verba, quibus insertis praecedentes anguli sive ad centrum, sive ad circumferentias insistentes occasionem dedisse videntur. In Cod. omnia, quae de sectoribus dicta sunt, nec non Corollarium manu aliena vel inter lineas, vel in margine exarata sunt vocabulis contractis. Hinc Peyrardus indicat, in Praefat. ad Tom. I. quoniam Rob. Simson. in Ed. Angl. monuerat, pariter a Scarburgh. additam esse hanc secundam. Propositionis partem quae moram saltim afferat, Euclidi et nusquam in sequentibus adhibeatur, a Theone ipso referente in Commentar. a Ptol. Μεγάλη σύνταξις p. 50. Ed. 1538, ubi ille: ὅτι δὲ ἐπ' ἴσων κύκλων τομεῖς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς αἱ γωνίαι, ἃς ὧν βεβήκασι, δέδεικται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων περὶ τῷ τέλει τοῦ ἕκτου βιβλίου.

gulum (qui pariter ope VI. 13. et VI. 17. vel ope II. 14. a priorem reduci potest) exhibet Rob. Simson. in not. ad VI. 29., et solutionem similem ei, quae in problemate simili a VI. 28. habebatur, in hunc modum affert. Sit data recta Δ (Fig. 391.), datum autem rectangulum sit id, quod rectis Δ continetur: oportet secundum datam rectam AB dato rectangulo Γ×Δ aequale rectangulum applicare excedens quadrato. Ducantur AE, BZ ad rectos angulos ipsi AB, et ad contrarias eius partes, quarum AE aequalis sit ipsi Γ, et BZ recta

centra, sive ad circumferentias insistant; adhuc etiam et sectores (quippe ad centra constituti).

Sint aequales circuli $AB\Gamma$, ΔEZ, et ad centra quidem ipsorum H, Θ sint anguli $BH\Gamma$, $E\Theta Z$; ad circumferentias vero anguli $BA\Gamma$, $E\Delta Z$; dico esse ut $B\Gamma$ circumferentia ad EZ circumferentiam ita angulum $BH\Gamma$ ad angulum $E\Theta Z$, et angulum $BA\Gamma$ ad angulum $E\Delta Z$; et adhuc sectorem $HB\Gamma$ ad sectorem ΘEZ.

Δ. Iungatur EZ et bifariam secetur in I, centroque I, intervallo IE describatur circulus, occurratque rectae AE rursus in H, et iungatur HZ, et ad AB ducatur IA parallela ipsi AE; occurrat vero circulus rectae AB productae in M et N, et super BN describatur quadratum $NBO\Pi$, et compleatur rectangulum $AN\Pi\Theta$. Quoniam igitur angulus EHZ in semicirculo aequalis est angulo recto EAB, parallelae erunt AB, HZ: aequales igitur sunt AH, BZ, et rectangulum $EA\times AH=EA\times BZ$ h. e. rectangulo $\Gamma\times\Delta$. Et, quoniam aequales sunt MA, AN, ut et $A\Delta$, AB, erunt et MA, BN aequales, et propterea rectangulum $AN\times NB=MA\times AN=$ (III. 35.) $EA\times AH=\Gamma\times\Delta$. Rectangulum igitur $AN\times NB$ h. e. ipsum $A\Pi$ aequale est rectangulo $\Gamma\times\Delta$. Secundum datam igitur rectam AB dato rectangulo $\Gamma\times\Delta$ aequale rectangulum $A\Pi$ applicatum est excedens quadrato $B\Pi$. Quod oportebat facere.

Obs. 3. Data recta linea AB, et rectilineo, per hanc propositionem et observationem praecedentem habebitur NB vel $N\Pi$ latus quadrati, quo excedit rectangulum datum $A\Pi$ secundum datam rectam AB applicatum Pro quantitate incognita NB vel $N\Pi$ ponatur y, unde $AO=AB\times y$, et $NO=yq$, ergo $A\Pi=AB\times y+yq$, i. e. $\Gamma\times\Delta=AB\times y+yq$. Pariterque, si ponatur $AN=x=AB+y$, erit $BN-x=AB$, unde $A\Pi=AN\times BN=xq-x\times AB$. Et has aequationum quadraticarum affectarum species ex hac Prop. 29. solverunt Geome-

Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν ΒΓ περιφερείᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἑξῆς ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΓΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΖ περιφερείᾳ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΖΜ, ΜΝ, καὶ ἐπεζευχθῶσαν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆ ΒΓ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆ ὑπὸ ΒΗΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΖ. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΛ τῇ ὑπὸ ΕΘΝ·

trae veteres, inveniendo quantitatem incognitam BN vel AN per applicationem rectanguli dato rectangulo aequalis secundum datam rectam AB et excedentis quadrato. Et ipsa etiam regula, qua ad solvendas aequationes harum formarum utuntur recentiores, facile ex huius Prop. 29. constructione, vel, quod idem est, ex constructione in Obs. 4. ad II. 11. allata deduci potest simili ratione ac factum est in Obs. 3. ad VI. 28. Erit nempe $BN = \sqrt{\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^q + \Gamma \times \Delta\right)} - \frac{AB}{2}$, et $AN = \sqrt{\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^q + \Gamma \times \Delta\right)} + \frac{AB}{2}$. Cf. Whiston. Cor. 2—5 ad VI. 29.

Quum itaque haec problemata in Prop. 28. et 29. contenta sint maxime utilia, et in solutione aliorum problematum saepissime adhibita, maxime etiam in libro decimo Elementorum Euclidis et in Conicis Apollonii, ubi applicatio 28. ad Ellipsin, 29 autem ad Hyperbolam spectat, Rob. Simson iure censet inscite admodum ab Andr. Tacquet et Claud. Dechales in iis, quas dederunt, Elementorum Editionibus has propositiones omissas esse, et insulse admodum ab iis dici nullius fere usus esse. Ceterum vide adhuc ad calcem VI. Prop. 31.

Ponantur enim circumferentiae quidem $B\Gamma$ aequales quotcunque deinceps ΓK, $K\Lambda$, circumferentiae vero EZ aequales quotcunque ZM, MN, et iungantur HK, $H\Lambda$, ΘM, ΘN.

Quoniam igitur aequales sunt circumferentiae $B\Gamma$, ΓK, $K\Lambda$ inter se, aequales sunt et anguli $BH\Gamma$, ΓHK, $KH\Lambda$ inter se (III. 27.) Quam multiplex igitur est circumferentia $B\Lambda$ circumferentiae $B\Gamma$, tam multiplex est et angulus $BH\Lambda$ anguli $BH\Gamma$. Ex eadem ratione et quam multiplex est circumferentia EN circumferentiae EZ, tam multiplex est et angulus $E\Theta N$ anguli $E\Theta Z$. Si igitur aequalis est circumferentia $B\Lambda$ circumferentiae EN, aequalis est et angulus $BH\Lambda$

PROPOSITIO XXXI.

Obs. 1. Pfleiderer monet in sched. mss. §. 306. propositionem 31. incongrue a VI. 20 cum qua proxime cohaereat, seiunctam, et propositionibus 27—30 minime ad eam pertinentibus subiunctam esse.

Obs. 2. Rob. Simson observat, in demonstratione bis omissam esse inversionem ope Prop. B. V. vel, ut vulgo habent, ope Cor. V. 4. faciendam. Ita enim demum demonstrationem ope V. 24. rite procedere, unde et Clavius ea inversione usus sit. Nempe ita habere debet demonstratio: Ut ΓB ad $B\Lambda$, ita figura ex ΓB ad figuram similem et similiter positam ex $B\Lambda$, et invertendo (B, V.) ut $B\Lambda$ ad ΓB ita figura ex $B\Lambda$ ad figuram ex ΓB: unde (V. 24.) ut $B\Lambda + \Gamma\Lambda$ ad ΓB ita figurae ex $B\Lambda$ et $\Gamma\Lambda$ ad figuram ex ΓB. Aequales autem sunt $B\Lambda + \Gamma\Lambda$ ipsi ΓB: unde (A, V.) figurae ex $B\Lambda$ et $\Gamma\Lambda$ aequales erunt figurae ex ΓB.

Obs. 3. Propositio VI 31. generaliorem reddit propositionem I. 47. et in demonstratione priore ex praemissis ab hac independentibus sistit (Pfleiderer l. c. §. 306.).

Obs. 4. Converti quoque potest haec propositio eadem

καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ γωνίας καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, εἴληπται τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΒΗΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων [1]), ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΕΘΖ γωνίας, ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία· καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς

1) Hic inserendum Rob. Simson οἷς ἔστιν iure censet, collat. in V. 5. Def. verbis: καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν et supra in praeparatione ad demonstrationem voce: ὁσαιδήποτοῦν.

ratione ac I. 47. Praeterea ope VI. 31. deducta quoque ex I. 47. problemata generaliorem formam induunt. Cf. Pfleiderer. l. c. § 305. Clavius ad h. l. Tacquet et Whiston. in Cor. ad hanc propositionem.

Obs. 5. Denique notabimus, Austino omnes propositiones 27—31 spurias esse videri, non quod ipsarum utilitatem neget, quam potius de propositionibus 27—29 agnoscit, at non sufficere putat ad eas Euclidi vindicandas, sed maxime ob usum vocis εἶδος alias apud Euclidem non occurrentis, de qua diximus in Obs. 3. ad VI. 20), et quod demonstrationum concatenatio inter VI. 26. et VI. 32. quae inter se cohaereant, abrupta sit. Praeterea VI. 30. adeo facile ad I. 11. referri, ut ea non opus sit. Denique, quoad VI. 31. patere (it is evident) omnes figuras similes rectilineas descriptas super quibusdam rectis ad se invicem in eadem ratione esse, ac alias quascunque similes figuras rectilineas super iisdem rectis descriptas, unde res facilem I. 47. conficiatur. Nobis turbatus quidem ordo propositionum videtur, omnes autem has propositiones 25—31 spurias esse vix adducimur, ut credamus.

ıgulo *EΘN*; et si maior est circumferentia *BΔ* cir-
ımferentia *EN* maior est et angulus *BHΔ* angulo
ΘN; et si minor, minor; quatuor igitur existenti-
bus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis
BΓ, *EZ*, duobus vero angulis *BHΓ*, *EΘZ*, sumpta
unt circumferentiae quidem *BΓ*, et anguli *BHΓ*
eque multiplicia, et *BΔ* circumferentia et *BHΔ* an-
ulus, ipsius vero *EZ* circumferentiae et ipsius *EΘZ*
nguli et *EN* circumferentia et *EΘN* angulus; et os-
ensum est, si superat circumferentia *BΔ* circumferen-
iam *EN*, superare et angulum *BHΔ* angulum *EΘN*
:t si aequalis, aequalem; et si minor, minorem esse;

PROPOSITIO XXXII.

Obs. 1. Rob. Simson, monet enunciatum propositionis VI. 26. non esse satis generalem, sed eam eo etiam sensu sumi posse, quem indicavimus in Obs. 4. ad VI. 26. Addit, fore etiam aliam fuisse demonstrationem propositionis VI. 26. directam (diversam ab ea, quam Clavius habet, vide Obs. 1. ad VI. 26.) Deinde exhibet aliam paulo breviorem demonstrationem propositionis VI. 32. in hunc modum: Sint duo triangula *AΘZ*, *ZHΓ* (f. 398.) quorum duo latera *AΘ*, *ΘZ* duobus lateribus *HZ*, *HΓ* proportionalia sint, sc. sit ut *AΘ* ad *ΘZ* ita *HZ* ad *HΓ*; parallela autem sit *ΘA* ipsi *HZ*, et *ΘZ* ipsi *HΓ*: erit *AZ* ipsi *ZΓ* in directum. Ducatur *ΓK* parallela ipsi *ZH* (I. 31.) occurratque rectae *ΘZ* productae in *K*. Quoniam igitur utraque *AΘ*, *ΓK* parallela est ipsi *ZH*, erunt et *AΘ*, *KΓ* inter se parallelae (I. 30.), quare anguli *AΘZ*, *ZKΓ* sunt inter se aequales (I. 29.) Est autem *AΘ* ad *ΘZ* ut (*ZH* ad *HΓ*, h. e. (I. 34), ut) *FK* ad *KZ*; et sunt circa aequales angulos; ergo (VI. 6.) aequiangula sunt *AΘZ*, *FKZ* triangula, et propterea angulus *AZΘ* aequalis est angulo *ΓZK*, est autem *ΘZK* recta linea; igitur *AZ* ipsi *ΓZ* est in directum (I. 14.). Opus huius propositionis, deinde VI. 26. ita demonstrat. Si duo

ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ ἴση, ἴση· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων ἐστὶν ἄρα ὡς ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ, διπλασίων γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἥτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν εἴτε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴτε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

parallelogramma similia et similiter posita communem habe-rint angulum aut angulos ad verticem oppositos; erunt illorum diametri in recta linea. Primo habeant parallelogramma ΑΒΓΔ ΑΕΖΘ communem angulum ΒΑΔ, sintque similia et similiter posita, erunt ΑΒΓΔ, ΑΕΖΘ circa eandem diametrum. Producantur enim ΕΖ, ΓΖ ad Η, Κ et iungantur ΖΑ, ΖΓ. Quoniam igitur similia sunt ΑΒΓΔ, ΑΕΖΘ parallelogramma, erit ΑΔ ad ΑΒ, ut ΘΑ ad ΑΕ; quare reliqua ΑΘ erit ad reliquam ΕΒ ut ΘΑ ad ΑΕ (V. 19. Cor.) Est autem ΑΘ aequalis ipsi ΖΗ, ΕΒ ipsi ΓΗ, et ΑΕ ipsi ΘΖ. Ergo ut ΖΗ ad ΓΗ ita ΑΘ ad ΘΖ; et parallelae sunt ΖΗ, ΓΗ ipsis ΑΘ, ΘΖ; et triangula ΑΘΖ, ΖΗΓ ad unum angulum composita sunt in puncto Ζ; quare erunt ΑΖ, ΖΓ sibi ipsis in directum (VI. 32.). Secundo, sint parallelogramma ΚΖΗΓ, ΘΖΕΑ similia et similiter posita, habeantque angulos ΚΖΗ, ΕΖΘ ad verticem oppositos; erunt diametri ΑΖ, ΖΓ sibi ipsis in directum. Quoniam enim parallelae sunt ΑΘ, ΘΖ ipsis ΖΗ, ΗΓ, et est ΑΘ ad ΘΖ ut ΖΗ ad ΗΓ; erunt ΑΖ, ΖΓ in directum (VI. 32.).

Obs. 2. Clavius monet, ut vera sit propositio VI. 32. duo ista, de quibus sermo est, triangula; ita secundum una

est igitur (V. Def. 5.) ut circumferentia $B\Gamma$ ad circumferentiam EZ ita angulus $BH\Gamma$ ad angulum $E\Theta Z$. Sed (V. 15.) ut angulus $BH\Gamma$ ad angulum $E\Theta Z$ ita angulus $BA\Gamma$ ad angulum EAZ; duplus enim uterque utriusque; (III. 20.) ut igitur circumferentia $B\Gamma$ ad circumferentiam EZ ita et angulus $BH\Gamma$ ad angulum $E\Theta Z$, et angulus $BA\Gamma$ ad angulum EAZ.

In aequalibus igitur circulis anguli eandem habent rationem quam circumferentiae quibus insistunt; sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat ostendere.

angulum composita esse debere, ut uterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus alterius sit illi angulo, secundum quem triangula componuntur.

PROPOSITIO XXXIII.

Obs. 1. In praeparatione demonstrationis loco arcuum ΓK, KA arcui $B\Gamma$ aequalium anguli ΓHK, KHA angulo $BH\Gamma$ aequales poni possunt iuberi. Modum hoc faciendi immediate docet I. 23. Modus prius faciendi nititur IV. 1; III. 28. immediate autem non exponitur, nisi addere velis ut IV. 1. Cor. (Pfleiderer.)

Obs. 2. Si in parte secunda propositionis sectores occurrant semicirculo aequales aut maiores, bisecando illi facile ad sectores minores semicirculo reducentur. Caeterum angulos gibbos etiam per demonstrationem partis primae non excludi posse diximus ad III. 20.

Obs. 3. Ex hac propositione sequentia adhuc derivantur Corollaria, quae sunt apud Clavium, Tacquetum, Baermannum, Pfleidererum, aliosque. 1. Ut est angulus ad centrum ad quatuor angulos rectos, ita arcus isti angulo subtensus

Λέγω [1]) *ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.*

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ, Ο σημείων, ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· καὶ βάσις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση, καὶ ἴσον ἐστὶ [2]) *καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφερείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ εἰς τὸν ὅλον ΑΒΓ κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιφερείᾳ* [3])· *ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΞΓ τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἐστὶν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· καὶ εἰσὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομεὺς ὅλῳ τῷ ΗΓΚ τομεῖ ἴσος ἐστίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΛ τομεὺς ἑκατέρῳ*

1) Peyrardus in Praefat. ad Tom. I. ait: „In *textu graeco* manuscripti 190 vel Cod. a nequaquam agitur de circulorum sectoribus in ultima sexti libri propositione. *Manus aliena inter lineas et in margine manuscripti exaravit omnia quae ad sectores pertinent*, et quidem, ut in lect. variant. addit, *vocabulis contractis.*" Quum igitur postea ad Cod. a provocet Peyrardus, id saltim de lectione ista ad marginem notata intelligi debet.

2) Pro: *ἴσον ἄρα ἐστὶ* quod vulgo habent, legendum esse: *καὶ ἴσον ἐστὶ* recte monet Rob. Simson.

3) Ita leg. Gregorius, cuius lectionem hic restituimus. Peyrardus ex Cod. a habet: *καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ἐστὶν ὅλον κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερείᾳ*

ad totam peripheriam, et vice versa. Vel etiam, ut angulus

Dico et ut circumferentia $B\Gamma$ ad circumferentiam EZ ita sectorem $HB\Gamma$ ad sectorem ΘEZ.

Iungantur enim $B\Gamma$, ΓK, et sumptis in circumferentiis $B\Gamma$, ΓK, punctis Ξ, O, iungantur et $B\Xi$, $\Xi\Gamma$, ΓO, OK.

Et quoniam duo BH, $H\Gamma$ duabus ΓH, HK aequales sunt, et angulos aequales comprehendunt; et basis $B\Gamma$ basi ΓK est aequalis et aequale est etiam triangulum $BH\Gamma$ triangulo (I. 4.) $H\Gamma K$. Et quoniam aequalis est circumferentia $B\Gamma$ circumferentiae ΓK, et reliqua circumferentia quae complet totum circulum $AB\Gamma$ aequalis est (3 Ax.) reliquae circumferentiae quae eundum circulum complet; quare et angulus $B\Xi\Gamma$ angulo ΓOK est aequalis (III. 27.); simile igitur est (III. Def. 11.) segmentum $B\Xi\Gamma$ segmento ΓOK; et sunt super aequales rectas $B\Gamma$, ΓK. Sed similia segmenta circulorum super aequales rectas aequalia inter se sunt (III. 24.); aequale igitur est segmentum $B\Xi\Gamma$ segmento ΓOK. Est autem et triangulum $BH\Gamma$ triangulo $H\Gamma K$ aequale; et totus igitur sector $HB\Gamma$ toti sectori $H\Gamma K$

ad centrum est ad angulum rectum, ita arcus isti angulo subtensus ad quadrantem circuli. 2) Diversorum circulorum arcus qui aequales subtendunt angulos, sive ad centra, sive ad peripherias, sunt similes. Et vice versa arcus similes aequales angulos subtendunt, ubi nempe similes duorum circulorum arcus dicuntur ii, qui ad integras circumferentias, quarum partem constituunt, eandem utrimque rationem habent. 3) Duae semidiametri a concentricis peripheriis arcus auferunt similes. 4) Hisce innititur vulgaris ratio angulos metiendi per arcus, qui illos subtendunt. Si enim, datis tota circumferentia cuiuscunque circuli divisa in certum numerum partium aequalium v. c. 360, qui gradus vocantur, disquiritur ope instrumenti goniometrici,

τῶν ΗΚΓ, ΗΓΒ ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς ὁ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΗΒΓ τομέως. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομεὺς τοῦ ΘΕΖ τομέως. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τῷ ΘΕΝ τομεῖ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν ΒΓ, ΕΖ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ, ΘΕΖ τομέων, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια [1]) τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας, καὶ τοῦ ΗΒΓ τομέως, ἥτε ΒΛ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΛ τομεύς. τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομέως ἰσάκις πολλαπλάσια [1]), ἥτε ΕΝ περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ τομεύς. Καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

1) Verbis: ἰσάκις πολλαπλάσια addenda esse: ἃ ἔτυχε, recte monet Rob. Simson.

quot gradus sint in duobus arcubus circuli alicuius, patet per VI. 33. rationem angulorum, quos hi arcus subtendunt, in numeris exhiberi posse. Et si unus angulus consideratur, et numerus graduum in arcu ad eum pertinente inventus est:

qualis est. (2. Ax.) Ex eadem ratione et sector *HKΛ* rique ipsorum *HKΓ*, *HΓB* aequalis est; tres igitur ctores *HBΓ*, *HΓK*, *HKΛ* aequales inter se sunt. imiliter et sectores *ΘEZ*, *ΘZM*, *ΘMN* aequales inr se sunt; quam multiplex igitur est circumferentia *BΛ* circumferentiae *BΓ*, tam multiplex est et sector *HBΛ* sectoris *HBΓ*. Ex eadem ratione et quam multiplex est circumferentia *EN* circumferentiae *EZ*, tam multiplex est et sector *ΘEN* sectoris *ΘEZ*; si igitur equalis est circumferentia *BΛ* circumferentiae *EN* equalis est et sector *HBΛ* sectori *ΘEN*; et si superat circumferentia *BΛ* circumferentiam *EN*, superat et sector *HBΛ* sectorem *ΘEN*; et si deficit, deficit. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duobus quidem circumferentiis *BΓ*, *EZ*, duobus vero sectoribus *HBΓ*, *ΘEZ*, sumpta sunt aeque multiplicia ipsius quidem circumferentiae *BΓ* et ipsius sectoris *HBΓ*, circumferentia *BΛ*, et sector *HBΛ*, circumferentiae vero *EZ* et sectoris *ΘEZ* aeque multiplicia, circumferentia *EN* et sector *ΘEN*. Et ostensum est si superat circumferentia *BΛ* circumferentiam *EN*, superare et sectorem *HBΛ* sectorem *ΘEN*; et si aequalis sit, aequalem esse et si deficit, deficere; est igitur (V. Def. 5.) ut circumferentia *BΓ*, ad circumferentiam *EZ*, ita sector *HBΓ* ad sectorem *ΘEZ*.

constat ratio anguli ad 4. rectos per nr. I. Sit e gr. numerus graduum, quos arcus habet = 45, erit angulus ad eum arcum pertinens: 4 rect. = 45: 360 = 1: 8. Caeterum loco 360 partium vel graduum, in quos vulgo circumferentiam quamcunque dividere solent, recentiores Galli eam in 400, adeoque quadrantem in 100 partes aequales dividere instituerunt. 5) Mensura quoque angulorum circulo insistentium, quorum

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομεὶ οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

vertex intra vel extra circulum est, facile habetur per summa vel differentiam arcuum, quibus insistunt. 6) Inaequalium circulorum arcus sunt in ratione composita ex rationibus angulorum ad centrum et peripheriarum. Denique notandum est, apud Clavium ad calcem libri VI. plura adhuc addita esse theoremata et problemata, quorum multa versantur circ

COROLLARIUM.

Et manifestum est (V. 11.) et ut sector ad sectorem ita esse angulum ad angulum.

inventionem superficierum proportionalium. Et sunt quidem illa, ut Clavius ait, scitu non iniucunda, et augeri etiam eorum numerus facile poterat e scriptis veterum et recentiorum Mathematicorum. At memores, nos in Elementis versari, noluimus nimii esse.

EXCURSUS

AD

ELEMENTORUM

L. V. et maxime ad Def. 5. et 7.

A primis inde litteratum in Europa restitutarum temporibus ad nostram usque aetatem haud defuere Mathematici, qui in libro quinto Elementorum Euclidis multa difficilia, obscura, haud satis explicata esse contenderent, quum contra alii hunc ipsum librum pulcherrimum ingenii Euclidei foetum iudicarent. Gravissima autem dubia, quae contra demonstrationes in hoc libro obvias afferunt, ipsa fundamenta, quibus illae nituntur, spectant, definitiones nempe rationum aequalium aut inaequalium, et ad haec fere redeunt. Euclidem aiunt (v. c. Borellus Euclid. restitut. L. III. Ax. VI. et quae ad illud observat) multifariam rationem et proportionem (aut, ut alii dicunt, proportionalitatem) magnitudinum definivisse duplici modo, primo quidem in libro quinto, et aliter deinde in libro septimo, quod ipsum indicio sit eum sibi ipsi non constitisse, aut forte in primis istis definitionibus ipsum sibi non satisfecisse. Eam autem potissimum definitionem rationum aequalium aut inaequalium, cui integer fere liber quintus superstruatur, nempe 5. Def. V. et 7. Def. V. esse subobscuram, nec naturam rei definitae satis declarare aut distinguere a quavis alia, et notissimas adeo magnitudinum proportionalium proprietates inde deduci non posse v. c. propositionem: si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et prima superet secundam, tertiam quoque necessario excedere quartam. Defectum autem definiti-

nis 5tae et 7mae in eo potissimum latere, quod ea quae in is Definitionibus de magnitudinibus, quae eandem aut non andem rationem inter se habeant, dicantur, non sint proprietas rima et omnium notissima, quae istis magnitudinibus compeat, qualis tamen esse debeat illa, quae definitionem scientificam onstituat. Plura alia adhuc carpit in his definitionibus Thom. Simpson, de quibus infra videbimus. Consulto omisimus obectiones manifesto falsas, a Ramo, iniquissimo illo Euclidis eprehensore aliisque factas, qui male intellecta Euclidis definitione — in quem errorem a Campano (vid. obs. supra ad Def. V. 5.) inducti fuisse videntur — calumniantur Euclidem generalem datorum proportionem definire per specialem aequemultiplicium proportionem. Et fortasse falsa ista Campani expositio causa fuerit, cur multi primo post litteras renatas tempore Euclidem male intelligerent. (Cf. Barrow. Lect. 1666. Lect. VII.) Tacquetus etiam putat (Element. Euclid. Geometr. planae ac solidae L. V. ab initio) Euclidis definitionem non naturam aequalium rationum sed affectionem solummodo aliquam explicare. Et illam multiplicium proprietatem adduci vel tanquam signum infallibile rationum aequalium ut, quandocunque ea demonstrata fuerit de quibusvis rationibus, inferre certo liceat, aequales eas esse: vel eum illius sensum esse, ut per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit quam eas quarum multiplices modo iam dicto excedant vel excedantur. Si prius, demonstrare debuisse Euclidem, eam affectionem omnibus et solis rationibus aequalibus inesse. Id vero nec Euclidem nec alium quemquam demonstrasse. Si posterius, securos nos quidem esse de veritate theorematum in sensu definitionis acceptorum, minime tamen ex vi demonstrationum nobis constare de absoluta rationum aequalitate. — Taquetus itaque fundamenti loco sumere videtur, aliunde constare, quid sit rationum aequalitas et demonstrandum esse, cum vulgari isto conceptu de rationum aequalitate necessario coniunctam esse eam quam Euclides affert, proprietatem, et vice versa. Eodem fere redire videntur, quae Galilaei monet (vid. principio della

Quinta Giornata del Galileo dettata ad Evang. Torricelli: Elem. Euclid. Ital. editis a Carlieri Flor. 1769. p. 11. qui ita habet: Quodnam ingenium adeo felix est, ut cerciat, quatuor magnitudinum proportionalium aequemultiplicia semper (Euclideo more) inter se convenire? Aut quis novit, ista aequemultipla non semper convenire, etiamsi istae magnitudines non sint proportionales? — Euclidis itaque illud assertum Theorema potius esse ait, quam definitionem. Et varia haec contra Euclidis theoriam dubia alii alio modo evitare vel refellere studuerunt. Atque ii quidem, qui nulla Euclidis ratione habita diversam ab eo quantitatum proportionalium theoriam dederunt, huc non pertinent. Inter eos autem, qui sua cum Euclide conciliare voluerunt, ii maxime perfunctorie versati esse videntur, qui ut Tacquetus, Toricellius, van Swinden aliique plurima ab Euclide demonstrata theoremata v. c. 7. V. 8. V. 9. V. Axiomatum fere loco habuerunt, quippe quae declaratione potius subinde aliqua, quam demonstratione egere putarent. Aliam deinde rationum aequalium notionem sumentes, demonstrare sategerunt, Euclidis notionem cum ea qua ipsi usi erant, convenire, atque ex ea derivari posse. Perfunctorie diximus eos in hac re versatos esse. Neque enim hoc est demonstrare v. c. duas rationes, quae eidem tertiae aequales sint aequales esse inter se, si tantum affirmaveris, rem ita se habere, nec provocare licet ad Ax. I. 1 quum id, quod de duabus magnitudinibus valet, nequaquam applicari semper possit ad duas, quae inter magnitudines obtinent, rationes aut relationes. Ad demonstrandum autem Euclideam notionem rationum aequalium cum sua notione convenire, plerique ut per se clarum sumunt, datis tribus quantitatibus A, B, C, dari semper quartam, ad quam C eandem rationem habeat, quam habet A ad B quod pariter sine demonstratione, qua ratione illa quantitas D inveniri possit, sumta a rigore Euclidi solemni alienum esse videtur. Id tamen praeeunte Campano et Clavio, qui caeterum cum Tacqueto in hac re nihil commune habet, sibi permiserunt Tacquetus, Galilaei, Carlieri, aliique. Saccherius contra (Euclid. ab omni naevo restitut. p. 111 sqq.) quam maxime instat, illud posse

ntum in Geometria sumere haud licere. Cf. Pfleiderer. de limens. Circuli P. II. §§. 51. 52. et Rob. Simson in notis d V. 18. Plura, praeterea alia notatu dignissima contra Tacqueti similesque aliorum obiectiones habet Barrow in Lection. Cantabrig. habitis 1666. Lect. VII. e quibus haec adhuc afferemus. «Nulla, inquit p. 297 sqq., definitio rei cuiusvis naturam aliter explicat, quam aliquam eius affectionem necessariam et reciprocam, id est, huic nostrae parem, assignando. Qui circulum e radiorum paritate, triangulum e trium rectarum concursu spatium includente etc. definit, quid aliud quam figurarum istarum naturam ex affectionibus quibusdam suis explicat? Nec dari aut concipi potest natura ab affectionibus eiusmodi necessariis distincta, iisve prior. Habere talem aliquam affectionem ipsa rei natura est, ei essentiale est, eam constituit. Unde qui dicit: res talem habens affectionem, eius naturam explicat. Igitur Euclides cum proportionalium affectionem necessariam exhibuerit, eius naturam, quantum fieri solet et potest, abunde declaravit et explicuit. Caeterum Euclidi reliquisque definitionum auctoribus lex iniusta et impossibilis figitur, scilicet, ut demonstrent, definitionis praedicatum subiecto convenire: non tenentur, neque possunt id demonstrare, sed gratis assumunt, hoc est, attributo proprium subiecti nomen imponunt ex arbitratu suo. Num incumbit mihi demonstrare, circuli nomen solis pares radios habentibus figuris competere? Minime vero, sed iis omnibus et solis jure meo circuli nomen adsigno. Eodem plane modo pro lubitu suo (quamvis non temere nec imprudenter, at certis de causis iustis illis et idoneis) aequalium rationum nomen attribuit ὁ στοιχειωτής omnibus et solis dicta proprietate praeditis rationibus; proportionalium appellamentum appropriat quantis conditionem istam obtinentibus; unde propterea hoc ipsum rationum aequalium et quantorum proportionalium nomen censendum est iis omnibus et solis congruere. — *Unicum est, quod definitionis auctor ostendere tenetur (exemplis scilicet ad sensum claris aut per evidentem discursum) attributum definitionis impossibile nihil aut mere imaginarium complecti, sed revera posse res existere proprietate seu conditione supposita praeditas.* —

Cum igitur perfacile perspicueque probari possit, idque pars praestetur ab Euclide, ubicunque definitionem hanc applic. materiae cuivis determinatae, dari quanta, quibus convenit huiusce definitionis hypothesis, nihil amplius est exigendum, eique licet optimo iure quantis iis omnibus et solis proportionalium nomen affigere. — Caeterum quod, hanc proprietatem proportionalibus accidere, theorema esse dicunt, respondeo, quod secundum rem ipsam omnis definitio est theorema, propositio scilicet demonstrabilis ex aliis subiecti definitionibus aut ex aliis reciprocis affectionibus prius attributis subiecto. Vicissim omne theorema poterit in definitionem compingi. Simili fere ratione iudicat Saccherius (Euclides ab omni naev. vindicatus p. 123.): „Licitum est unicuique definire, prout ipsi libuerit, terminos suae facultatis, dum tamen ex una parte eos nunquam usurpet, nisi iuxta Definitiones iam stabilitas, et ex altera accusari istae non possint de confusione unius termini cum altero" Cf. idem p. 125. Reapse etiam alii haud negant, iure suo Euclidem definitionem magnitudinum proportionalium eam, quae est Def. V. 5. dare potuisse, at eam tamen intellectu difficilem, et subobscuram, et ab affectione aliqua magnitudinum proportionalium, quae minus obvia sit, petitam esse putant, unde hanc Euclidis definitionem vel explicare, vel pariter ac Tacquetus, firmioribus tamen argumentis nec tot propositionibus Axiomatum loco habitis ex alia faciliore earundem definitione quasi Theorema derivare studuerunt, quo facto demum secure illa uti se posse putarunt. Atque his ipse etiam Clavius annumerandus videtur. Quamvis enim ille asserat, potuisse omnino Euclidem iure suo quantitates proportionales aut non proportionales appellare, ut def. 5 et 7 stabilivit, et quamvis etiam causam, qua permotus Euclides illis definitionibus usus sit, afferat veram omnino ab incommensurabilibus petitam, addit tamen, ex definitionibus istis non videri colligi posse, vere magnitudines, quarum aequemultiplices eam conditionem habeant, esse proportionales, vel non proportionales, etiamsi eas solum Euclides velit ita appellare. Itque ad excusandas Euclidis definitiones haec fere habet. „Si de magnitudinibus saltim rationabilibus quaestio fuisset, potuisse

ıino Euclides magnitudines proportionales eodem modo
nire ac VII. 20. Def. numeros proportionales. Dicere
ıpe poterat: Magnitudines proportionales sunt, cum pri-
secundae et tertia quartae aequemultipla est, vel eadem
s, vel eaedem partes, vel: cum prima secundam, et
ıia quartam aequaliter continet, eandemque insuper il-
s partem, vel easdem partes. Et simili ratione poterat
inire magnitudines non proportionales. At quum irratio-
es quoque complecti vellet, iam non uti poterat hac defini-
ıne, quod in irrationalibus maior magnitudo neque multi-
ex esse potest minoris, neque eam semel, aut aliquoties, et
super aliquam eius partem aut partes continere. Iam pu-
t Euclidem, cum omnis proportio rationalis sive mag-
itudinum commensurabilium sit ut proportio numeri ad nu-
ıerum, circumspexisse primum aliquid, quod certum sit
onvenire quibuslibet quatuor numeris, sive magnitudinibus
andem habentibus proportionem, vel non eandem, ut si
ıdem illud convenire demonstretur quatuor magnitudinibus
ıtiam incommensurabilibus, iure optimo magnitudines illae
quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportio-
nales, quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quae-
libet magnitudines commensurabiles, eandem habentes propor-
tionem, vel non eandem, necessario habere demonstrantur.
Primum itaque, sumtis propositionibus libri VII, quae nullo
modo ex V. 5. Def. et V. 7 aut omnino libro V. pendent,
ostendit: propositis quatuor numeris proportionalibus, sum-
tisque primi ac tertii aequemultiplis iuxta quamvis multipli-
cationem, item secundi et quarti aequemultiplis iuxta quam-
cunque pariter multiplicationem; si multiplum primi maius sit
multiplo secundi, fore etiam multiplum tertii maius multiplo
quarti; et si multiplum primi aequale sit multiplo secundi,
fore et multiplum tertii aequale multiplo quarti; si denique
multiplum primi minus sit multiplo secundi, fore et multi-
plum tertii minus multiplo quarti. Quod ita demonstrat.
Sint quatuor numeri proportionales a, b, c, d. Quoniam igitur
a : b = c : d, erit (VII. 13,) permutando, a : c = b : d. Iam, si
sumtum fuerit ma, mc, erit ma : mc = b : d (VII. 17,) pariter

que, si sumtum fuerit rb, rd, erit rb : rd = b : d, unde ex lemmate quod Clavius habet ad VII. 14, erit ma : mc = rb : rd, et permutando (VII. 13.) ma : rb = mc : rd, unde, si ma > = < rb erit mc > = < rd, quod ex VII. 20. Def. consequitur i. e. ex vulgari numerorum proportionalium Definitione consequitur ea eorum proprietas, quam Euclides V. 5. Def. exprimit. Deinde similiter demonstrat, si a : b > c : d, sumi posse aliqua multipl. ma, mc, et rb, rd, ita ut ma > rb, at non mc > rd, quod satis prolixe evincit. Itaque ex vulgari numerorum non proportionalium Definitione consequitur ea eorum proprietas, quam Euclides habet 7. Def. V. Pariter deinde vice versa ostendit e Definitionibus Euclidis 5. et 7. libri V. ad numeros applicatis, consequi vulgares numerorum proportionalium et non proportionalium Definitiones. Addit deinde, in magnitudinibus, quae aliis incommensurabiles sint, et quae ex Def. 5, V. proportionales sint, eam plerumque reperiri proportionem, quae in numeris exhiberi possit, nec unquam hactenus aliquid falsi aut absurdi ex applicatione Def. 5. et 7. ad magnitudines incommensurabiles deductum esse, unde colligit, generaliter recte se habere Definitiones 5, V. et 7. V. Quae tamen argumentatio an satis certa sit, quam maxime dubitamus. Coniectura illa potius, satis forte probabilis, quam demonstratio mathematica fuerit.

Giortano da Bitonto explicatione saltim aliqua opus esse putat, quo melius Definitio 5, V, quae multis obscura, et a principio remoto petita esse visa sit, intelligi possit. Hanc autem explicationem sequentibus Propositionibus Definitioni iis praemittendis, facileque probandis exhiberi posse putat:

Prop. 1. Si duae magnitudines sint multiplae alicuius tertiae, erunt illae aequales, si aequemultiplae illius tertiae fuerint; sin autem non aequemultiplae fuerint, ea, quae tertiam saepius continet, maior erit.

Prop. 2. Vice versa, si duae magnitudines sint multiplae alicuius tertiae, sintque istae magnitudines aequales, erunt illius tertiae aequemultiplae: sin autem fuerint inaequales, maior saepius eandem tertiam continebit, quam minor.

Prop. 3. Si sint duae magnitudines A, B duarum C, D aequemultiplae (v. c. A = mC, B = m D), et sint aliae duae

E, F pariter aequemultiplae earundem C, D (v. c. E=rC, F=rD), erit, si A>=<B, etiam B>=<F. (i. e. si mC>=<rC, erit etiam mD>=<rD).

Prop. 4. Si sint 4 magnitudines A, B, C, D, sitque prima A aequemultipla aut aequesubmultipla secundae B, ac tertia C est quartae D $\left(\begin{matrix}\text{scilicet, si } A=mB, \text{ et simul } C=mD \\ \text{vel } A=\frac{1}{m}B \quad \text{vel } C=\frac{1}{m}D\end{matrix}\right)$ sumantur primae et tertiae quaecunque aequemultipla F, G, (puta F=pA, G=pC), et secundae et quartae aequemultipla H, I (v. c. H=rB, I=rD) erit, prout F>=<H, etiam G>=<I (i. e. prout pA>=<rB, etiam pC>=<rD). Atque haec iam sufficiunt ad probandam Definitionis 5, V. possibilitatem, sive ad ostendendum, ut Barrow ait, attributum definitionis nihil impossibile aut mere imaginarium complecti, sed revera posse res existere proprietate seu conditione supposita praeditas. Simili deinde ratione possibilitatem Definitionis 8, V. ostendere studet.

Galilaei (in Dialogo supra citato) primum quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales esse dicit, si vel A=B, pariterque C=D, vel si A=mB, et C=mD i. e. si prima secundae B aequemultipla fuerit ac tertia C quartae D, vel, ut postea (ut Definitio irrationales magnitudines quoque comprehendat), at forte minus perspicue dicit, si excessus primae A super secundam B similis sit excessui tertiae C super quartam D. Atque ad hunc casum invertendo reduci posse sit eum, quo prima minor sit secunda, et tertia minor quarta. Hanc deinde Definitionem (quam caeterum irrationales quoque magnitudines clare satis complecti vix putaverim) cum Euclidea convenire ostendere vult hac fere ratione. Facile patere ait, si A:B=C:D, fore et 2 A:B=2 C:D, et generaliter mA:B=mC:D, pariterque A:2 B=C:2 D, et generaliter A:pB=C:pD, et adhuc generalius mA:pB=mC:pD, unde ex Definitione Galilaei consequatur, si sit A:B=C:D, adeoque et mA:pB=mC:pD, fore et, quoties mA>=<pB, simul mC>=<pD, quae sit conversa Definitionis Euclideae. Haec est Galilaei Prop. 1.

Similiter deinde, postquam quatuor magnitudines A, B, C, D non proportionales esse dixerat, si A aliquanto maior fuerit ea magnitudine A−E, quae ita comparata est, ut A−E : B = C : D, ex hac Definitione satis prolixe ostendit, consequi Conversam Def. 8, V, nempe tum esse posse aliquando mA > pB, quamvis non sit mC > pD. Sumatur nempe magnitudinis E tale multiplum mE, ut sit mE > B, pariterque sumatur magnitudinum A−E, et C aequemultipla m (A−E), mC. Pariter sumatur magnitudinis B tale multiplum pB, quod ex multiplis magnitudinis B primum maius sit magnitudine m (A−E), nempe, ut sit quidem pB > m (A−E), at (p−1) B ≦ m (A−E), vel, quod eodem redit, m (A−E) ≧ (p−1) B, pariterque magnitudinis D sumatur aequemultiplum p. D. Iam si addantur mE et m (A−E), erit eorum summa, nempe mA (ob mE > B, et m (A−E) ≧ (p−1) B) semper > pB. At, quum A−E : B = C : D, erit ex Galil Prop. 1. quoties m (A−E) < pB, etiam mC < pD. Sumtum autem est m (A−E) < pB: itaque necessario mC < pD, quamvis sit mA > pB. Itaque, si quatuor magnitudines A, B, C, D non proportionales sunt, semper talia aequemultipla primae et tertiae, pariterque aliqua aequemultipla secundae et quartae inveniri possunt, ut sit quidem multiplum primae maius multiplo secundae, at multiplum tertiae non maius multiplo quartae, quae est Conversa 8. Def. V, seu Galil. Prop. 2.

His praemissis, iam Definit. 5, V, et 7, V. ex suis Definitionibus consequi, ita ostendit Galilaei. Si sint 4 magnitudines A, B, C, D ita comparatae, ut, quoties mA >=< pB, etiam mC >=< pD, erit A : B = C : D. Si enim non sit A : B = C : D, sit e. g. A maior ea magnitudine A−E, quae ita comparata est, ut sit A−E : B = C : D, poteruntque ex Propositione Galilaei 2 talia aequemultipla mA, mC primae ac tertiae, pariterque aequemultipla pB, pD secundae et quartae inveniri, ut sit quidem mA > pB, at non simul mC > pD, quod est contra hypothesin. Atque haec est Galilaei Propos. 5.

Pariter denique Definitionem 7, V. ex suis Definitionibus ita deducit Galilaei. Si sint 4 magnitudines A, B, C, D

:a comparatae, ut sit quidem $mA > pB$, at non simul $mC > pD$, rit $A : B > C : D$, vel A maior erit ea magnitudine, quae ita omparata est, ut ad B eandem rationem habeat, quam habet C ad D. Si enim A non maior est ista magnitudine, illi aut iequalis, aut minor ea erit. Si illi aequalis sit, erit ex Prop. 1. Galilaei, quoties $mA > pB$, etiam $mC > pD$, quod est contra hypothesin. Sin autem prima A minor sit ea magnitudine, quae ad secundam eandem rationem habet, quam tertia habet ad quartam, id indicio est, tertiam maiorem esse ea, quae ad quartam eandem habet rationem, quam prima ad secundam. Erit itaque aliquo $C-E$ ita comparata, ut $A : B = C-E : D$, adeoque ex Prop. 1. Galilaei, quoties $mA >=< pB$, erit $m(C-E) >=< pD$. At posuimus $mA > pB$, itaque erit $m(C-E) > pD$, unde multo magis $mC > pD$, quod est contra hypothesin. Fieri igitur nequit, ut A non maior sit ea magnitudine, quae ad B eandem rationem habet, quam C ad D; maior itaque erit, sive erit $A : B > C : D$, quae est Propositio 4. Galilaei.

Borellus autem, de cuius dubiis contra Euclidis methodum mox videbimus, pariter ab alia magnitudinum proportionalium et non proportionalium Definitione progreditur, distinctis casibus, quibus illae magnitudines vel commensurabiles sunt, vel non. Nempe si quatuor quantitatum prima secundae, et tertia quartae aeque multiplae fuerint, vel eadem pars, vel eaedem partes: quatuor quantitates vocantur proportionales commensurabiles, et proportio (ratio) commensurabilis quantitatis primae ad secundam eadem vel aequalis proportioni (rationi) quantitatis tertiae ad quartam. Sin autem quantitas prima maior (vel minor) fuerit illa quantitate, quae ad secundam eandem rationem commensurabilem habet, quam tertia habet ad quartam: vocatur ratio primae ad secundam maior (vel minor) commensurabili ratione tertiae ad quartam. Si vero quatuor quantitatum antecedentes fuerint incommensurabiles consequentibus, et ratio quantitatis primae ad secundam maior (minor) fuerit, atque ratio quantitatis tertiae ad quartam minor (maior) sit eadem tertia commensurabili ratio-

ne: vocatur ratio primae quantitatis ad secundam maior (minor) illa incommensurabili ratione, quam tertia habet ad quartam. Denique si in quatuor incommensurabilibus quantitatibus ratio primae ad secundam non fuerit maior nec minor ea ratione incommensurabili, quam tertia habet ad quartam: tum ratio incommensurabilis primae ad secundam eadem vocatur rationi tertiae ad quartam, et quatuor istae quantitates vocantur proportionales incommensurabiles. His deinde Definitionibus suam proportionalium theoriam superstruit, et denique ad finem libri Euclideas Definitiones ut theoremata e suis deducit. Et ipse etiam Barrovius iudicat, eius methodum in se spectatam admodum pulchram et elegantem esse (III. c. p. 333 et 314.) et, si nulla daretur alia, haberi posse pro sufficiente ac satis absoluta, ac fuisse eum in sua methodo exstruenda feliciorem quam in Euclidea diruenda. Displicet tamen ei in Definitionibus Borelli generalis subiecti distractio, et per inferiora circuitus, quum dari possit et ab Euclide exhibeatur rationum aequalium omnigenarum (ut et (inaequalium) proprietas aliqua generalis, ex qua possunt universaliter definiri. Minus placet rationum incommensurabilium negativa Definitio, et praeposterum videtur ex inaequalitate de aequalitate statuere. Omnis porro doctrina prolixior, et demonstrationes plerumque apagogicae anfractuosae videntur. Denique potissimum displicet Barrovio harum definitionum ad speciales materias applicatio. Non enim, ut apud Euclidem v. c. in 1, VI. aut 33, VI. definitionum ope statim innotescit, aut ex iis promte deducitur rerum proportionalitas, sed ex intermediis propositionibus, iisque non adeo comprehensu facilibus, et per indirectam argumentationem comprobatis demonstratur. Ad eas autem, quas contra Euclidis doctrinam Borellus affert obiectiones praeter ea, quae supra habuimus, Barrovius monet (p. 314. sequ. coll. p. 306.) obscuritatem illam, quam Euclidi obiiciat, vel in re ipsa positam esse, vel ex interpretum incuria, vel e discentium culpa repetendam esse. Rem ipsam quidem habere omnino aliquid difficultatis propter asymmetriam quantorum, sic ut nemo non

arduum esse fateatur, affectionem aliquam proportionalibus aeque congruam deprehendere, definitionem aliquam cunctas rationum aequalitates complectentem exhibere. Quod et hinc pateat, quod praeclaris viris huic morbo remedium adhibere conniseis hactenus acciderit, ut vel nihil praestiterint omnino sufficiens, aut viis institerint prolixioribus, nec minus impeditis, et implicitis, aut methodos saltim tradiderint culpae cuiquam graviori subditas; caeterum Euclidis verba esse clarissima, nullam in vocabulis amphibologiam, nullum a prolixitate taedium, semperque directissimum adhibere discursum, hinc tantam obscuritatem aut difficultatem subesse non posse, nisi quis arcanam, nescio quam, naturam, omni definitionem ingrediente proportione priorem, quae certe nulla sit, commiare velit. Interpretes omnino rem omnem exemplis illustribus et appositis illustrare debere, nec eos forte ab omni culpa liberari posse. Maxime vero discentes sibi plerumque deesse. Quum enim definitionis verba clarissima sint, quotusquisque tamen sit, qui iis penitus intelligendis operam navet, quâ tantam a suo stomacho patientiam impetret, ut trium lineolarum sensum accurate perpendat? Neque vero (ibid. p. 319.) Euclidem eapropter definitionem suam 5. V. insufficientem iudicasse, quoniam in libro VII. adhibuerit aliam. Sibi minus probata, nedum improbata proferre abhorruisse sane ab Euclidis ingenio. Contra potius, quia septimi libri definitionem omnigenae proportionalitati deprehenderit haud competentem, solis utpote symmetrorum proportionabilibus adaptabilem, hanc vero compererit universis congruam, idcirco, dum hic loci generalem iniret analogiae tractatum, illa reiecta hanc amplexatum esse iure meritoque. Illam vero (20. Def. VII) symmetris proportionalibus applicuisse non tam necessitatis quam commoditatis gratia, quia nonnihil ad vulgarem captum istius specialis materiae respectu facilior ac simplicior visa fuerit. — His, quae Barrovius habet, addi potest, multis editoribus, et praecipue Rob. Simsoni, ut supra diximus, Defin. 3, V. et 8, V. in quibus pariter de rationibus et rationum aequalitate sermo est, serius additamentum esse vi-

deri. — Denique Barrovius addit, quod Borellus crimineur, facillimam Propositionem: si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et prima superet secundam, tertiam quoque necessario excedere quartam, e Definitione Euclidis derivari non posse, falsum omnino esse, et posse facillime illam e doctrina Euclidis demonstrari. Ipse etiam eiusmodi demonstrationem exhibet indirectam, sed perspicuam. Atque ita omnibus illis priscae aetatis obiectionibus satisfactum esse videri poterat. A recentiori aetate Euclidis theoriam acerrime denuo impugnavit Thom. Simpson. (Elem. of Geometry Lond. 1800.) Is nempe, postquam ipsius Rob. Simsonis, magni illius Euclidis administeris et propugnatoris verbis docuerat, verba, *maior*, *eadem sive aequalis*, *minor*, de magnitudinibus et rationibus diverso prorsus sensu dici, adeoque non licere Axiomata de magnitudinibus aut aequalibus aut inaequalibus proposita immediate ad rationes applicare, unde etiam ipse Rob. Simson vulgarem Propos. 10, V. demonstrationem reiiciat, addit, omnem Rob. Simsonis obiectionem eo niti, quod neget, tuto sumi posse, rationem A:C non posse simul maiorem ac minorem esse ratione A:B. At ita ex Defin. 7, V. nunquam quemquam scire, posse, an ratio A:B maior aut minor sit ratione C:D. Nempe Euclidem dicere quidem, esse A:B>C:D, si accident unquam, ut mA>nB, nec tamen simul mC>nD. Verum enim vero, quum inter multipla tertiae et quartae pro libitu sumta quaedam etiam ita comparata esse possint, ut sit pC>qD ut Definitio sibi constet, demonstrandum esse, tum nunquam fieri posse, ut sit simul pA=<qB. Hoc enim si fieri posset, esset etiam ex Defin. 7, V. A:B<C:D. Usquedum igitur hoc praestetur, quod fieri posse haud negare velit, quamvis difficile ipsi videatur, nullius usus esse Definit. 7, V. et totum Euclidis aedificium theoriae proportionum fundamento parum valido superstructum videri. Hinc etiam ipse Propositionem 10, V; 13, V et reliqua iis, aut Definitioni 7, V. innixa prorsus omittit. Caeterum sibi persuasum esse dicit, habuisse omnino homines ante Euclidis tempora aliquam rationum et proportionum notionem magis minus distinctam, quam Euclides

liquantum expoliverit, quo facilius incommensurabilibus adaptari possit, ita vero primam et originariam huius notionis formam adeo immutatam esse, ut aliqua ingenii vi opus sit ad eam in Euclidis Definitionibus agnoscendam. Caeterum multum subtilitatis et acuminis habere hanc Euclidis theoriam, at subobscuram sibi videri, adeoque tantis laudibus efferri, ac a Rob. Simsone fiat, haud debere.

Gravia haec contra Euclidis theoriam dubia removeri tamen videntur observationibus, quibus Pfleiderer et Nordmark eam stabilire tentarunt. Prior quidem in Dissertat. Academicas Expositio ac Dilucidatio Libri V. Element. Euclid. P. 1. Tubing. 1782 (Pars II. nunquam prodiit), et potissimum in Dissertatione inserta Promtuarii Mathematici Hindenburg. 7. et 8. fasciculo p. 257. sqq. et 440 sqq. ad defendendam Euclidis theoriam haec fere habet, quae, quantum fieri potest, brevissime hic sistimus.

§§. 1—8. Qui rationem duarum magnitudinum eiusdem generis A, B inter se commensurabilium indicare volunt, docent, esse magnitudinem A magnitudinis B aut aliquod multiplum, aut aliquam partem, aut aliquas partes, vel esse aut $A = mB$, aut $A = \frac{1}{n}B$, aut $A = \frac{m}{n}B$, ubi m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ exponentis nomine veniunt: sin autem A et B incommensurabiles sint, docent, esse $A > \frac{r}{n}B$ et $< \frac{r+1}{n}B$, ubi $\frac{r}{n}$ et $\frac{r+1}{n}$ limites exponentis rationis A : B vocant. Unde, si quantitates sunt commensurabiles, erit vel $A = mB$, vel $nA = B$, vel $nA = mB$; sin autem sint incommensurabiles, erit $nA > rB$; at $nA < (r+1)B$. Atque in hac ultima expressione de nulla magnitudinum divisione, sed de multiplicatione tantum i. e. repetita additione sermo est, quae simplicior est divisione. Caeterum Euclides, qui hanc ultimo loco positam expressionem adhibet, pariter ac Archimedes (de sphaera et cylindro Libr. 1. et quadrat. parabol. Praef.) tacite postulat, eiusmodi magnitudinum homogenearum minorem ita multiplicari posse, ut superet maiorem.

§§. 9—12. Duas rationes A:B, C:D vulgo aequales esse dicunt, si commensurabiles sint A et B, adeoque etiam C et D, quando eundem utraque ratio exponentem habet, aut, si incommensurabiles sint, quando utriusque exponens intra eosdem semper terminos cadit, h. e. priore casu, si $A=mB$, debet etiam esse $C=mD$; si $A=\frac{1}{n}B$ (vel, quod eodem redit, si $nA=B$) debet simul $B=\frac{1}{n}D$, vel $nB=D$; si $A=\frac{m}{n}B$ (vel $nA=mB$), debet etiam $C=\frac{m}{n}D$, vel $nC=mD$ esse: sin autem incommensurabiles sint, debet pro numero quocunque n, pro quo est $A>\frac{r}{n}B<\frac{r+1}{n}B$ etiam esse $C>\frac{r}{n}D<\frac{(r+1)}{n}D$. vel, ut aliter dicamus: quoties $nA>rB$, at $<(r+1)B$, debet etiam esse $nC>rD$, at $<(r+1)D$, et vice versa. Euclides autem in Definitione V. 5. ad aequalitatem rationum $A:B$ et $C:D$ postulat, ut quoties $nA>=<mB$, sit simul $nC>=<mD$. Euclidis itaque Definitio, quod ad quantitates commensurabiles attinet, eo quidem respectu plus continet quam altera, quam vulgarem vocabimus, quod non tantum vult, si $nA=mB$, debere etiam esse $nC=mD$, sed etiam addit, quoties $nA>=<mB$, debere etiam esse $nC>=<mD$. Id vero nihil difficultatis habet, et inservit omnibus una expressione complectendis. Contra autem (§§. 35. 36.) eos quidem casus (quum m, n proprie pro numeris unitate maioribus sumantur) non expresse habet, quibus vel $A=mB$, vel $nA=B$, tacite tamen eos complectitur. Nempe, si $A=mB$, erit simul $pA=pmB$. Ut itaque esse possit $A:B=C:D$, ex Euclidis Definitione simul esse debet $pC=pmD$, adeoque $C=mD$. Pariter, si $nA=B$, erit simul $pnA=pB$. Ut itaque esse possit $A:B=C:D$, erit ex Euclidis Definitione simul $pnC=pD$, adeoque $nC=D$. Quod vero ad quantitates incommensurabiles attinet, ut dici possit, esse $A:B=C:D$, ex Euclidis sententia, quoties $nA>=<mB$, esse debet simul $nC>=<mD$. In his autem conditionibus manifesto continentur conditiones Definitionis vulgaris, quibus, si $nA>rB<(r+1)B$, esse debet simul

$mC > rD < (r+1)D$. Nec opus est iam pro multiplo aliquo mA determinare multipla proxime se insequentia rB, $(r+1)B$, quae ad limites rationis determinandos pertinent, atque hactenus simplicior est Euclidea ratio. Semper itaque, quae ex Euclidis Definitione proportionalia sunt, proportionalia sunt etiam ex Definitione vulgari.

Contra vero, quoties ex vulgari Definitione sit $A : B = C : D$, esse etiam aequalitatem rationum ex Euclidea Definitione, auctor, expositis §§. 14—30. antea quibusdam propositionibus facillimis, quae ad doctrinam de multiplis et aequemultiplis pertinent, et quorum pars est apud Euclidem Prop. 1, V; 2, V; 3, V, aliisque, quae hic pro Axiomatibus vel Lemmatibus sumere liceat, v. c. si $a = b$, esse $ma = mb$, et vice versa; contra, si $a > b$, esse $ma > mb$, et vice versa (cf. Axiom. ad initium libri V.) ita fere §§. 31—46. demonstrat. Ut dici possit, esse $A : B = C : D$, si magnitudines sunt commensurabiles, ex vulgari Definitione erit vel $A = mB$, et simul $C = mD$, vel $nA = B$, et simul $nC = D$; vel $mA = nB$ et simul $mC = nD$. Sit (§§. 31. 32.) 1.) $A = mB$, et $C = mD$, erit itaque, si p denotet numerum quemcunque, etiam $pA = pmB$, et $pC = pmD$. Itaque, quoties $pa >= < qB$ (q pariter denotante numerum quemcunque) erit etiam $pmB >= < qB$, adeoque $pm >= < q$, unde et $pmD >= < qD$ i. e. $pC >= < qD$.

Sit 2.) $nA = B$, $nC = D$, erit etiam $qnA = qB$, et $qnC = qD$. Itaque, quoties $pA >= < qB$, etiam $pA >= < qnA$, et $p >= < qn$, adeoque $pC >= < qnC$ i. e. $pC >= < qD$.

Denique sit 3.) $nA = mB$, et simul $nC = mD$, erit itaque, quoties $pA >= < qB$, etiam $npA >= < nqB$. At, quum $nA = mB$, erit pnA vel $npA = pmB$, itaque, quoties $pA >= < qB$, erit $pmB >= < nqB$, vel $pm >= < nq$, adeoque $pmD >= < nqD$. At ob $nC = mD$ (hyp.), erit $pnC = pmD$. Itaque, quoties $pA >= < qB$, erit $pnC >= < nqD$, vel $pC >= < qD$. Quoties igitur ex vulgari Definitione duae rationes quantitatum commensurabilium aequales sunt, eaedem etiam aequales sunt ex Euclidea Definitione.

Si autem (§§. 33. 34.) quantitates sint incommensurabiles, erit ex vulgari Definitione $A:B=C:D$, si quoties $nA>rB<(r+1)B$, simul etiam fuerit $nC>rD<(r+1)D$. Itaque, quoties $nA>mB$, esse debet $mB=<rB$, adeoque $m=<r$, et $mD=<rD$. Quoties igitur $nA>mB$, erit nC (quod ex hypoth. $>rD$) $>mD$. Quoties autem $nA<mB$, esse debet $mB=>(r+1)B$, adeoque $m=>r+1$, et $mD=>(r+1)D$, adeoque nC (quod ex hypoth. $<(r+1)D$) erit $<mD$. Et, quum hoc casu nunquam esse possit nec $nA=mB$, nec $nC=mD$, pariter quae ex vulgari Definitione proportionales sunt quatuor quantitates incommensurabiles, proportionales erunt etiam ex Definitione Euclidea. Omnibus itaque casibus certi esse possumus, quantitates, quas ex una Definitione proportionales esse dicimus, proportionales esse etiam ex altera Definitione diiudicatas.

Hactenus de aequalitate duarum rationum dictum est. Veniamus nunc (§§. 37—46.) ad rationes inaequales. Et *hic* quidem (§. 38,) distingui possunt varii casus, prout in utraque ratione quantitates sint commensurabiles; vel in utraque incommensurabiles, vel in una commensurabiles, in altera incommensurabiles. Sint itaque 1. (§. 39.) A et B pariterque C et D commensurabiles, eritque ex vulgari Definitione $A:B>C:D$, si exponens rationis $A:B$ maior est, quam exponens rationis $C:D$ et vicissim. Itaque, si $A=mB$, debet esse $C<mD$; si $A=\frac{1}{n}B$; erit $C<\frac{1}{n}D$; si $A=\frac{m}{n}B$, erit $C<\frac{m}{n}D$: vel, ut aliter dicamus, si $A=mB$, at $C<mB$; si $nA=B$, at $nC<D$; si $nA=mB$, at $nC<mD$, erit $A:B>C:D$, et vicissim. Sint deinde 2. (§. 40.) A et B commensurabiles, C et D incommensurabiles, eritque ex communi Definitione $A:B>C:D$, si $A=mB$ (ubi sumitur $m=>(r+1)$, unus nempe maiorum limitum secundae rationis), at $C>rD<(r+1)D$, adeoque $C<mD$; vel, si $nA=B$, at $nC<D$, vel si $nA=mB$ (sumto iterum $m=>(r+1)$), at $nC>rD<(r+1)D$, adeoque iterum $nC<mD$. Iam hi quidem casus, ubi in utraque,

: in priore saltim ratione quantitates occurrunt commensu-
ıiles, non expresse memorantur in *Euclidis* Definitione,
n tamen exeludunur. Nempe (§. 44,1) si A=mB, et
<mD, sit C+E=mD. Quoties igitur C=<E, erit 2C=
C+E i. e. 2C=<mD, at 2A(=2mB) >mB, ubi igitur ha-
mus aequemultipla primae et tertiae 2A, 2C, quorum illud ma-
s est multiplo aliquo secundae mB, hoc vero non maius aeque-
ultiplo quartae mD. Sin autem C>E, sumi potest aliquod
ultiplum magnitudinis E v. c. rE>C, vel C<rE, itaque rC+
<rC+rE i. e. (r+1) C<r (C+E) <rmD: contra vero (r+1)
>rA i. e. >rmB. Si deinde (§44, 2.) nA=B, at nC<D,
empe D=nC+E, erit, si C=<E, adeoque nC+C<nC+E,
el (n+1) C=<D, 2(n+1)C=<2 D: at (n+1) A<nA
el >B, adeoque 2 (n+1) A>2B. Sin autem C>E, sit
:<rE, eritque rnC+C<rnC+E i. e. (rn+1) C<r (nC+E)
'el <rD: contra autem rnA+A vel (rn+1) A>rnA vel >rB.
Denique (§. 44, 3.) si nA=mB, at nC<mD, nempe mD=nt
C+E, erit, si C=<E, nC+C=<nC+E i. e. <mD: at
(n+1) A>nA i. e. >mB. Sin autem C>E, et sumatur C<
rE, erit denuo rnC+C< rnC+rE i. e. (rn+1) C<r (nC+E)
i. e. <rmD: at (rn+1) A>rnA i. e. >rmB. Semper ita-
que habemus aliqua aequemultipla primae ac tertiae, quorum
illud quidem maius est aliquo multiplo secundae, hoc vero
non maius aequemultiplo quartae.

Contra vero (§. 45.) si ex *Euclidis* Definitione est A:B>
C:D, nempe, si pA>qB, at pC=<qD, sitque A=mB, erit
C<mD. Nam ob pA>qB, vel pmB>qB, erit et pm>q,
adeoque pmD>qD. At pC=<qD, unde semper pmD>pC,
vel mD>C i. e. C<mD.

Pariter, si, reliquis manentibus, sit nA=B, erit nC<D.
Nam ob nA=B, erit qnA=qB. At ex hypoth. pA>qB,
itaque pA>qnA, et p>qn, adeoque pD>qnD. At ex hy-
poth. pC=<qD, adeoque npC=<$\binom{nqD}{qnD}$
adeoque semper pnC<pD, et nC<D. Denique, si caeteris
manentibus nA=mB, adeoque pnA=pmB, vel npA=mpB,

erit, ob $pA > qB$ (hyp.) $npA > nqB$, adeoque $mpB > nqB$, vel $mp > nq$, adeoque $mpD > nqD$. At $pC = < qD$, adeoque $npC = < nqD$, et $npC < mpD$, et $nC < mD$. Rationes igitur huius generis, quae ex *Euclidis* Definitione inaequales sunt, inaequales etiam sunt ex communi Definitione.

Veniamus iam ad eos casus, quibus prior ratio $A:B$ habet quantitates incommensurabiles, et tum erunt vel C et D commensurabiles, vel non. Sint commensurabiles (§. 41.), eritque ex *vulgari* Definitione $A:B > C:D$, si $A > \frac{r}{n}B < \frac{r+1}{n}B$, at C vel $= \frac{r}{n}D$ vel $< \frac{r}{n}D$, adeoque, si $nA > rB$, at $nC = < rD$, et vice versa. Denique sint (§. 42.) A et B pariter ac C et D incommensurabiles, eritque ex vulgari Definitione $A:B > C:D$, si $A > \frac{r}{n}B < \frac{(r+1)}{n}B$, at tantum $C > \frac{(r-1)}{n}D < \frac{r}{n}D$, vel adeo $C < \frac{(r-1)}{n}D$, itaque iterum, si $nA > rB$, at $nC < rD$ et vice versa.

Ex his omnibus deinde §. 46. concluditur, Definitiones, V. 5. et V. 7, continere conditiones et proprietates rationum inter se aequalium, aut quarum una maior est altera, quae in vulgari notione insunt, variosque ibi obvios casus, generalissime, et ita, ut ad paucissimos terminos omnia reducta sint.

Ex sola deinde *Euclidea* definitione rationum aequalium aut inaequalium, seposita prorsus vulgari notione, deducit *Pfleiderer* §§. 48. 49. 50. sive (§. 48.) magnitudines A, C ipsas cum quibusdam aequemultiplis magnitudinum B, D. sive magnitudines ipsas B, D cum quibusdam aequemultiplis magnitudinum A, C; sive denique (§. 49.) quaedam aequemultipla magnitudinum A, C cum quibusdam aliis aequemultiplis magnitudinum B, D comparemus, esse aut 1) quoscunque numeros integros, exclusa unitate, p, q denotent, semper simul $pA > = < qB$, et pC, $> = < qD$, aut 2) pro nonnullis numeris integris n, m (iterum exclusa unitate) $nA > mB$, at $nC = < mD$. (Esse quidem etiam potest, ut sub finem §. 50. observatur, $nC > mD$, et $nA = < mB$, at hic casus redit ad

priorem, litteris A et C, B et D inter se permutatis). Hinc efficitur §§. 51—54. omnes casus, qui in comparatione quatuor magnitudinum obtingere possint, aut sub Defin. 5, V. aut sub Def. 7. V. comprehendi, adeoque rationes aequales, maiores, minores eodem modo sibi invicem opponi, quo vulgo magnitudines aequales maiores, minores, ut itaque unum alterum excludat, nec cum illo simul consistere possit. Quod ipsum (§. 55.) *Saccherius* quidem demonstrare studuit, at non prorsus felici successu. Quibus omnibus simul sublata esse dubia *Thom. Simpson* patet.

Praeterea §. 56. alia adhuc ratione idem confirmatur, maxime ope eorum, quae supra ex §§. 44, 3. evicta sunt. Nempe 1) si A:B=C:D, adeoque ex Defin. 5, V. semper simul nA>=<mB, et nC>=<mD, adeoque nunquam nA>mB et simul nC=<mD, nec nC>mD, et simul nA=<mB: tum non esse potest nec A:B>C:D, nec A:B<B:D ex Def. 7, V. 2) Contra, si nec A:B>C:D, nec C:D>A:B, esse debet A:B=C:D. Nam si nA=mA, non esse potest nC>mD, nam tum foret C:D>A:B (Def. 7, V.) contra hypothesin; nec nC<mD, namquo tum foret (ex §. 44, 3 et Def. 7, V.) A:B>C:D pariter contra hypothesin; itaque esse debet A:B=C:D. Sit autem nA>mB, erit etiam nC>mD; namque si esse posset nC=<mD, foret A:B>C:D contra hypothesin. Denique, si nA<mB, debet pariter esse nC<mD, nam, si foret nC=>mD, esset C:D>A:B (§. 44, 3. et Def. 7, V.) Itaque tum semper est simul nA>=<mB et nC>=<mD, adeoque ex Def. 5, V. A:B=C:D. 3) Si non est A:B=C:D, itaque (Def. 5, V.) non semper simul nA>=<mB, et nC>=<mD, erit pro quibusdam numeris integris n,m aut α) nC><mD, dum nA=mB: tum vero primo casu est C:D>A:B (Def. 7, V.) altero est A:B>C:D (§ 44, 3. et Def. 7, V.), aut erit β) nC=<mD, dum nA>mB, at tum A:B>C:D (Def. 7, V.) aut erit γ) nC=>mD, dum nA<mB: tum vero C:D>A:B (Def. 7, V. et §. 44, 3.) 4) Si A:B>C:D, adeoque (Def. 7, V.) pro quibusdam numeris n, m est nA>mB, at nC=<mD, tum α) non pro numeris quibuscunque n,m simul erit nA>=<mB, et nC>=<mD,

adeoque non erit A:B=C:D (Def. 5, V.) nec β) tum esse potest A:B<C:D aut C:D>A:B i. e. pro nullis numeris integris p,q simul esse potest pC>qD, at pA=<qB. Nam ob nA>mB, at nC=<mD (hyp.) est etiam pnA>pmB, at pnC =<pmD, aut pmD=>pnC. Et si pC>qD, est etiam npC vel pnC>nqD, adeoque semper pmD>nqD, vel pm>nq, adeoque et pmB>nqB, unde tanto magis pnA>nqB, adeoque pA >qB. Atque etiam ita *Thom. Simpson* dubia remota sunt.

Denique observat *Pfleiderer* (§§. 57—62) si sit nA=nB, et nC=nD, fore etiam A=B, et C=D, adeoque prout pA< =<qB, i. e. prout pA>=<qA, fore p>=<q adeoque e pC>=<qC i. e. pC>=<qD, ac proinde A:B=C:D, vel posse Definitionem 5, V. etiam ad aequemultipla omnium 4 magnitudinem applicari, et nominatim (§. 60. Nr. 1.) si fuerit A=B, C=D esse A:B=C:D: pariter idem valere de Defin. 7, V. Vice versa etiam, si A:B=C:D, esse simul A>=< B, et C>=<D (vid. infra Prop.); sin autem A:B>C:D, esse debere C<D, si A=<B: contra vero esse debere A> B, si C=>D fuerit.

Nordmarkius autem (in Nov. Act. reg. Societ. Upsal. Vol. VI. Upsal. 1799. Nr. XIII. Lacunae in doctrina Proportionum Euclidea animadversae expletio.) ita in hac re versatur. Postquam obiectionem a *Thom. Simpson* factam contra Defin. 7, V. attulit, fatetur omnino §. 3. illa ipsum probandi nervum huius Definitionis prorsus esse incisum, frustraque ad Principium Contradictionis immediate provocari, ex rationibus ab ipso *Rob. Simson* exhibitis patere ait. Omnia autem, §. 4. addit, ex proportionum theoria omittere, quae ad rationes inter se inaequales pertineant, ut *Thom. Simson* fecerit, non sine doctrinae proportionum iactura fieri posse. Adiicit praeterea §. 5. multa etiam alia esse, quae nexum inter multiplicium attributa spectent, et adhuc quaeri possint, v. c. si mA=mB, at mC <mD, an tum A:B>C:D. Id vero *Euclidem* omittere. Quia (§. 6.) ipsam etiam Definitionem 5, V. internae possibilitatis demonstrationem desiderare, nec satis de nexu inter aequemultiplicium proprietates cogitasse Geometras, aut certe non satis caute semper loqui. Ita v. c. ipsum *Barrovium* p. 284. haec

habere: »Accidere potest in aliquo casu simultaneus iste defectus, excessus aut aequalitas etiam quantisminime proportionalibus; est solis proportionalibus universaliter convenit.» Id autem (de aequalitate) falsum esse. Si enim vel semel simul $mA = nB$, et $mC = nD$, necessario, quoties $pA >= < qB$, esse etiam $pC >= < qD$. Pariter (§. 7.) si semper simul $mA > < nB$, et $mC > < nD$, fore etiam semper simul $mA = Bn$ et $mC = nD$, unde prior conditio proprie sufficiat scopo Definitionis 5, V. Necesse itaque esse (§. 8.) notarum characteristicarum in Def. 5, V. et 7, V. obviarum partim per mutuum nexum absolutam necessitatem, partim compossibilitatem independenter ab ipsis Definitionibus demonstrare. Quod si non factum sit in Elementis *Euclidis*, id non ipsius auctoris, sed sine dubio temporis, quo plura deperdita fuerint, culpam esse. Praeterea sibi in animo esse, consensum quoque notionis vel definitionis quam vulgo de Proportionibus in Arithmeticis afferant, cum Euclidea ex ipsis his Definitionibus ostendere. Praemittit autem §. 10. Lemma 1. supra ad 3, V. ipsis auctoris verbis allatum quod brevitatis caussa ita exprimere liceat: Si sint quotcunque magnitudines A, B, C, D .... et aliae ipsis numero aequales $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.... quae binae sumantur in eadem multiplicitate, sit autem perturbata ipsarum multiplicitas h. e. sit

$$A = m\,B \text{ et } \gamma = m\,\delta$$
$$B = n\,C - \beta = n\,\gamma$$
$$C = p\,D - \alpha = p\,\beta$$

erunt ex aequo etiam aequemultiplices, sive quantiplex est A magnitudinis D, tantiplex erit α magnitudinis δ. Quod quidem *Nordmarkius* more Geometris solemni demonstrat, ut ad 3, V. vidimus, ex nostra autem expressione statim patet, dum tam $A = mnpD$, quam $\alpha = pnm\delta = mnp\delta$. Atque hoc quidem Lemma ab *Euclide* praetermissum esse miratur *Nordmark.* quamvis cum 3, V. arctissimo vinculo coniungatur, et omnia doctrinae proportionum arcana eo referentur, praesertim, quum in Prop. 20. 21. 22. 23. l. V. semper uterque casus quantitatum ordinate et perturbate sumtarum ostensus sit. Huic addit Lemm. 2. quod ita habet: α) Si duae quantitates commensu-

sabiles sint, erit 1) aliqua unius multiplex aequalis alicui alterius multiplici et 2) vice versa. β) Si autem duae magnitudines incommensurabiles sint, 1) non erit aliqua unius multiplex aequalis cuidam alterius multiplici et 2) vice versa. Quorum α, 1. et ope Lemm. 1. etiam α, 2. facile probatur, unde β) 1. 2. apagogice derivantur. His praemissis sequentia habet theoremata, quae primum ordine iunctim afferemus.

Theor. 1. Si vel semel acciderit, ut existente $mA=nB$, sit etiam $mC=nD$, erit $A:B=C:D$.

Theor. 2. Si, quando $mA \gtrless nB$, sit etiam semper $mC \gtrless nD$, erit $A:B=C:D$.

Theor. 3. Si, quando $mA>nB$, semper etiam sit $mC>nD$, et vicissim, quando $mC>nD$, semper etiam sit $mA>nB$, erit $A:B=C:D$.

Atque haec quidem ad ostendendum mutuum illum, qui inter multiplicium symptomata in Defin. 5, V. intercedit, nexum. Observat *Nordmark*. addi adhuc posse: si sit $A:B=C:D$, esse etiam $C:D=A:B$. Quamvis enim nimiam identitatis speciem prae se ferant Thesis et Hypothesis (unde etiam omiserit) adsertum tamen non constituere propositionem plane identicam, quae prae evidentia demonstrationem non admittat. Excludi enim semper debere in Propositionibus ita convertis binas adsumto contrarias hypotheses.

Theor. 5. Si acciderit aliquando, ut sit $mA=nB$, sed $mC<nD$, erit $A:B>C:D$.

Theor. 6. Si $A:B>C:D$, sitque $mA=<nB$, erit $mC<nD$.

Theor. 7. Si $A:B>C:D$, sitque $mC>nD$, erit $mA>nB$.

Theor. 8. Si $A:B>C:D$, sitque $mC=nD$, erit $mA>nB$.

Atque haec quidem ad Defin. 7, V, pertinent, et nominatim Theor. 7. obiectionem Simpsonianam directe et funditus tollit. Reliqua consensum notionis vulgaris aut Arithmeticae cum Definitionibus *Euclidis* ostendunt.

Theor. 9. Si (ex Euclidea Definitione) sit $AF:B=CE:D$, atque B et D in aeque multas partes quotcumque, utrimque seorsum aequales, dividantur, quarum unaquaeque in B sit $=G$, et unaquaeque in D sit $=H$, adeo, ut G et H ipsas B et

D aequaliter metiantur; auferatur porro G ex AF, quoties potest, donec vel nihil, vel se minorem relinquat: dico, toties auferri posse H ex CE, quoties G ex AF; et eodem modo superesse vel nihil, vel aliquam ipsa H minorem (i. e. si quantitates AF, B, CE, D ex *Euclidea* Definitione proportionales sint, proportionales sunt etiam ex *vulgari* notione.)

Theor. 10. Est conversum praecedentis.

Theor. 11. Si fuerit AF:B > CE:D (ex Euclidea Definitione); dabuntur aliquae tam parvae magnitudines G et H, quae ipsas B et D aequaliter metiuntur, ut G ablata ex AF quoties potest saepius in hac contineri deprehendatur, quam H in CE, quando nempe H ex CE aufertur, quoties potest. (Aliter: si ex Euclidea Definitione AF:B > CE:D, erit etiam ex vulgari Definitione AF:B > CE: D).

Theor. 12. Conversum praecedentis.

Ut autem methodus viri acutissimi uno certe exemplo pateat, liceat adponere, quam Theorematis 1. dedit demonstrationem.

Theor.

Si vel semel acciderit, ut existente mA=nB, sit etiam mC=nD, erit A:B=C:D. (f. 336.)

Dem. Sint E, G illae ipsarum A, C aeque multiplices, et F, H illae aequemultiplices ipsarum B, D, quae faciant E=F, et G=H: sint autem I, L ipsarum A, C utcumque aequemultiplices, et similiter K, M ipsarum B, D aequemultiplices quaelibet. Hisce positis, quantiplex est M ipsius D, tantiplices sumantur, N, O, P, Q ipsarum E, F, G, H; et quantiplex est H ipsius D, tantiplices sumantur R, S, T, U ipsarum I, K, L, M. Erunt ergo N, O, P, Q, ipsarum E, F, G, H aequemultiplices, et R, S, T, U ipsarum I, K, L, M. ideoque ob E=F, G=H, erit N=O, P=Q. Praeterea erunt (3, V.) N et P ipsarum A et C aequemultiplices, atque O et Q ipsarum B et D: pariterque R et T ipsarum A et C, atque S et U ipsarum B et D. Quia iam Q est ipsius H aequemultiplex ac M ipsius D, atque H ipsius D tantiplex, quantiplex est U ipsius M: erit (Lemm. 1.) Q ipsius D totiplex, quotiplex est U eiusdem D. Ergo

Q et U aequales erunt. Sed quantiplex est Q ipsius D, tantiplex est O ipsius B, et quotuplex est U ipsius D, totuplex est S ipsius B: ergo O et S sunt eiusdem B aequemultiplices, adeoque etiam aequales. Ponatur iam $I > K$; dico esse $L > M$. Quia enim R et S sunt ipsarum I et K aequemultiplices, et $I > K$; erit $R > S$, h. e. $R > O$ h. e. $R > N$. Sed utraque tam R quam N est ipsius A magis multiplex, quam N eiusdem A est. Ergo etiam T est ipsius C multiplicior, quam P eiusdem C est. Unde erit $T > P$, h. e. $T > Q$, seu $T > U$. Sed L et M sunt ipsarum T et U similes (easdem) partes: ergo etiam $L > M$.

Sit iam $I = K$, dico esse $L = M$. Etenim ob $I = K$, est $R = S$, h. e. $R = O$, seu $R = N$. Quocirca R et N sunt ipsius A aequemultiplices; ideoque etiam T et P ipsius C: unde $T = P$, h. e. $T = Q$, seu $T = U$. Ergo etiam $L = M$.

Quodsi denique $I < K$, dico, esse $L < M$. Nam, ob $I < K$, erit $R < S$, h. e. $R < O$, seu $R < N$. Ergo N est ipsius A multiplicior, quam R eiusdem A est: quocirca etiam P est ipsius C multiplicior quam T eiusdem C est. Unde $P > T$, seu $T < P$, h. e. $T = Q$ vel $T < U$. Unde etiam $L < M$.

Quum itaque ostensum sit, consistente $I \gtreqless K$, esse quoque $L \gtreqless M$, h. e. quando $mA \gtreqless nB$, esse simul $mC \gtreqless nD$, erit $A:B = C:D$ q. e. d. (Aliter haec demonstratio ita sisti potest. Si $mA = nB$, et $mC = nD$, erit, quoties $pA \gtreqless qB$, etiam $pC \gtreqless qD$, adeoque (Def. 5, V.) $A:B = C:D$. Nam, si $mA = nB$, et $mC = nD$, erit et $mqA = nqB$, et $mqC = nqD$. Itaque, si $pA \gtreqless qB$, erit $npA \gtreqless \begin{cases} nqB \\ mqA \end{cases}$, adeoque $np \gtreqless mq$, et $npC \gtreqless \begin{cases} mqC \\ nqD \end{cases}$, adeoque $pC \gtreqless qD$. Unde patet, hanc demonstrationem aliis verbis eandem esse, quam *Pfleiderer* dedit §. 31. Nr. 3.

His praemissis, Propositiones, quae ad theoriam Proportionum pertinent, semper eodem rigore e vulgari Proportionalium Definitione atque ex Euclidea derivari possunt, at demonstrationes e vulgari Definitione petitae, si iusto rigore eas exhibere velis, plerumque longiores sunt. (Cf. Playfair ad Def. 5, V.) V. c. Propositio 4, V. cuius demonstrationem Euclideam supra habuimus, e vulgari Definitione ita demon-

urabitur. Si A:B=C:D, erit etiam pA : qB=pC: qD, p et q denotantibus numeros integros quoscunque, unitate haud exclusa. Nam 1) quando commensurabiles sunt magnitudines A et B, C et D; ob A:B=C:D (supp.) ex vulgari Definitione simul erunt $A=\frac{r}{n}B$, et $C=\frac{r}{n}D$, adeoque et simul $pA=\frac{pr}{n}B$, et $pC=\frac{pr}{n}D$, et $pA=\frac{pr}{qn}.qB$, et $pC=\frac{pr}{qn}.qD$; unde ex vulgari Definitione pA:qB=pC:qD.

2) Quodsi magnitudines A et B, C et D sunt incommensurabiles; ex vulgari Definitione utriusque rationis Exponens iisdem continebitur limitibus, ita ut simul sint $A>\frac{r}{n}B$ et $<\frac{r+1}{n}B$, ac $C>\frac{r}{n}D$ et $<\frac{r+1}{n}D$, vel etiam $pA>\frac{pr}{qn}.qB$ et $<\frac{pr+1}{qn}.qB$, ac $pC>\frac{pr}{qn}.qD$ et $<\frac{pr+1}{qn}.qD$, unde etiam rationum pA:qB et pC:qD Exponentes iisdem respective limitibus $\frac{pr}{qn}$ et $\frac{pr+1}{qn}$ continentur (*Pfleiderer.* Expos. ac Dilucid. libri V. Elem. p. 18. 19.)

Post generaliores has ad librum Vtum observationes eas iam Propositiones, quas *Rob. Simson* huic libro inseruit, vel addidit, eodem ordine, eademque nota, qua ipse usus est, designatas exhibebimus. Demonstrationes tamen brevitatis caussa symbolice sistemus.

Est nempe apud *Rob. Simsonem* post V. 6. haec

Propositio A.

(Haec est ea ipsa Propositio, quam *Borellus* negaverat ex Euclidea theoria demonstrari posse, et quam doctiss. *Pfleiderer*, ut supra notavimus, sponte ex *Euclidis* praeceptis fluere ostendit l. c. §. 61. et in Expos. et Dilucid. libri V. p. 5. Prop. VI.)

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, fueritque prima maior secundâ, erit tertia maior quartâ; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Nempe, si A:B=C:D, fueritque A>=<B, erit (V. Ax. 3.) etiam 2A>=<2B. Tum vero, ob A:B=C:D, ex V. Def. 5. est etiam 2C>=<2D, adeoque pariter C>=<D.

Robert. Simson observat, Propositione hac saepissime ut Geometras, eamque in V. 25. VI. 31. XI. 34. XII. 15. adhiberi, à *Theone* autem eam ex Elementis sublatam esse putat, quoniam satis evidens visa sit ei, aliisque, qui confusaneam et indistinctam proportionalium ideam apud vulgus receptam substituant loco accuratae idea, quae ex Definitione V. 5. habeatur. Nullum enim dubium esse, *Eudoxum* vel *Euclidem*, qui hac nihilo difficiliores 7 mam sc. et 9 mam huius Libri demonstratione muniverit, etiam huic in Elementis locum dedisse. *Commandinum* quidem eam ut V. 16. Cor. subiunxisse, quod vero recte *Clavius* reprehendat, quoniam ita saltim ad quatuor magnitudines eiusdem generis pertinere videretur. Neque tamen ipsum *Clavium* aliam eius demonsrationem dedisse, sed asseruisse, eam perspicuam esse ex natura proportionum. Quo ipso occasionem dederit *Borello*, *Euclidem* iniuste cavillandi.

Propositio B.

(Vulgo Corollarium V. Prop. 4. ubi vide notata.)

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et inverse proportionales erunt. Si A:B=C:D, erit etiam Inverse: B:A=D:C. Sumtis enim aequemultiplis quibuscunque primae ac tertiae nA, nC, pariterque aliis aequemultiplis quibuscunque secundae et quartae rB, rD, erunt ex V. Def. 5. quoties nA>=<rB, etiam simul nC>=<rD, adeoque etiam, quoties rB>=<nA, simul rD>=<nC, unde ex V. Def. 5. est B:A=D:C (vel D:C=B:A.)

(Cor. Hinc consequitur, si A:C sit duplicata ratio rationis A:B, fore C:A duplicatam rationis B:A. Erit enim (V.Def. 10.) A:B=B:C, adeoque ex hac Propositione C:B=B:A, unde C:A est ratio duplicata rationis C:B, vel rationis B:A. Similia ostendentur de triplicata ratione etc.)

Prop. C.

Si prima aeque multiplex fuerit, vel eadem pars (vel, quod addi potest, eaedem partes) secundae, atque tertia quartae: erit prima ad secundam, ut tertia ad quartam: vel ut *Pfleiderer* rem exprimit (Expos. ac Dilucid. Libr. V. §. 29.) Magnitudinum A et B aequemultiplices, vel partes aeque aliquotae, vel et partes aeque aliquantae ad magnitudines ipsas A et B easdem respective habent rationes. Nempe $pA:A=pB:B$; $\frac{A}{q}:A=\frac{B}{q}:B$; $\frac{p}{q}A:A=\frac{p}{q}B:B$. Nam, cum tam $n(pA)=(np)A$, quam $n(pB)=(np)B$ (V. 3.) erit, quoties $n(pA)>=<rA$, simul $n(pB)>=<rB$, prout $np>=<r$, adeoque ex V. Def. 5. $pA:A=pB:B$. Sit deinde $\frac{A}{q}=E$, $\frac{B}{q}=F$, adeoque $A=qE$, $B=qF$, erit per modo demonstrata $qE:E=qF:F$, adeoque (Prop. B) $E:qE=F:qF$, i. e. $\frac{A}{q}:A=\frac{B}{q}:B$. Denique, quum sit $\frac{A}{q}:A=\frac{B}{q}:B$, erit etiam (V. 4, Cor. a.) $\frac{pA}{q}:A=\frac{pB}{q}:B$. Haec Propositio, ut *Rob. Simson* observat, saepius à Geometris usurpatur, et necessaria est in X. 5, et X. 6. Caeterum ex ea evincitur, ut supra è *Pfleidereri* Dissertat. Promtuario Mathem. *Hindenburgii* inserta §§. 31. 32. allatum fuit, quoties ex vulgari Definitione i. e. ex ea, quae habetur in VII. Def. 20. sit $A:B=C:D$, esset etiam aequalitatem rationum ex altera *Euclidea* Definitione, nempe V. Def. 5. Quod ipsum, ut supra vidimus, *Clavius* in notis post V. Def. 8. in numeris ostendit ope quarundam Propositionum libri VII, sc. V. Def. 5. quatenus numeris congruat, ex ea numerorum proportionalitate, quae in VII. Def. 20. habetur, demonstrari posse.

Prop. D.

(Conversa antecedentis.)

Si fuerit prima ad secundam, ut tertia ad quartam, fueritque prima multiplex, vel pars (vel partes) secundae;

erit tertia eadem multiplex, vel eaedem pars (vel eaedem partes) quartae.

Si enim $A:B=C:D$, erit etiam $A:qB=C:qD$, $mA:B=mC:D$, et $mA:qB=mC:qD$ (V. 4, et V. 4, Cor. 2.), unde ex Prop. A, si $A=qB$, erit et $C=qD$: si $mA=B$, vel $A=\frac{1}{m}.B$, erit $mC=D$, vel $C=\frac{1}{m}D$: si $mA=qB$, vel $A=\frac{q}{m}B$, erit $mC=qD$, seu $C=\frac{q}{m}D$. Observat *Rob. Simson*, hanc Propositionem non raro ad alias demonstrationes adhiberi, et necessariam esse ad demonstrandam VI. 9. Videri autem à *Theone* omissam esse propter rationem ad Prop. A. memoratam.

Prop. E.

quam habet *Rob. Simson* post V. Prop. 19.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, et convertendo proportionales erunt, vel si $A:B=C:D$, sitque $A>B$, adeoque etiam (Prop. A.) $C>D$, erit $A:A-B=C:C-D$. Nam, quum $A:B=C:D$, erit dividendo (V. 17.) $A-B:B=C-D:D$, et invertendo (Prop. B.) $B:A-B=D:C-D$. Quare componendo (V. 18.) erit $B+A-B:A-B=D+C-D:C-D$ i. e. $A:A-B=C:C-D$.

Observ. Eandem demonstrationem habet *Gregorii* in non ad hunc locum. Caeterum haec Propositio, quae cum V. 17. arcto nexu cohaeret, potest etiam pariter ac illa sine ope V. 18. demonstrari (*Pfleiderer.* Expos. ac Dilucid. Libr. V. p. 23.)

Cor. 1. Si quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales sunt, et $A<B$, adeoque etiam (Prop. A.) $C<D$: et etiam inverse (Prop. B.) $B:A=D:C$, adeoque ex hac Propositione $B:B-A=D:D-C$.

Cor. 2. Generatim itaque, si duae magnitudines inaequales A et B eandem invicem habent rationem, quam aliae duae inaequales C et D: erit et maior priorum duarum ad ipsarum differentiam, uti maior duarum posteriorum ad earundem differentiam; vel etiam inverse (Prop. B.) differentia duarum

priorum ad erundem maiorem erit, ut differentia duarum posteriorum ad ipsarum maiorem. Breviter, si A:B=C:D, erit etiam *convertendo* A:A—B=C:C—D, seu A—B:A=C—D:C, vel B:B—A=D:D—C, seu B—A:B=D—C:D.

Cor. 3. Generaliusque, si duae magnitudines inaequales eandem invicem habent rationem, quam aliae duae magnitudines inaequales: etiam alterutra priorum erit ad ipsarum differentiam, uti posterior homologa, seu quae priori ordine respondet, est ad differentiam posteriorum; et inverse (V. 17. Cor. 2. et Cor. 2. E. *Pfleiderer*. l. c. p. 25.)

Sub finem libri quinti *Rob. Simson* adhuc quatuor addit Propositiones, quas nos, cum cohaereant cum aliis ad Definitionem rationis compositae pertinentibus, reiecimus in Excursum ad Libr. VI. ubi de ea Definitione agitur. Plures praeterea Propositiones de rationibus inter se diversis *Euclidis* interpretes et commentatores libro quinto subiungere solent. Multas earum habet *Pappus* (Collect. Mathem. Libr. VII. Prop. 3—11.), quas ut Lemmata *Apollonii* libris de sectione rationis et spatii praemisit. Ex *Pappo* deinde *Campanus*, *Commandinus* (qui expresse se eas ex *Collectionibus Pappi* transferre monet, immutato tamen ordine, et quibusdam additis detractisve) *Clavius*, *Tacquetus*, *Barrovius*, *Baermannus* aliique has Propositiones huc transtulere, aliasque similes adiecere. Plerique omnes tamen in iis demonstrandis pro Axiomate aut Postulato sumserunt, posse tribus magnitudinibus datis semper aliquam quartam proportionalem, vel duabus datis tertiam proportionalem inveniri, quod ipsum pro Axiomate sumi haud licere supra ad Axiomata libri V. monuimus, ex pro lineis rectis demum in libri VI. Propositionibus 11 et 12. demonstratur. *Hauberus* autem, vir doctissimus nunc Seminarii Schönthalensis Professor in Dissertatione »Propositionum de Rationibus inter se diversis Demonstrationes ex solis libri V. Elementorum Definitionibus ac Propositionibus deductae Tubing. 1793.« sine ope illius Postulati eas demonstravit, ita ut primum Propositiones ad duas vel

plures rationes inter se diversas *universim* pertinentes stabilu: et deinde ad eos casus progrederetur, quibus omnes omn- rationum termini sunt eiusdem generis. Ita autem rem e. dit *Hauberus*. Praemittit §§. 2—4. Lemmata, quorum pr cum Axiomatibus ad Librum V. supra allatis consentit. Nemp §. 2. si A=B, erit etiam mA=mB, et vice versa: co si A>B, etiam mA>mB, et vice versa. §. 3. Si A= et m>n, erit mA>nB. Contra, si mA>nB, erit m>n at, si mA=nB, erit m=n. §. 4. n.(mA)=m.(nA). De sequentes Propositiones, earumque demonstrationes exhib quas consentiente amicissimo auctore hic denuo sistimus.

Propositio a. (*Hauberi* Prop. 1. Diss. §. 5. apud *Pappum* VII. 7. apud *Clavium* V. 26.)

Si quatuor magnitudinum A, B, C, D prima A ad secundam B maiorem rationem habet quam tertia C ad quartam D, inverse secunda B ad primam A minorem rationem habebit, quam quarta D ad tertiam C. Breviter, si A:B>C:D, erit B:A<D:C, seu D:C>B:A. Demonstratio. Ob A:B>C:D (supp.) sumi poterunt (V. Def. 7.) mA, mC, et nB, nD ita, ut mA>nB, et mC=<nD. Quodsi fuerit mC<nD, vel nD>mC, cum sit nB<mA, constabit propositum ex V. Def. 7.

Sin autem sit mC=nD: quoniam est mA>nB, nB+E=mA, et 1) E=>A, quibus subductis, erit nB=<(m−1)A: et, cum nD=mC (supp.) >(m−1)C, rursus per V. Def. 7. constat propositum. Iam, si 2) sit E<A, fa aliquod multiplum E, velut rE>A (V. Def. 4.). Tum, qu nB+E=mA, erit etiam (V. Ax. 1.) r(nB+E) i. e. (V. 1.) rnB+rE=rmA, unde, demtis rE>A, erit rnB<(rm−1)A Sed, quia nD=mC, erit et rnD=rmC>(rm−1)C. Unde ex V. Def. 7. constat propositum.

Cor. (*Hauber.* §. 6. apud *Clavium* Schol. ad V. 26) Pariter, si A:B<C:D, erit etiam D:C<B:A, seu B:A>D:C Tum enim est C:D>A:B. Omnino autem, si ea ratio, qu altera est maior, ex V. Def. 7. hac ipsâ minor dicatur, facile

uae de maioribus rationibus traduntur, ad minores applicantur, si transpositis rationibus ea, quâ altera minor est, maior ponatur.

Propositio b. (*Hauber* §. 7.)

Si sex magnitudinum A, B, C, D, E, F sit A:B > C:D, : C:D > E:F, erit et A:B > E:F.

Demonstr. Cum sit A:B > C:D, et C:D > E:F, sit ex . Def. 7. mA > nB, mC =< nD; et pC > qD, pE =< qF, esignantibus m, n, p, q semper numeros integros: erit uoque (V. Ax. I.) pmC =< pnD, mpC > mqD, seu pnD = > pmC, pmC > mqD, hincque pnD > mqD, et pn > mq, ac roinde etiam pnB > mqB: cumque sit mA > nB, itaque et mA > pnB, erit à fortiori pmA > mqB, seu mpA > mqB, et A > qB: et, quia praeterea est pE =< qF, per V. Def. 7. onstat propositum.

Scholion. (*Hauber*. §. 8.). Hanc Propositionem quidam ditores Elementorum V. 13. pro corollario subiunxeunt, et *Clavius* quidem expresse addens in Schol. ad V. 13. *odem modo* eam demonstrari posse, quo V. 13. ipsa demonrata sit: quod non ita se habet.

Propos. c. (*Hauber*. §. 10. *Pfleiderer*. in Promt. Mathem. Lips. 1798. §. 60. Nr. 2. 3.)

Quatuor magnitudinum A, B, C, D si A = B, et C < D, el si A > B, et C = < D, erit A:B > C:D, seu invetse Prop. a.) B:A < D:C.

Demonstrationi praemissa est apud *Hauberum* §. 9. ea ropositio, quam supra ex Promt. Lips. §. 60. Nr. 1. attulinus, quamque Lemma ad c. vocabimus, nempe si A = B, = D, esse A:B = C:D. Tum vero *Hauberus* ita pergit.) Si A = B, C < D, sit C + E = D; erit ex modo dictis A:B = C + E:D, cumque sit C + E:D > C:D (V. 8.) erit etiam :B > C:D (V. 13.). 2) Hiuc etiam, si A > B, C = D, seu = C, et B < A, erit D:C > B:A, seu (Prop. a.) A:B > C:D, uae est *Pappi* VII. 10. 3) Si A > B, et C < D, sit A = B + E, C + F = D, erit A:B > A:B + E (V. 8.) et A:B + E = C

$+F:D$ ex Lemm. ad initium Demonstrationis allato, ac proinde $A:B > C+F:D$ (V. 13.): quoniamque $C+F:D > C:D$ (V. 8.) etiam $A:B > C:D$ (Prop. b.). Est haec *Pappi* VII. 11.

Prop. d. (*Hauber.* §. 11. *Pfleiderer.* in Promt. Mathem. Lips. 1798. §. 62.)

Si $A:B > C:D$, erit $C < D$, si $A = < B$, et erit $A > B$, si $C = > D$.

Dem. 1) Si $A:B > C:D$, atque $A = < B$, seu $B = > A$, erit $B:B = > A:B$ (V. 7. 8.) quare $B:B > C:D$ (V. 13. et Prop. b.). Sed, cum sit $B:B = D:D$ (Lemm. ad c.), erit $D:D > C:D$ (V. 13.) ac proinde $D > C$, seu $C < D$ (V. 10.).

2) Si $A:B > C:D$, atque $C = > D$, erit $C:D = > D:D$ (V. 7. 8.) hincque $A:B > D:D$ (V. 13. et Prop. b.). Sed quia $D:D = B:B$ (Lemm. ad c.), erit et $A:B > B:B$ (V. 13.) ac proinde $A > B$ (V. 10.).

Prop. e. (*Hauber.* §. 12.)

Si $A:B > C:D$; erit etiam $mA:mB > C:D$, et $A:B > nC:nD$, et $mA:mB > nC:nD$, ac vicissim, denotantibus m, n numeros integros quoscunque.

Dem. 1) Cum sit $mA:mB = A:B$ (V. 15), si sit $A:B > C:D$, erit etiam $mA:mB > C:D$ (V. 13.): pariterque, si sit $mA:mB > C:D$, etiam $A:B > C:D$ (V. 13.).

2) Sic et, quum sit $nC:nD = C:D$ (V 15.) si rursus $A:B > C:D$, erit quoque $A:B > nC:nD$ (V. 13.): si vero $A:B > nC:nD$, pariter $A:B > C:D$ (V. 13.).

3) Denique, si $A:B > C:D$, erit $mA:mB > C:D$ per modo demonsrata nr. 1. adeoque et $mA:mB > nC:nD$ per demonstrata nr. 2. Vicissim, si $mA:mB > nC:nD$, erit et $A:B > nC:nD$ (nr. 1.), atque hinc $A:B > C:D$ (nr. 2.)

Cor. 1. (*Hauber.* §. 13.) Hinc etiam, si $A:B > C:D$, erit

$$\left.\begin{matrix} A:B \\ \frac{1}{m}A:\frac{1}{m}B \\ \frac{p}{m}A:\frac{p}{m}B \end{matrix}\right\} > \frac{q}{n}C:\frac{q}{n}D, \text{ atque } \frac{p}{m}A:\frac{p}{m}B > \left\{\begin{matrix} C:D \\ \frac{1}{n}C:\frac{1}{n}D. \end{matrix}\right.$$

Cor. 2. (*Hauber* §. 14.). Atque etiam, si rursus $A:B > C:D$

$$\text{erit } mA:mB > \left\{\begin{matrix} \frac{1}{n}C:\frac{1}{n}D & \text{et} & \frac{1}{m}A:\frac{1}{m}B \\ \frac{q}{n}C:\frac{q}{n}D & & \frac{p}{m}A:\frac{p}{m}B \end{matrix}\right\} > nC:nD.$$

Prop. f. (*Hauber.* §. 15.)

Si $A:B > C:D$; erit etiam $mA:B > mC:D$, et $A:nB > C:nD$, et $mA:nB > mC:nD$, m et n denotantibus numeros integros quosounque.

Dem. Si ob $A:B > C:D$ (supp.) sit $pA > qB$, $pC = < qD$ (V.Def. 7.) etiam (V. Ax. 3.) erit $m.pA > mqB$; $mpC = < m.qD$,

$n.pA > nqB$; $npC = < n.qD$,

$mnpA > mnqB$; $mnpC = < mnqD$,

seu $p(mA) > m.qB$; $p(mC) = < m.qD$

$n.pA > q.(nB)$; $n.pC = < q(nD)$

$np(mA) > mq(nB)$; $np(mC) = < mq(nD)$,

et cum aequemultiplices magnitudinum pA, pC; qB, qD sint ipsarum quoque magnitudinum A, C; B, D, pariterque aequemultiplices magnitudinum $p(mA)$, $p(mC)$; $q(nB)$, $q(nD)$ sint ipsarum mA, mC, nB, nD aequemultiplices (V. 3.), per V. Def. 7. constat propositum.

Prop. g. (*Hauber.* §. 16.)

Vicissim, si	$A:B > C:D$	seu si $mA:B > mC:D$,
erit etiam	$\frac{A}{m}:B > \frac{C}{m}:D$	vel $A:nB > C:nD$
et	$A:\frac{B}{n} > :C\frac{D}{n}$	vel $mA:nB > mC:nD$
et	$\frac{A}{m}:\frac{B}{n} > \frac{C}{m}:\frac{D}{n}$	erit etiam $A:B > C:D$

Dem. Ob $mA:B > mC:D$, $A:nB > C:nD$, $mA:nB > mC:nD$ (supp.), fit (V. Def. 7.) $p(mA) > qB$, $p(mC) = < qD$

$$pA > q(nB),\ pC = < q(nD)$$

$$p(mA) > q(nB),\ p(mC) = < q(nD)$$

sive (V. 3.) $(pm)A > qB$, $(pm)C = < qD$

$$pA > (qn)B,\ pC = < (qn)D$$

$$(pm)A > (qn)B,\ (pm)C = < (qn)D$$

proinde V. Def. 7. erit $A:B > C:D$.

Cor. 1. (*Hauber.* §. 17.). Hinc et per Prop. f., si $A:B > C:D$, erit

$$\frac{p}{m}A : \begin{cases} B \\ \frac{1}{n}B \\ \frac{q}{n}B \end{cases} > \frac{p}{m}C : \begin{cases} D \\ \frac{1}{n}D \\ \frac{q}{n}D \end{cases}$$

$$\text{et } \left.\begin{matrix} A \\ \frac{1}{m}A \end{matrix}\right\} : \frac{q}{n}B > \left.\begin{matrix} C \\ \frac{1}{m}C \end{matrix}\right\} : \frac{q}{n}D.$$

Cor. 2. (*Hauber* §. 18.). Itemque

$$mA : \begin{cases} \frac{1}{n}B \\ \frac{q}{n}B \end{cases} > mC : \begin{cases} \frac{1}{n}D \\ \frac{q}{n}D \end{cases} \text{ et } \left.\begin{matrix} \frac{1}{m}A \\ \frac{p}{m}A \end{matrix}\right\} : nB > \left.\begin{matrix} \frac{1}{m}C \\ \frac{p}{m}C \end{matrix}\right\} : nD.$$

Prop. h. (*Hauber.* §. 19. *Pappi* Prop. VII. 3. coll. VII. 4. apud *Clavium* V. 28.)

Si $A:B > C:D$, erit componendo $A+B:B > C+D:D$.

Dem. Sit $mA > nB$, $mC = < nD$ (supp. et V. Def. 7.), et additis mB, mD, erit $mA+mB > nB+mB$, $mC+mD = < nD+mD$, cumque

V. 1.) sit $mA+mB=m(A+B)$, $mC+mD=m(C+D)$, ac V. 2.), $nB+mB=(n+m)B$; $nD+mD=(n+m)D$, et proinde

$$m(A+B)>(n+m)B,\ m(C+D)=<(n+m)D,$$ per V. Def. 7. constat propositum.

Cor. 1. (*Hauber.* §. 20.) Aliter haec Propositio sic exprimetur: Si differentia duarum magnitudinum ad earum minorem in maiori ratione est, quam differentia duarum aliarum ad harum minorem; etiam maior priorum ad ipsarum minorem in maiori ratione erit, quam maior posteriorum ad minorem. Nam si $A-B:B>C-D:D$, erit $A-B+B:B>C-D+D:D$ hoc est $A:B>C:D$.

Cor. 2. *Hauber.* §. 21.) Eodem supposito, quod in Prop. h., summa duarum priorum ad earum priorem in minori ratione erit, quam summa posteriorum ad tertiam. Nam, si $A:B>C:D$, inverse erit (Prop. a.) $B:A<D:C$, adeoque $A+B:A<C+D:C$ (Prop. h.), seu $A:A+B<C:C+D$ (Prop a.)

Prop. i. (*Hauber.* §. 22. *Clav.* V. 29.)

Si $A:B>C:D$, et $C>D$, ac proinde etiam $A>B$ (Prop. d.), erit etiam *dividendo* $A-B:B>C-D:D$, seu inverse $B:A-B<D:C-D$.

Dem. Sit $mA>nB$, $mC=<nD$ (supp. et V. Def. 7.); tum (V. Ax. 3.) quia $D<C$, erit $nD<nC$, proinde ex aequo vel à fortiori $mC<nC$, itaque $m<n$, et $nB>mB$, $nD>mD$. Iam, demtis mB, mD, erit $mA-mB>nB-mB$, $mC-mD=<nD-mD$, cumque

per V. 5. $mA-mB=m(A-B)$, $mC-mD=m(C-D)$

ac per V. 6. $nB-mB=(n-m)B$, $nD-mD=(n-m)D$;

$$\text{erit } m(A-B)>(n-m)B,\ m(C-D)=<(n-m)D.$$

Quodsi $n-m$, qui est numerus integer, sit >1, propositum constat ex V. Def. 7. si vero $n-m=1$, erit $2m(A-B)>2B$, $2m(C-D)=<2D$, quoniamque aequemultiplices magnitudinum $m(A-B)$, $m(C-D)$ sunt ipsarum $A-B$, $C-D$ aequemultiplices (V. 5.), rursus per V. Def. 7. constat proposisum.

Coroll. (*Hauber.* §. 23.) Quod quidem sic quoque exprimi potest: *Si summa duarum magnitudinum ad earum alteram maiorem rationem habet, quam summa duarum aliarum ad harum alteram; ad eam priorum, quae terminum consequentem rationis maioris constituit, etiam altera ipsarum maiorem rationem habebit, quam altera posteriorum ad eam harum, quae est terminus consequens rationis minoris.* Quippe

si $A+B:B>C+D:D$;

et $A+B-B:B>C+D-D:D$

i. e. $A:B>C:D$.

Prop. k. (*Hauber.* §. 24. *Pappi* VII. 6. *Clav.* V. 30.).

Si $A:B>C:D$, et $C>D$, ac proinde (Prop. d.) $A>B$, erit *convertendo* $A:A-B<C:C-D$, seu inverse $A-B:A>C-D:C$.

Dem. Ob $A:B>C:D$ (supp.), erit dividendo (Prop. i.) $A-B:B>C-D:D$, ac proinde $A-B+B:A-B<C-D+D:C-D$ (Prop. h. Cor. 2.) i. e. $A:A-B<C:C-D$, seu

$A-B:A>C-D:C$ (Prop. a.).

Cor. 1. (*Hauber.* §. 25.) Sive etiam: *si summa duarum magnitudinum ad earum unam maiorem rationem habet, quam summa duarum aliarum ad harum unam; summa priorum ad earum alteram minorem rationem habebit, quam summa posteriorum ad harum alteram.* Etenim, si

$A+B:B>C+D:D$

erit $A+B:A+B-B<C+D:C+D-D$

i. e. $A+B:A<C+D:C$.

Quod etiam consequitur ex Prop. i. Cor. et Prop. h. Cor. 2.

Cor. 2. (*Hauber.* §. 26.) Generatim, si quatuor magnitudinum, quarum prior ad secundam maiorem rationem habet, quam tertia ad quartam, tertia maior fuerit quam quarta, adeoque (Prop. d.) etiam prima maior quam secunda; differentia priorum ad earum alterutram maiorem rationem habebit, quam differentia posteriorum ad harum alterutram, quae nimirum ei, quae in maiori ratione assumta erat, ordine respondet.

Cor. 3. (*Hauber.* §. 27.) Pariter, si differentia duarum magnitudinum ad earum minorem habet rationem maiorem, quam differentia duarum aliarum ad harum minorem, priorum quoque differentia ad earum maiorem in maiori ratione erit quam differentia posteriorum ad ipsarum maiorem.

Si enim $A-B:B>C-D:D$

erit $A-B:A-B+B>C-D:C-D+D$ (Prop. h. Cor. 2.)

i. e. $A-B:A>C-D:C$.

Quod etiam consequitur ex Prop. h. Cor. 1. et Prop. k.

Prop. l. (*Hauber.* §. 28.)

Si $A:B>C:D$, et $B>A$ adeoque (Prop. d.) $D>C$, erit

$\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\}:B-A>\left.\begin{matrix}C\\D\end{matrix}\right\}:D-C$ et inverse.

Dem. Cum sit $A:B>C:D$ (supp.), seu

$D:C>B:A$ (Prop. a.) et $B>A$ (supp.)

dividendo erit $D-C:C>B-A:A$ (Prop. i.), atque etiam

$D-C:D>B-A:B$ (Prop. k.)

unde pariter (Prop. a.) $A:B-A>C:D-C$

et $B:B-A>D:D-C$.

Cor. 1. (*Hauber.* §. 29.) Si duarum magnitudinum differentia ad earum maiorem in maiori ratione est, quam duarum aliarum differentia ad harum maiorem; priorum quoque maior ad ipsarum minorem in maiori ratione erit, quam posteriorum maior ad harum minorem. Nam, si

$A-B:A>C-D:C$

est $A:A-(A-B)>C:C-(C-D)$ Prop. l.

i. e. $A:B>C:D$.

Cor. 2. (*Hauber.* §. 30.) Item, eodem supposito, quod in Cor. praeced. pariter differentia priorum ad ipsarum minorem in maiori ratione erit, quam differentia posteriorum ad harum minorem. Si enim

$A-B:A>C-D:C$

est $A-B:A-(A-B)>C-D:C-(C-D)$ Prop. l.

i. e. $A-B:B>C-D:D$

quod et consequitur ex Cor. 1. et Prop. i.

Prop. m. (*Hauber.* §. 31. *Clav.* V. 31. cum Schol.).

Si vel $A:B=D:E$	vel $A:B>D:E$	vel tam $A:B>D:E$
et $B:C>E:F$	et $B:C=E:F$	quam $B:C>E:F$

ex aequo etiam erit $A:C>D:F$

Dem. 1) Si $A:B=D:E$ et $B:C>E:F$, sit $mB>nC$, $mE=<nF$ (V. Def. 7.). Tum, quia $nC<mB$ erit $A:nC>A:mB$ (V. 8.), et, cum ob $A:B=D:E$ (supp.) sit $A:mB=D:mE$ (V. 4.), etiam $A:nC>D:mE$ (V. 13.), quoniamque $mE=<nF$, erit et $D:mE=<D:nF$ (V. 7. 8.), ac proinde $A:nC>D:nF$ (V. 13. et Prop. b.), itaque $A:C>D:F$ (Prop. c.).

2) Si $A:B>D:E$, et $B:C=E:F$, inverse (V. 4. et Prop. a.) erit $C:B=F:E$

et $B:A<E:D$

igitur ex aequo per demonstrata nr. 1. $C:A<F:D$ seu inverse (Prop. a.) $A:C>D:F$.

3) Si tam $A:B>D:E$, quam $B:C>E:F$, sit $mA>nB$, $mD=<nE$, et $pB>qC$, $pE=<qF$ (V. Def. 7.) erit et $pmA>pnB$, $pmD=<pnE$, $npB>nqC$, $npE=<nqF$ seu $pmA>pnB$, et $pnB>nqC$, pariterque $pmD=<pnE$, et $pnE=<nqF$: itaque hinc $pmA>nqC$, $pmD=<nqF$. Quare, cum aequemultiplices magnitudinum mA, mD, qC, qF sint ipsarum etiam A, D, C, F aequemultiplices (V. 3.), propositum per V. Def. 7. constat.

(Hinc sequens deduci potest Corollarium: Rationum inter se diversarum duplicatae (triplicatae etc.) etiam inter se diversae sunt, et maioris quidem maior. Nempe, sit v. gr. $A:B=B:C$, et $P:Q=Q:R$, sitque $A:B>P:Q$, et $mA>nB$, $mP=<nQ$. Iam, quoties $mA>nB$, erit et $mB>nC$, et quoties $mP=<nQ$, erit et $mQ=<nR$ (V. Def. 7.) itaque erunt simul $mB>nC$, et $mQ=<nR$, adeoque (V. Def. 7.) $B:C>Q:R$, unde ex hac Propositione m. erit $A:C>P:R$. Cf. observ. ad V. Def. 10. 11. Atque hinc porro facile coll. Cor. ad V. 22. per indirectum demonstrabitur, rationum earundem inter se subduplicatas (subtriplicatas etc.) pariter inter se esse easdem, diversarum diversas.)

Prop. n. (*Hauber.* §. 32. *Clav.* V. 32. cum Schol.)

i vel $A:B=E:F$,	vel $A:B>E:F$,	vel tam $A:B>E:F$
et $B:C>D:E$	et $B:C=D:E$	quam $B:C>D:E$

erit etiam *ex aequo perturbate* $A:C>D:F$.

Dem. 1) Si $A:B=E:F$ et $B:C>D:E$. sit $mB>nC$, $mD=<nE$ (V. Def. 7.), et erit $nE:mF=>mD:mF$ (V. 7 et 8.) et, quia ob $A:B=E:F$ (supp.) etiam $nA:mB=nE:mF$ (V. 4.), erit et $nA:mB=>mD:mF$ (V. 11. 13.). Sed, cum sit $mB>nC$, est $nA:nC>mD:mF$ (V. 13. et Prop. b.), unde $A:C>D:F$ (Prop. e.).

2. Si $A:B>E:F$, et $B:C=D:E$, erit inverse
$C:B=E:D$ (V. Cor. 4. vel Prop. B.)
et $B:A<F:E$ (Prop. a.)

itaque per demonstrata nr. 1. $C:A<F:D$; seu inverse $A:C>D:F$ (Prop. a.)

3. Si $A:B>E:F$, et $B:C>D:E$, sit $mA>nB$, $mE=<nF$, et $pB>qC$, $pD=<qE$ (V. Def. 7.), igitur et $pmA>pnB$, npB, seu $pnB>nqC$, pariterque $qmE=<qnF$, mpD seu $pmD=<mqE$ seu qmE, atque hinc $pmA>nqC$, $pmD=<nqF$, et, quoniam magnitudinum mA, mD; qC, qF aequemultiplices ipsarum quoque A, D; C, F sunt (V. 3.), erit per V. Defin. 7. $A:C>D:F$.

Prop. o. (*Hauber.* §. 33.)

Si $A:B=>C:D$, et $E:B>F:D$, erit $A+E:B>C+F:D$.

Dem. 1) Si $A:B=C:D$ et $E:B>F:D$, sive inverse
$B:E<D:F$ (Prop. a.), *ex aequo* erit (Prop. m.)
$A:E<C:F$, itaque $A+E:A>C+F:C$ (Cor. 2. Prop. h.) et, cum sit $A:B=C:D$ (supp.), ex aequo etiam (Prop. m.) $A+E:B>C+F:D$.

2) Si $A:B>C:D$, et $E:B>F:D$, sit $mA>nB$, $mC=<nD$, et $pE>qB$, $pF=<qD$, erit etiam $pmA>pnB$, $pmC=<pnD$, et mpE, seu $pmE>mqB$, mpF seu $pmF=<mqD$, ergo etiam $pmA+pmE>pnB+mqB$, $pmC+pmF=<pnD+mqD$, seu (V. 3., V. 1., V. 2.)

$pm(A+E) > (pn+mq)B$, pariterque
$pm(C+F) = < (pn+mq)D$, unde et
$A+E:B > C+F:D$ per V. Def. 7.

Coroll. (*Hauber.* §. 34.) Sive etiam, si

$$A:B = > C:D$$
$$\text{et } E-A:B > F-C:D$$

erit $A+E-A:B > C+F-C:D$
i. e. $E:B > F:D$.

Prop. p. (*Hauber.* §. 35.)

Si $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$, erit $C > F$, si $A > E$, et $A < E$, si $C < F$.

Dem. Nam, ob $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$ (supp.)
$B:E < D:F$ (Prop. a.)

erit etiam ex aequo $A:E < C:F$ (Prop. m.)
seu $E:A > F:C$ (Prop. a.)
unde per Prop. d. constat propositum.

Prop. q. (*Hauber.* §. 36.)

Si $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$, erit
$A-E:B < C-F:D$, si $B > E$, ac proinde (Prop. p.) $C > F$,
sed $E-A:B > F-C:D$, si $C < F$ . . . . . $A < E$.

Dem. 1) Si est $A:B = < C:D$, et $E:B > F:D$, et $A > E$,
inverse erit $B:E < D:F$ (Prop. a.)

igitur ex aequo $A:E < C:F$ (Prop. m.)
et quia $A > E$, $A-E:A < C-F:C$ (Prop. k.)
quoniamque $A:B = < C:D$ (supp.)
etiam ex aequo $A-E:B < C-F:D$ (Prop. m.)

2) Si est $E:B > F:D$, et $A:B = < C:D$, atque $D < F$,
erit inverse $B:A = > D:C$ (Prop. B et a.)

quare ex aequo $E:A > F:C$ (Prop. m.),
et hinc $E-A:E > F-C:F$ (Prop. i.) quia $C < F$,
cumque sit $E:B > F:D$ (supp.)
ex aequo etiam $D-A:B = F-C:D$ (Prop. m.)

Cor. 1. (*Hauber.* §. 37.) Quod quidem etiam sic exprimi potest

Si est $A+E:B = < C+F:D$
et $A:B > C:D$

erit et $E:B < F:D$.

Sed, si $A:B = < C:D$
et $A+E:B > C+F:D$

erit et $E:B > F:D$.

Cor. 2. (*Hauber.* §. 38.) Hinc etiam, si

$A-E:B < C-F:D$
et $A:B = < C:D$

erit $A-(A-E):B < C-(C-F):D$ (Prop. q. nr. 1.)
seu $E:B < F:D$.

Et, si $A:B > C:D$
atque $A-E:B = < C-F:D$

erit $A-(A-E):B > C-(C-F):D$ (Prop. q. nr. 2.)
hoc est $E:B > F:D$.

Prop. r. (*Hauber.* §. 39.)

Si $A:B > C:D$, tum si $C > D$, ergo et (Prop. d.) $A > B$, erit $A+B:A-B < C+D:C-D$: et, si $A < B$, ergo et (Prop. d.) $C < D$, erit $A+B:B-A > C+D:D-C$.

Dem. Ob $A:B > C:D$ (supp.)

1) erit $A+B:A < C+D:C$ (Cor. 2. Prop. h.)
et, si $C > D$, convertendo $A:A-B < C:C-D$ (Prop. k.)

quare ex aequo $A+B:A-B < C+D:C-D$ (Prop. m.)

2) erit quoque $A+B:B > C+D:D$ (Prop. h.),
et, si $A < B$, $B:B-A > D:D-C$ (Prop. l.)

unde rursus ex aequo $A+B:B-A > C+D:D-C$ (Prop. m.)

Prop. s. (*Hauber.* §. 40.)

Vicissim, si $A+B:A-B > C+D:C-D$
erit $A:B < C:D$

Dem. Nam, ob $A+B:A-B<C+D:C-D$ (supp.)
est $A+B+A-B:A+B-(A-B)<C+D+C-D:C+D-(C-D)$ (Prop. r.) hoc est $2A:2B<2C:2D$
et proinde $A:B<C:D$ (Prop. e.)

Et hactenus quidem de magnitudinibus universim serm: fuit, sive ea, quae ad duas diversas rationes pertinent, inter se eiusdem, sive diversi generis fuerint. Iam vero transit auctor ad magnitudines *homogeneas*.

Prop. t. (*Hauber.* §. 41.) Conf. Prop. c.

Si quatuor homogenearum magnitudinum A, B, C, D sit $A=C$, et $B<D$, vel, si $A>C$, et $B=<D$, erit
$A:B>C:D$.

Dem. 1) Si $A=C$, et $B>D$,
erit $A:B>A:D$ (V. 8.)
et $A:D=C:D$ (V. 7.)
ac proinde $A:B>C:D$ (V. 13.)

2) Si $A>C$, et $B=<D$,
erit $A:B>C:D$ (V. 8.)
et $C:B=>C:D$ (V. 7. 8.)
itaque et $A:B>C:D$ (V. 13. et Prop. b.)

Prop. u. (*Hauber.* §, 42.)

Vicissim, si $A:B>C:D$, erit $B<D$, si $A=<C$, et $A<C$, si $B=>D$.

Dem 1) Si $A=<C$, erit
$C:B=>A:B$ (V. 7. 8.)
et cum sit $A:B>C:D$ (supp.)
etiam $C:B>C:D$ (V. 13 et Prop. b.)
proindeque $B<D$ (V. 10.)

2) Si $B=>D$, erit $C:D=>C:B$ (V. 7. 8.)
quare, cum sit $A:B>C:D$ (supp.)
erit et $A:B>C:B$ (V. 13 et Prop. b.)
itaque $A>C$ (V. 10.)

rop. v. (*Hauber.* §. 43. *Pappi* VII. Prop. 5. apud *Clav.* V. 27.)

Si $A:B > C:D$, erit et *alterne* $A:C > B:D$, seu inverse $: A = D:B$.

Dem. Sit $mA > nB$, et $mC \overset{=}{<} nD$ (supp. et V. Def. 7.)

erit igitur $mA:mC > nB:nD$ (Prop. i.)

et hinc $A:C > B:D$ (Prop. e.)

Prop. w. (*Hauber.* §. 44.)

Si $A:B > C:D$, erit $A+B:C+D \begin{cases} > B:D \\ < A:C \end{cases}$

)em. Ob $A:B > C:D$ (supp.) erit

1) componendo $A+B:B > C+D:D$ (Prop. h.)

et alterne $A+B:C+D > B:D$ (Prop. v.)

2) erit etiam $A+B:A < C+D:C$ (Cor. 2. Prop. h.)

t rursus alterne $A+B:C+D < A:C$ (Prop. v.)

Cor. 1. (*Hauber.* §. 45. *Pappi* VII. 8.) Pariter, si $A:B > C:D$,

erit et $A+C:B+D \begin{cases} > C:D \\ < A:B \end{cases}$. Nam, ob $A:B > C:D$ (supp.)

erit alterne $A:C > B:D$ (Prop. v.) et hinc

$A+C:B+D \begin{cases} > C:D \\ < A:B \end{cases}$ (Prop. w.)

Cor. 2. Inaequalium duarum magnitudinum maior ad minorem in maiori ratione est, quam summa maioris et cuiuscunque tertiae ad summam minoris et eiusdem tertiae.

Nam, si $A > B$, est $A:C > B:C$ (V. 8.), ideoque

$A+C:B+C < A:B$ (Prop. w.), seu $A:B > A+C:B+C$.

Prop. x. (*Hauber.* § 47.)

Si $A:B > C:D$, et $C > D$, itaque (Prop. d.) $A > B$, erit

$A-B:C-D > \begin{cases} A:C \\ B:D \end{cases}$; sed si $B > A$, adeoque (Prop. d.)

$D > C$, erit $B-A:D-C < \begin{cases} A:C \\ B:D \end{cases}$.

Dem. Propter $A:B > C:D$ (supp.)

1) si $C > D$, erit $A-B:A > C-D:C$ (Prop. k.)

et $A-B:B > C-D:D$ (Prop. i.)

proinde etiam alterne $A-B:C-D > A:C$

et $A-B:C-D > B:D$ (Prop. v.)

2) si $B > A$, erit $B-A:A < D-C:C$

pariterque $A-A:B < D-C:D$ (Prop. l.)

unde iterum alterne $B-A:D-C < A:C$

et $B-A:D-C < B:D$ (Prop. v.)

Cor. 1. (*Hauber.* §. 48. *Pappi* VII, 9. *Clav.* V. 33.) Si $A:B > C:D$, et fuerit $B > D$, adeoque (Prop. u.) $A > C$, erit $A-C:B-D > \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases}$; sin autem $A < C$, ac proinde (Prop. u.) $B < D$, erit $C-A:D-B < \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases}$.

Nam, ob $A:B > C:D$ (supp.), erit alterne (Prop. o.)

$A:C > B:D$, atque hinc, si $B > D$, erit

$$A-C:B-D > \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases}; \text{ sin autem } A < C,$$

$$C-A:D-B < \begin{cases} A:B \\ C:D \end{cases} \text{ Prop. x.}$$

Cor. 2. Inaequalium duarum magnitudinum maior ad minorem in minori ratione est, quam excessus maioris super tertiam quamcunque ad excessum minoris super eandem, minorem nimirum ambabus; in maiori vero, quam excessus tertiae cuiuscunque, quae sit ambabus maior, super maiorem, ad excessum eiusdem super minorem.

Etenim, si $A > B$, est $A:C > B:C$ (V, 8.)

et proinde $A-C:B-C > A:B$, si $C < B$

et $C-A:C-B < A:B$, si $C > A$ (Prop. x.)

$$\text{sen } A:B \begin{cases} < A-C:B-C \\ > C-A:C-B \end{cases}$$

Prop. y. (*Hauber.* §. 50. *Clav.* V. 34.)

Si $A:B > C:D$, et $C:D > E:F$ etc. erit summa omnium priorum $A+C+E+$ etc. ad summam omnium posteriorum $B+D+F+$ etc. in maiori ratione, quam postrema E priorum ad postremam F posteriorum; in minori autem, quam prima A priorum ad primam B posteriorum; et denique in maiori quam summa priorum $C+E+$ etc. omnium excepta prima A,

l summam posteriorum D+F+ etc. omnium, excepta ha-
ım prima B.

Dem. Ob A:B>C:D (supp.)

est A+C:B+D>C:D et <A:B (Cor. 1. Prop. v.)

Quoniam autem C:D>E:F (supp.), erit etiam

A+C:B+D>E:F (Prop. b.)

tque hinc A+C+E:B+D+F>E:F, sed <A+C:B+D
Cor. 1. Pr. f.) Unde porro ob A+C:B+D<A:B per demou-

strata erit A+C+E:B+D+F<A:B (Prop. b.)

atque hinc A+C+E:B+D+F>C+E:D+F
(Cor. 1. Prop.)

Prop. z. (*Hauber.* §. 51.)

Si A:B>C:D, et B>D, pariterque C>D, et proinde (Prop. d. et Prop. u.) etiam A>B, et A>C: summa maximae et minimae A+D maior esr, quam summa duarum reliquarum B+C.

Dem. Ob A:B>C:D, et C>D (supp.)

dividendo est A—B:B>C—D:D (Prop. i.)

quoniamque B>D (supp.) etiam A—B>C—D (Prop. u.)

et, addito utrimque B+D

A+D>B+C.

Prop. a. (*Hauber.* §. 52. *Pappi* VII. 16.)

Si sint quatuor numeri vel lineae A, B, C, D, ita, ut A:B>C:D; erit productum vel rectangulum extremorum maius, quam productum aut rectangulum mediorum, et vicissim. (Hanc Propositionem, quamvis iam supponat Propositiones aliquas libri VI. vel VII., quae tamen independenter ab ea demonstrantur, propter nexum cum praecedentibus, noluimus à reliquis Hauberianis separare, et suo demum loco ponere, cui facile eam restituet lector intelligens).

Dem. 1) Quoniam A:B>C:D (supp.)

et A:B=A×C:B×C (VII. 17. VII. 18. VI. 1.)

erit etiam A×C:B×C>C:D (V. 13.)

et quia rursus C:D=A×C:A×D (VII. 17 VII. 18. VI. 1.)

etiam $A \times C : B \times C > A \times C : A \times D$ (V. 13.)
et hinc $B \times C < A \times D$ (V. 10.) seu
$A \times D > B \times C$.

2) Si $A \times D > B \times C$, pariter erit
$A \times C : B \times C > A \times C : A \times D$ (V. 8.)
et ob $A \times C : B \times C = A : B$ (VII. 17. VII. 18. VI. 1.)
$A : B > A \times C : A \times D$ (V. 13.):
et, quia rursus $A \times C : A + D = C : D$ (VII. 17. VII. 18. VI. 1.)
pariter $A : B > C : D$ (V. 13.)

Cor. (*Hauber.* §. 53.). Proinde, si $A : B > B : C$, denotantibus rursus A, B, C numeros, vel lineas,
est $A \times C > B^2$, vel B^q, et vicissim.

EXCURSUS
AD
ELEMENTORUM
L. VI. et maxime ad VI. Def. 5.

§. 1. Haec Definitio in Edictione *Oxoniensi* ita habet: *Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλα πλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινά.* Editio *Basileensis* legit: *τινάς.* *Theon* seculi post C. N. quarti scriptor in Commentar. in *Ptolomaei* Almagestum (*Πτολεμάιου μεγάλης συνταξεως βιβλ. ιγ. Θεωνος Ἀλέξανδρέως εἰς τὰ ἀυτὰ ὑπομνημάτων βιβλ. ια.* Basil. 1538 p. 61. post ambiguum illud et vagum *τινά* addit *πηλικότητα λόγου.* Et Scholion Anonymi in Edit. Elementor. *Basileensi* p. 67. pro *τινά* substituit *λογόν.* *Eutocius* in locum *Archimedis* (*Ἀρχιμήδους τὰ σωζόμενα, μετὰ τῶν Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου ὑπομνημάτων* iisdem verbis hanc Definitionem habet, ut nunc legitur in Edit. Oxon. Plerique Commentatores, ut *Clavius*, *Tartalea*, *David Gregorius* aliique vocem *πηλικότης* vertunt: quantitas, vel, ut ipsi vocem: quantitas interpretantur: rationum denominator vel exponens. *Wallisius* (Opera Mathem. Tom. II. p. 665 sqq.) *πηλικότης* interpretatur: quantuplicitas, quam exponi ait per exponentem rationis. (*Pfleiderer.* in Schol. in libr. VI. Elem. P. IV, è quibus excerpta sunt, quae in hoc Excursu habentur §. 200. not. 7. 8. 9 coll. §. 202. not. 15.).

§. 2. Verum enim vero, ut *Rob. Simson* observat, huius Definitionis, laxo, in quod definit, effato (vide *Pfleiderer* l. c. §. 200.) satis suspectae, in sequentibus apud *Eu-*

clidem, *Archimedem*, *Apollonium*, reliquosque veteres, ratione composita saepius utuntur, nullum amplius vestigium invenitur. (Id ipsum etiam, si non verbis, re tamen ipsa fatetur *Clavius*, nec satis excusare studet *Saccherius* (*Euclides* ab omni naevo vindicatus P. 138 sq.)). Ita v. c. in demonstratione VI. 23. in qua primum rationis compositae fit mentio, nihil prorsus occurrit, quod ad hanc Definitionem se referret. *Campanus* quoque Definitionem VI. 5. non habet.

§. 3. Aliam potius rationis compositae Definitionem, analogam ei, quae V. Def. 10. 11. habetur, aperte supponunt demonstrationes *Euclidis*, in quibus de rationibus componendis semo est v. c. VI. 23. et VII. 5. Eam à *Campano* iam strictius indicatam in VII. Def. 19. varii recentiores Mathematici, quorum plures nominat *Pfleiderer*. l. c. §. 201. dedere, uberrime exhibuit *Rob. Simson* in Definitione A, quam V. Defin. 11. subnectit, his verbis:

1. Si fuerint quotamque magnitudinis eiusdem generis, prima ad ultimam habere dicitur rationem compositam ex ratione, quam habet prima ad secundam, et ratione secundae ad tertiam, et ea, quam habet tertia ad quartam, et ita deinceps usque ad ultimam. Ex. gr. sint magnitudines A, B, C, D: prima A habere dicitur ad ultimam D rationem compositam ex ratione ipsius A ad B, et ratione B ad C, et ratione C ad D; vel ratio A ad D dicitur composita esse ex rationibus A ad B, B ad C, et C ad D.

2. Si igitur ratio A ad B eadem sit rationi E ad F; et ratio B ad C eadem fuerit rationi G ad H; et ratio C ad D eadem rationi K ad L: A ad D habere dicitur rationem compositam ex rationibus, quae eaedem sunt rationibus E ad F, G ad H, et K ad L. Idemque intelligitur, quando brevitatis gratia dicitur A ad D habere rationem compositam ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.

3. Similiter, si ratio M ad N eadem sit rationi A ad D, praecedentibus manentibus: brevitatis gratia dicitur ratio M ad N eadem esse rationi compositae ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L, (vel. quod *Playfair* addit, ipso etiam

io M ad N composita dicitur ex rationibus E ad F, G ad , et K ad L.)

Eodem sensu caeteri quoque Geometrae veteres Graeci nominationem rationis compositae usurpant, v. c. *Archime-* r Libr. II. Prop. 5 de Sphaera et Cylindro; *Apollonius* onie. I. Prop. 39. I. 40. III. 54. III. 66. *Ptolemaeus* loco pra citato, aliique.

§. 4. Ex his omnibus non sine ratione concludunt magni ominis Geometrae, inprimis *Rob. Simson* in Not. ad VI. 23. *fleiderer.* l. c. §. 204. not. 17. cum quibus consentiunt etiam lures eorum Mathematicorum, qui Definitionem §. 3. alla- m etiam ipsi exhibent, et maxime *Scarburgh* (the English uclide Oxf. 1705. Schol. in V. Def. 10. et in Def. 5. vul- arem libri VI.), vulgarem illam §. 1. exhibitam Definitio- em non esse ipsius *Euclidis*, sed a *Theone* sine dubio, sub- ata genuina §. 3. allata, substitutam fuisse eam, quae nunc abetur explicationem, quae tamen minus apta, et, ut *Rob. Simson* ait, puerilis sit, quippe quae eis solummodo rationi- bus conveniat, quae numeris exhiberi possint. Atque hac ratione omnem de compositione rationum doctrinam absurdam et ἀγεωμετρικὴν redditam esse. Unde et *Savilius*, qui vulga- rem illam Definitionem §. 1. genuinam putarat, professus est, in pulcherrimo Geometriae corpore duas esse labes, nec, quod sciat, plures, in quibus eluendis et emaculandis cum veterum tum recentionum vigilaverit industria. Priorem nempe Post. 5, I: posteriorem, quae ad compositionem ratio- num pertineat (*Savilii* Praelect. Lect. VII. p. 140.).

§. 5. Hanc suspicionem, nempe *Theonem* Architectum esse vulgaris Definitionis §. 1. confirmare videntur ea, quae *Theon* in Commentar. ad Ptolem. loco supra citato habet. Ibi nem- pe, postquam *Ptolemaeus* propositionem aliquam de composi- tione rationum legitimo more eo sensu demonstraverat, quem Definitio §. 3. supponit, *Theon* ulterioris, quod ait, illustra- tionis gratia VI. Propos. 23. adhibet, quae vero argumenta- tionem complicat potius quam explicat, tum vero ex abrupto et sine ulla ad propositum applicatione Definitionem cum

vulgari illa exacte consentientem, nisi quod ad finem adi: „πηλικότητα λόγου" exhibet. Atque hoc primum certum es vestigium Definitionis §. 1. allatae, quam ipsam deinde *Eutocius* seculi post C. N. sexti scriptor in Commentario in *Archimedem* eo, quem §. 1. diximus, loco, ut in Elementis occurrentem, designat.

§. 6. Aliud praeterea argumentum, quo vulgarem rationis compositae Definitionem §. 1. allatam suppositiam esse probari possit, in eo deprehendit *Rob. Simson* p. 374 sqq. quod VIII. Prop. 5. nihil aliud continet, quam quod in ipsa illa vulgari Definitione asseritur. Absurdum autem foret, propositionem aliquam in Elementis poni tanquam Definitionem, et eandem in iisdem demonstrari. Propositionem autem VIII. 5 in Elementis locum habere debere, non est dubium, idem enim in ea demonstratur de numeris planis, quod in VI. 23. de parallelogrammis aequiangulis; quare VI. Definitio 5. in Elementis locum habere non potest. Quae quum ita sint, liceat vulgarem illam Definitionem §. 1. positam, Definitionem *Theonis*, alteram autem §. 3. exhibitam, V. Definitionibus 10. 11. analogam, adeoque sine dubio magis ex *Euclidis* mente positam, Definitionem *Simsonis* appellare.

§. 7. Vulgarem illam Definitionem minus aptam esse non tantum inde patet, quod rei mere geometricae numeri, atque operationes in numeris usitatae immiscentur, verum etiam quarumlibet rationum datarum exponentes integros fractosque dari, nullo tot rationum numeris ineffabilium censu habito, supponitur. Quando autem numeris integris aut fractis rationes datae exprimuntur, ex quibus alia haud immediate cognita componitur, seu infertur, tum omnino haec eadem est rationi, quam productum multiplicationis terminorum antecedentium rationum habet ad productum ex ipsarum terminis consequentibus, vel, quod eodem redit: denominator, (i. e. numerus integer aut fractus indicans, cui multiplo, aut cui parti, quibusve partibus consequentis aequetur terminus antecedens rationis) rationes primae quantitatis ad ultimam exprimitur denominatoribus mediarum rationum inter se multiplicatis. Nempe,

si $A : B = m : n$ denotantibus m, n, p, q, r, s numeros datos,
$B : C = p : q$ eosque integros (quia rationes numero integro
$C : D = r : s$ et fracto, vel duobus fractis expressae facile
etc.

per V. 15. aequipollentes numeris integris expressas reducuntur): erit $A:C = mp:nq$; $A:D = mpr:nqs$ etc. Necesse est autem ad hanc propositionem, in qua de numeris agitur, demonstrandam, doctrinam de numeris, ut libr. VII. Elementorum (qui nihil de rationum compositione supponit) traditur, adhibere, aut, quae huc pertinent, separatim demonstrare. Quod quum omnino liceat, haec erit demonstratio (vid. *Pfleiderer.* l. c. §. 207.)

Ob $A : B = m : n = pm : pn$ (V. 15.) $= mp : np$ (VII. 16.)
et $B : C = p : q =$ $np : nq$ (V. 15.)
est $A : C = mp : nq$ (V. 22.),
Tum, ob $A:C = rmp:rnq$ (V. 15.) $= mpr:nqr$ (VII. 16.)
et $C:D = r:s =$ $nqr : nqs$ (V. 15.)
fit $A:D = mpr:nqs$ (V. 22.) etc.

$$\text{vel } \frac{A}{D} = \frac{mpr}{nqs} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{r} \cdot \frac{q}{s} = \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.B.C}{B.C.D}.$$

Varios aliorum conatus Definitiones *Theonis* et *Rob. Simsonis* inter se conferendi refert *Pfleiderer.* l. c. not. 17. et ipse plures etiam exhibet.

§. 8. Usum rationis compositae, quum omnia, in quibus solet adhiberi ratio composita, possint etiam sine eius auxilio tum enuntiari, tum demonstrari, in hoc unice consistere ait *Rob. Simson*, quod eius ope periphrases evitentur, et ita Propositiones possint vel enuntiari vel demonstrari brevius, vel utrumque simul fieri possit. Ex. gr. si Propositio VI. 23. enuntianda esset, non facta rationis compositae mentione, id ita fieret: Si duo Parallelogramma aequiangula fuerint, et at, fiut unum latus prioris ad unum posterioris, ita quaevis recta assumta ad secundam aliquam; et, uti alterum latus prioris ad alterum posterioris, ita secunda illa fiat ad tertiam: erit prius Parallelogrammum ad posterius, ut recta primitus assumta ad hanc tertiam. Veteres autem cum vidis-

sent, hanc enunciationem posse breviorem reddi, si nomen impositum esset rationi, quam habet prima recta ad ultimam, quo nomine simul indicarentur rationes intermediae, primae scilicet ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, et in deinceps, si plures fuerint rectae; rationem hanc primae ad ultimam dixerunt rationem compositam ex rationibus primae ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, hoc est, in praesenti casu ex rationibus, quae eaedem sunt rationibus laterum, atque ita brevius Propositionem enunciarunt: Si fuerint duo aequiangula parallelogramma, habebunt inter se rationem eandem ei, quae composita est ex rationibus, quae eaedem sunt rationibus laterum, vel adhuc brevius: aequiangula parallelogramma inter se rationem habent eandem ei, quae composita est ex rationibus laterum. Quum itaque ratio composita sit tantum modus loquendi, *Euclides* utitur quoque in Definitionibus rationis duplicatae et triplicatae verbo: λέγεται, quo verbo sine dubio utebatur etiam in Definitione rationis compositae, quam *Theon* aliusve ex Elementis sustulit; nam idem verbum retentum est in inepta Definitione rationis compositae, quae nunc in VI. Def. 5. habetur. In citationibus autem harum Definitionum aliquando retinetur, ut in Dem. VI. 19.; aliquando omittitur ut in Dem. XI. 33. ubi tamen ἔχει sine dubio idem significat, ac ἔχειν λέγεται, et in V. 23. ubi σύγκειται brevitatis caussa dicitur pro: σύγκεισθαι λέγεται. Ita fere *Rob. Simson* l. c. *Pfleiderer* tamen l. c. §§. 222. 223. monet, hac denominatione indicari simul, rationem, quae ex aliis componi dicatur, ab his pendere, per eas determinari, sic ut ex his cognitis iuxta normam quandam constantem colligi atque inferri possit. Has porro omnes, et simplicissimas designari, supponi, quas indole magnitudinum, de quarum ratione ex iis componenda praecipiatur, requirat, vel quas datorum problematis, cui enodando earum compositio adhibeatur, conditio suggerat.

§. 9. Ex Definitione *Rob. Simsonis* plures deduci possunt consequentiae, quarum partem habet ipse *Rob. Simson* in Proposit. F, G, H, K. Append. ad Libr. V. Nos eas hic

ita sistemus, ut sunt apud *Pfleiderer.* l. c. Earum prima haec est: Rationes ex rationibus respective inter se iisdem compositae (sensu strictiori Defin. *Simson.* nr. 1.) sunt inter se eaedem. (Est haec *Simson.* Propos. F in Append. ad Libr. V. vel, si mavis, V. Prop. 22. et 23. (caeterum antea demonstrandae, ut ab *Euclide* factum est) aliis verbis ita exprimi possunt. *Pfleiderer.* §. 208.)

Sit enim $A:B=D;E$
$B:C=E:F$
erit (V. 22.) $A:C=D:F$
Vel, sit $A:B=E:F$
$B:C=D:E$
erit (V. 22.) $A:C=D:F$.

Et similiter, si fuerint plures rationes in utroque casu.

§. 10. Pariter, si duae pluresve rationes eaedem sint totidem aliis; terminisque singularum ac magnitudini datae vel assumtae quarta proportionalis inveniri potest (quae eadem determinatio propositionibus analogis sequentibus est applicanda): latiori etiam sensu Def. *Simson.* nr. 2. sq. eaedem erunt inter se rationes, quarum una ex prioribus, altera ex posterioribus componitur.

Quodsi enim $A:B=E:F$
$C:D=G:H$
fiat $A:B=K:L$ et $E:F=N:O$
$C:D=L:M$ $G:H=O:P$,
eruntque ex V. 11. $K:L=N:O$
$L:M=O.P$
adeoque V. 22. $K:M=N:P$

Eodemque modo assertum de pluribus, quam duabus rationibus, compositioneque rationum iuxta Def. *Simson.* nr. 3. accepta demonstratur. (*Rob. Simson.* l. c. Prop. G. *Pfleiderer.* l. c. §. 209.).

In sequentibus rationem ex duabus pluribusve sensu Def. *Simson.* nr. 2. 3. compositam, ubi e re erit, compendii causa designabimus, has serie verticali scriptas uncis includendo.

Sic modo praecedens propositio ita exprimetur:

$$\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \end{pmatrix}, \text{ si } \begin{matrix} A:B = E:F \\ C:D = G:H. \end{matrix}$$

§. 11. Eaedem porro inter se sunt rationes, quarum utraque sensu Def. *Simson.* nr. 2. ex iisdem rationibus componitur. Hoc quippe sensu, si tam ratio A:B, quam altera C:D ex rationibus E:F, G:H componitur, sintque $\begin{matrix} E:F = K:L \\ G:H = L:M \end{matrix}$ erit tam A:B = K:N (Def. *Sims.* nr. 2.) quam C:D = K:M; igitur A:B = C:D (V. 11.) *Pfleiderer.* l. c. §. 210.

§. 12. Sicut rationis ignotae investigatio compositione eius ex rationibus scopo congruis dirigitur, et, quando hae liquent, absolvitur: ita vicissim indagatio rationis, quam unam esse constat earum, ex quibus ratio data componitur, ad determinandam alteram, alterasve hanc componentes reducitur; quo facto illa *divisione*, quam vocant, *datae rationis compositae* per notam componentem alteram vel ex alteris compositam innotescit. (*Pfleiderer.* l. c. §. 224.).

§. 13. Reductionem divisionis huius ad compositionem docet *Pappi* Propositio 171. Lib. VII. Collect. Mathem. seu Lemm. 7. in Lib. I. Conicor. Apollonii: quo, si A sit ad B in ratione composita ex rationibus C:D, E:F: vicissim rationem C:D ex rationibus A:B ac F:E seu inversa ipsius E:F componi ostendit. Facto enim E:F = D:H; erit (Def. *Simson.*) ratio, quae ex rationibus C:D, E:F componitur, h. e. (supp.) A:B = C:H.

Quare, cum ita sint $\begin{matrix} C:H = A:B \\ H:D = F:E \end{matrix}$

$$\text{est (Def. } Sims.\text{) } C:D = \begin{pmatrix} A:B \\ F:E \end{pmatrix}$$

Eodemque modo, ex quotcunque rationibus C:D, E:F, G:H etc. componatur ratio A:B; caeteris E:F, G:H etc. ad unam P:Q ex iis compositam reductis, demonstratur, rationem C:D componi ex rationibus A:B et Q:P; seu C esse ad D in ratione composita ex directa A ad B et inversa rationis P ad Q. (*Pfleiderer.* l. c. §. 225.)

§. 14. Hinc easdem etiam inter se sunt rationes, quae rationibus iisdem inter se A:B, C:D per alias E:F, G:H pariter inter se easdem divisis obtinentur. Quippe ob E:F=G:H (supp.) est etiam F:E=H:G (Prop. B. in Excurs. ad Libr. V.). Quare, cum quoque sit A:B=C:D, ratio ex A:B ac F:E composita eadem est rationi compositae ex C:D et H:G (§. 10.) h. e. (§. 13.) quae rationem A:B per alteram E:F dividendo prodit, ratio eadem est rationi divisione rationis C:D per alteram G:H orundae. (*Pfleiderer.* l. c. §. 226.)

§. 15. Idem in Propositionibus H, K Element Libr. V. annexis *Rob. Simson* uberius sic enunciat: „Si ratio ex quibusdam rationibus" (sive strictiori, sive latiori in Def. *Sim.* exposito sensu) „composita eadem sit rationi ex quibusdam aliis rationibus compositae, fueritque una ratio ex prioribus, vel ratio ex quibusdam ex prioribus composita, eadem uni rationi ex posterioribus, vel rationi ex quibusdam ex posterioribus compositae: erit reliqua ratio ex prioribus, vel ratio ex reliquis prioribus composita, eadem rationi reliquae ex posterioribus, vel rationi ex reliquis posterioribus compositae. (*Pfleiderer.* l. c. §. 227.)

§. 16. Quando $A:B=\begin{pmatrix}C:D\\E:F\end{pmatrix}$, pariter est $A:B=\begin{pmatrix}E:F\\C:D\end{pmatrix}$.

Factis enim $\begin{matrix}C:D=K:L\\E:F=L:M\end{matrix}$, est $A:B=\begin{pmatrix}K:L\\L:M\end{pmatrix}=K:M$ (V. 22.)

at ob K:M quoque $=\begin{pmatrix}L:M\\K:L\end{pmatrix}$ (V. 23.) $=\begin{pmatrix}E:F\\C:D\end{pmatrix}$:

pariter est $A:B=\begin{pmatrix}E:F\\C:D\end{pmatrix}$. Similiterque rationem ex pluribus quam duabus compositam, mutato horum ordine haud mutari ostenditur (*Pfleiderer.* §. 228.)

§. 17. Inverse, quando $A:B=\begin{pmatrix}C:D\\E:F\end{pmatrix}$, erit $B:A=\begin{pmatrix}D:C\\F:E\end{pmatrix}$.

Factis enim $\begin{matrix}C:D=K:L\\E:F=L:M\end{matrix}$ est $A:B=\begin{pmatrix}K:L\\L:M\end{pmatrix}=K:M$,

et $B:A = M:K$ (Prop. B. in Excursu ad Libr. V.) $= \begin{pmatrix} L:K \\ M:L \end{pmatrix}$ (V. 23.)

$= \begin{pmatrix} D:C \\ F:E \end{pmatrix}$ (Prop. B in Exc. ad Libr. V.). Quod rursus similiter ad rationem ex pluribus quam duabus compositam extenditur (*Pfleiderer.* §. 229.)

§. 18. Si A, B, C, D sunt magnitudines homogeneae, est $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A:D \\ C:B \end{pmatrix}$. Factis enim $\begin{matrix} A:B = K:L \\ C:D = L:M \end{matrix}$; $\begin{matrix} A:D = K:O \\ C:B = O:P \end{matrix}$

ut sint $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = K:M$, $\begin{pmatrix} A:D \\ C:B \end{pmatrix} = K:P$ (Def. *Simson.*)

ob $A:B = K:L$
$B:C = P:O$ (Prop. B in Exc. ad Libr. V.)
$C:D = L:M$

est $A:D$ seu (constr.) $K:O = \begin{pmatrix} K:L \\ P:O \\ L:M \end{pmatrix}$,

unde §. 13. $\begin{pmatrix} K:O \\ O:P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K:L \\ L:M \end{pmatrix}$

h. e. (V. 22.) $K:P = K:M$, ideoque $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A:D \\ C:B \end{pmatrix}$.

(*Pfleiderer.* §. 230.)

§. 19. Si $A:B = \begin{pmatrix} C:D \\ E:F \\ G:H \end{pmatrix}$, atque $E:F = D:I$, est

$A:B = \begin{pmatrix} C:I \\ G:H \end{pmatrix}$. Facto enim $G:H = I:K$, fit

$A:B = \begin{pmatrix} B:D \\ D:I \\ I:K \end{pmatrix}$ (§. 10.) $= C:K$ (Def. *Sims.*) $= \begin{pmatrix} C:I \\ I:K \end{pmatrix}$

(Def. *Sims.*) $= \begin{pmatrix} C:I \\ G:H \end{pmatrix}$ §. 10. (*Pfleiderer.* §. 231.)

§. 20. Sit A ad B in ratione composita ex rationibus E:F

et G:H; atque B:C=I:K: erit A ad C in ratione composita ex rationibus E:F, G:H, I:K. Factis enim

$$P:Q=E:F \qquad P:R=\begin{pmatrix}E:F\\G:H\end{pmatrix}$$

$$Q:R=G:H;\ \text{unde}$$

$$R:S=I:K \qquad P:S=\begin{pmatrix}E:F\\G:H\\I:K\end{pmatrix}$$

erunt A:B=P:R (§. 21.)

B:C=R:S (V. 11.)

$$A:C=P:S\ (V.\ 22.)=\begin{pmatrix}E:F\\G:H\\I:K\end{pmatrix}.$$ Idemque similiter et ad plures magnitudines A, B, C, D etc. et ad rationes ipsarum rationibus mutuis aequipollentes simplices compositasve quaslibet extenditur (*Pfleiderer.* §. 232.)

§. 21. Si $A:B=\begin{pmatrix}C:D\\E:F\end{pmatrix}$, et A, B, C, D, E, F sunt magnitudines homogeneae: ob B:C=B:C

B:E=B:E

$$\text{fiunt } A:C=\begin{pmatrix}C:D\\E:F\\B:C\end{pmatrix}\overset{\S.20.}{=}\begin{pmatrix}B:C\\C:D\\E:F\end{pmatrix}\overset{\S.16.}{=}\begin{pmatrix}B:D\\E:F\end{pmatrix}$$

$$A:E=\begin{pmatrix}C:D\\E:F\\B:E\end{pmatrix}\overset{\S.19.}{=}\begin{pmatrix}C:D\\B:E\\E:F\end{pmatrix}\overset{\S.18.}{=}\begin{pmatrix}C:D\\B:F\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B:D\\C:F\end{pmatrix}$$

(*Castillon* sur une nouvelle proprieté des sections coniques in Nouv. Mem. de l'Acad. de Berlin. Année 1776. p. 298.) Ceterae, quae ibidem ex $A:B=\begin{pmatrix}C:D\\E:F\end{pmatrix}$ deducuntur rationes, ex §. 13. 17. 18. et nunc §. 21 ostensis consequuntur. (*Pfleiderer.* §. 233.)

§. 22. Ratio composita ex eiusdem rationis directa et inversa est ratio aequalitatis, seu aequalium. Quippe, si

$$\begin{array}{l} A:B = E:F \\ \text{et } B:C = F:E \\ \hline \end{array}$$

fit $A:C = E:E$ (V. 22.), proinde $A = C$ (Excurs. ad Libr. V. (Prop. A.) (*Pfleiderer.* §. 234.)

§. 23. Compositionem vero plurium rationum ingredientes eiusdem rationis directa et inversa se mutuo destruunt, ita ut sint $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ B:A \end{pmatrix} = C:D$, $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ E:F \\ B:A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C:D \\ E:F \end{pmatrix}$ etc.

$$\begin{array}{l} \text{Factis enim } A:B = K:L \\ \qquad\qquad\quad C:D = L:M \\ \qquad\qquad\quad E:F = M:N \\ \hline \end{array}$$

ideoque (Def. Sims.) $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = K:M$

$$\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ E:F \end{pmatrix} = K:N$$

ob $B:A = L:K$ (const. et Prop. B. in Excurs. ad Libr. V.)

fiunt $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ B:A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K:M \\ L:K \end{pmatrix} = L:M = C:D$ (Constr. et V. 11.)

§. 20.

$$\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ E:F \\ B:A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K:N \\ L:K \end{pmatrix} = L:N = \begin{pmatrix} C:D \\ E:F \end{pmatrix} \text{ (Constr. et §. 11.)}$$

(*Pfleiderer.* §. 235.)

§. 24. Hinc, si $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \end{pmatrix}$, atque $C:D = G:H$; pariter erit $A:B = E:F$.

Quippe, ob $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \end{pmatrix}$

est $A:B = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \\ D:C \end{pmatrix}$ §. 13. $= \begin{pmatrix} E:F \\ C:D \\ D:C \end{pmatrix}$ (supp. et §. 10.)

$= E:F$ (§. 23.) (*Pfleiderer.* §. 236.)

§. 25. Vicissim si ratio, quae ex duabus componitur, est ratio aequalitatis: rationum, ex quibus componitur, una est alterius inversa.

Nempe, si $\begin{matrix} A:B=E:F \\ B:C=G:H \end{matrix}$ igitur $A:C=\left(\begin{matrix} E:F \\ G:H \end{matrix}\right)$;

et $A=C$, ideoque $A:B=C:B$ (V. 7.): fit $E:F=H:G$ (supp. et Prop. B in Exc. ad Libr. V. et V. 11.) (*Pfleiderer.* §. 237.)

§. 26. Pariter, si in Compositione trium pluriumve rationum duae se mutuo destruunt, harum una alterius est inversa.

Quippe si $\left(\begin{matrix} A:B \\ C:D \\ E:F \end{matrix}\right)=A:B$, et $\begin{matrix} A:B=K:L \\ C:D=L:M \\ E:F=M:N \end{matrix}$

est (Def. *Sims.*) $K:N=K:L$, ideoque (V. 9.) $N=L$, et (V. 7.) $L:M=N:M$; proinde $C:D=F:E$ (Prop. B in Excurs. ad Libr. V. et V. 11.)

Pariter, si $\left(\begin{matrix} A:B \\ C:D \\ E:F \\ G:H \end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix} A:B \\ C:D \end{matrix}\right)$; et $\begin{matrix} A:B=K:L \\ C:D=L:M \\ E:F=M:N \\ G:H=N:O \end{matrix}$

est (Def. *Sims.*) $K:O=K:M$

et (V. 9.) $O=M$

et (V. 7.) $M:N=O:N$; itaque $E:F=H:G$.

Et sic ulterius. (*Pfleiderer.* §. 238.).

BONNAE
TYPIS BÜSCHLERIANIS
1825.

CORRIGENDA.

IN TOMO I.

p. XI *v.* 24 Boermann *l.* Baermann
— XVI *v.* 7 Ptolomaeo *l.* Ptolemaeo
— 5 *v.* 27 ὑφ' *l.* ἐφ', eodemque modo p. 6. *v.* 32.
— 13 *v.* 32 circuli, quadrati *l.* circuli quadrati
— 24 *v.* 11 e *l.* et
— 27 *v.* 34 et *l.* ac
— 28 *v.* 35 quoque *l.* quoquo
— 30 *v.* *ult.* §. *l.* §. 28
— 32 *v.* 29 ad oculos *l.* ob oculos
— 56 *v.* 29 prope *l.* pro.
— 72 *v.* 24 Coila *l.* Cod. a
— 73 *v.* *ult.* duobus *l.* quatuor
— 105 *v.* 26 scalerum *l.* scalenum
— 120 *v.* 20 et 21 $(n-2)\times 2R$ *l.* $(n-2)\times 2R$
— 124 *v.* 4 *ΑΒΔ* *l.* *ΑΓΔ*
— 150 *v.* 23 et 25 hypothenusa *l.* hypotenusa
— 168 *v.* 21 βουθητεῖν *l.* βουθητεῖν
— 173 *v.* 10 habent *l.* habent *ZB*
— ibid. *v.* *penult.* Quadrata *l.* quadrata
— 180 *v.* 23 ostendet *l.* ostendent
— 181 *v.* *ult.* et p. 182 *v.* 20 parallelogrammum *l.* parallelogrammorum.
— 297 *v.* *antepen.* recat *l.* recta
— 200 *v.* 30 $\frac{ΑΠ-ΠΒ}{2}$ *l.* $\frac{ΠΒ-ΑΠ}{2}$
— 201 *v.* 15 $ΔΠ=ΓΡ+ΓΙ=ΙΠ+Δ=\frac{ΑΠ-ΠΒ}{2}$

l. $ΔΠ=ΓΠ+ΓΔ=\frac{ΠΒ-ΑΠ}{2}$

— 202 *v.* 25 $\frac{ΑΔ-ΒΔ}{2}$ *l.* $\frac{ΑΔ-ΒΔ}{2}$
— 206 *v.* 5 *ΞΟ* *l.* *ΝΞΟ*
— 208 *v.* 24 II. ad 10. Obs. 8. *l.* ad II. 10. Obs. 10
— 214 *v.* 21 . τετραγώνον *l.* τετραγώνου

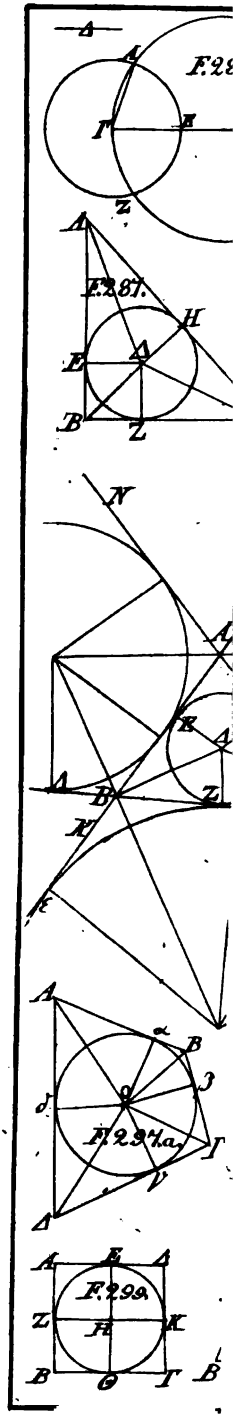
P. 218 v. antepen. $AB\Theta - \Delta$ l. $AB - B\Delta$
— 215 v. 8 et 9 ΠA l. $\Pi\Delta$
— 218 v. 29 e si sit l. i. e. si sit
— 219 v. 18 $-\Delta\Delta^q + B\Delta^q)$ l. $-(\Delta\Delta^q + B\Delta^q)$
— ibid. v. 19 $2.\Gamma\Pi^q - 2(\Gamma\Pi^q - \Gamma\Delta^q)$
l. $2\Gamma\Pi^q - 2\Gamma\Delta^q = 2(\Gamma\Pi^q - \Gamma\Delta^q)$
— 223 v. 9 EZ l. ΔZ
— 232 v. 24 $2\Gamma\Delta$ l. $2\Gamma\Delta^q$
— 240 v. 13 11. II l. II. 11.
— 241 v. 15 rectangulus l. rectangulum
— 242 v. 15 Obs. 6 l. Obs. 5.
— 252 v. 3 $\Delta\Gamma$ l. $\Delta\Gamma$,
— 255 v. 29 Obs. (. l. Obs. 4.
— 256 v. 21 $HE\varrho\Theta$ l. HE^q
— 258 v. 16 difficiens l. deficiens
— 261 v. 24 ad Obs. 5 l. ad Obs. 4.
— 262 v. 12 seu l. sed
— 272 v. 19 ABE l. ΔBE
— 279 v. 22 $B\Gamma$ l. B, Γ
— 283 v. 23 $HE : EZ$ l. BE, EZ
— 308 v. 7 ὡς αἱ l. ὡς ἡ
— 309 v. 16 differentia l. differentiae
— 332 v. 25 $\left(\frac{MN}{2}\right)^2$ l. $\left(\frac{MN}{2}\right)^q$
— 328 v. 2 μὴν l. μὲν
— 355 v. 4 BH; l. BH,
— 379 v. 9 $\Delta\Gamma B$ l. $\Delta\Gamma B$
— 387 v. 8 AB l. AE
— ibid. v. 13 Et angulus l. Angulus itaque
— 393 v. 16 EBe contento l. EB contento
— 403 v. 23 nonnullam l. nonnullas

IN TOMO II.

P. 6 v. 2 οὐ μείζων l. οὐ, μείζων
— 8 v. ult. omni l. omnia
— 16 v. 16 te l. et
— 31 v. 21 $O\Delta$ l. $O\Delta^2$
— 37 v. 16 $B\Delta\Gamma$ l. $B\Delta E$
— 38 v. 13 $B\Delta\Delta$ l. $B\Delta A$
— 47 v. ult. sit $(n-\frac{1}{2})$ l. sit $(n-\frac{1}{2})$ plus anguli ad verticem, ita ut v. gr. Pro octogono
— 49 v. 28 sin l. sit

P. 50 v. 26 2n *l.* 2^n
— 61 v. *penult.* $=\underline{\text{Rect.}}$ *l.* $=\frac{\text{Rect.}}{3}$
— 66 v. 25 2r *l.* 2^r
— 67 v. 16 $\left(\overset{2}{20+1}\right)$ $\left(\overset{3}{21+1}\right)$ $\left(\overset{5}{22+1}\right)$
l. $\left(\overset{2}{\overset{0}{2}+1}\right), \left(\overset{3}{\overset{1}{2}+1}\right), \left(\overset{5}{\overset{2}{2}+1}\right)$
— ibid. v. 16 et 17 2m+1 *l.* 2^m+1
— ibid. v. 22 $=\frac{1}{15}$ *l.* $=\frac{3}{51}$
— 71 v. 3 *Post quindecagono add.*: aequilatero et aequiangulo
— 79 v. 12 confirmare *l.* confirmari
— 86 v. 9 ἀναστοφὴ *l.* ἀναστροφὴ
— 88 v. 11 παντὰ *l.* πάντα
— 101 v. 22 pAgB *l.* pA:gB
— 108 v. 4 *a fine* propositioni *l.* propositione
— 113 v. *ultim.* ea: quae *l.* ea, quae
— 114 v. 19 (A—B *l.* (A—B)
— 121 v. 6 *a fine* magnitudinibus *l.* in magnitudinibus
— 128 v. *ultim.* ΓΔ *l.* Γ:Δ
— 140 v. 6 *a fine* rarione *l.* ratione
— 158 v. 12 definitionem *l.* definitionum
— 161 v. 5 — 2 *l.* 4
— ibid. v. 16 duobus *l.* duabus
— 213 v. *antepenult.* disideret *l.* desideret
— 214 v. 14 μρὸς *l.* πρὸς
— 220 v. 8 ΓΔ *l.* ΓΔ, Ε
— 222 v. 17 τὺ *l.* τὸ
— 225 v. 6 *a fine* compandii *l.* compendii
— 227 v. 11 *a fine* ΒΓ *l.* $ΒΓ^q$
— 228 v. 7 *a fine* in *l.* ad
— 232 v. 2 εὐθεῖαι *l.* εὐθεῖα
— 234 v. 8 ὅατως *l.* οὕτως
— 240 v. 14 *a fing* ABF *l.* ABE
— 246 v. 17 hac *l.* haec
— 247 v. 5 BEM *l.* BBΓ
— 263 v. 3 *a fine* quartae *l.* quarta
— 269 v. *ultim.* unus *l.* unum
— 270 v. 15 τὴ *l.* τὸ
— 273 v. 10 *a fine* lingulos *l.* singulos
— ibid. v. 9 *a fine* spsum *l.* ipsum
— 280 v. 5 *a fine* aciendum *l.* faciendum
— 281 v. 8 *a fine* sextus *l.* textus
— 290 v. 14 πεπερασμένη *l.* πεπερασμένην

P. 292 *v.* 6 *a fine* ad *l.* at
— 293 *v.* 13 *a fine* es, *l.* est
— ibid. *v.* 8 *a fine* Euclides et *l.* Euclidese
— ibid. *v.* 2 *a fine* a *l.* at
— 294 *v.* 9 τὸ *l.* τῷ
— 298 *v.* 12 *a fine*: trianguli *l.* rectanguli
— 301 *v.* 10 *a fine verba*: sunt *BI,IZ*, et *AE deleantur.*


F.28
F.287.
F.294a.
F.299.

P. 218 v. antepen. $ABB-\Delta$ l. $AB-B\Delta$
— 215 v. 8 et 9 $\Pi\Delta$ l. $\Pi\Delta$
— 218 v. 29 e si sit l. i. e. si sit
— 219 v. 18 $-\Delta\Delta^q+B\Delta^q)$ l. $-(\Delta\Delta^q+B\Delta^q)$
— ibid. v. 19 $2.\Gamma\Pi^q-2(\Gamma\Pi^q-\Gamma\Delta^q)$
l. $2\Gamma\Pi^q-2\Gamma\Delta^q=2(\Gamma\Pi^q-\Gamma\Delta^q)$
— 223 v. 9 EE l. AZ
— 232 v. 24 $2\Gamma\Delta$ l. $2\Gamma\Delta^q$
— 240 v. 13 11. II l. II. 11.
— 241 v. 15 rectangulus l. rectangulum
— 242 v. 15 Obs. 6 l. Obs. 5.
— 252 v. 3 $A\Gamma$ l. $A\Gamma$,
— 255 v. 29 Obs. (. l. Obs. 4.
— 256 v. 21 $\Pi Eq\Theta$ l. HE^q
— 258 v. 16 difficiens l. deficiens
— 261 v. 24 ad Obs. 5 l. ad Obs. 4.
— 262 v. 12 seu l. sed
— 272 v. 19 ABE l. ΔBE
— 279 v. 22 $B\Gamma$ l. B, Γ
— 283 v. 23 $HE:EZ$ l. BE,EZ
— 308 v. 7 ὡς αἱ l. ὡς ἡ
— 309 v. 16 differentia l. differentiae
— 332 v. 25 $\left(\frac{MN}{2}\right)^2$ l. $\left(\frac{MN}{2}\right)^q$
— 328 v. 2 μὴν l. μὲν
— 355 v. 4 BH; l. BH,
— 379 v. 9 $A\Gamma B$ l. $\Delta\Gamma B$
— 387 v. 8 AB l. AE
— ibid. v. 13 Et angulus l. Angulus itaque
— 393 v. 16 EBe contento l. EB contento
— 403 v. 23 nonnullam l. nonnullas

IN TOMO II.

P. 6 v. 2 οὐ μείζων l. οὐ, μείζων
— 8 v. ult. omni l. omnia
— 16 v. 16 te l. et
— 31 v. 21 $O\Delta$ l. $O\Delta^2$
— 37 v. 16 $B\Delta\Gamma$ l. $B\Delta B$
— 38 v. 13 $B\Delta\Delta$ l. $B\Delta A$
— 47 v. ult. sit $(n-\frac{1}{2})$ l. sit $(n-\frac{1}{2})$ plus anguli ad verticem, ita ut v. gr. Pro octogono
— 49 v. 28 sin l. sit

Α
Β F. 319.
Γ

Η
Θ
Κ
Λ
Μ
Ν

Α
Β
Γ F. 324.
Δ

Η
Α Ε
Γ Ζ
Δ

Α Ε
Γ Ζ F. 329. Δ

Α
Β
Γ
Δ
Ε
Ζ

F. 332.

Α
Γ
Δ
Ζ.

UNIV. OF MICH.

P. 292 *v.* 6 *a fine* ad *l.* at
— 293 *v.* 13 *a fine* es, *l.* est
— ibid. *v.* 8 *a fine* Euclidea et *l.* Euclideae
— ibid. *v.* 2 *a fine* a *l.* at
— 294 *v.* 9 τὸ *l.* τῷ
— 298 *v.* 12 *a fine*: trianguli *l.* rectanguli
— 301 *v.* 10 *a fine verba*: sunt *EI,IZ*, et *AE deleantur.*